

- 3) ค่า X_{ij} ที่อยู่ที่มีมุมของวงจรจะเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางตามเครื่องหมายที่ใส่ไว้
 4) เลือกค่า X_{ij} ที่มีเครื่องหมายลบน้อยที่สุด เป็นจำนวนหน่วยที่จะใช้ทำการปรับปรุง
 ต่อไปนี้แสดงตัวอย่างการหาจำนวนหน่วยที่จะใช้ทำการปรับปรุงโดยใช้วงจรปิด (closed loop)

	+	- 20	40
40		+ 30	

จำนวนหน่วยที่จะใช้ทำการปรับปรุงคือ 20

10 -	30 +	
		20 -
		40
20 +		-10

จำนวนหน่วยที่จะใช้ทำการปรับปรุงคือ 10

ขั้นตอนการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ด้วยวิธี MODI

การตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ด้วยวิธี MODI มีขั้นตอนดังนี้

- 1) ตรวจสอบจำนวนตัวแปรมูลฐาน (basic variables) หรือจำนวนช่องที่มีตัวเลขให้เท่ากับ $m+n-1$ ถ้าไม่เท่ากับ $m+n-1$ แสดงว่าเกิดสภาพซ้อนสถานะ (Degeneracy) ขึ้น ดังนั้นให้ปฏิบัติตามที่ได้อธิบายข้างต้น

2) กำหนดให้ R_i เป็นตัวเลขประจำแถวอนที่ i

กำหนดให้ K_j เป็นตัวเลขประจำแถวตั้งที่ j

พิจารณาเฉพาะช่องที่มีตัวเลข แล้วคำนวณค่า R_i และ K_j จากสมการ

$$R_i + K_j = C_{ij} \text{ โดยกำหนดให้ } R_i = 0$$

3) คำนวณค่าดัชนีพัฒนาการ (improvement index, E_{ij}) ของช่องว่างทุกช่อง เพื่อตรวจสอบว่าถ้ามีการส่งสินค้าในช่องทางนั้นจะมีผลต่อค่าใช้จ่ายรวมในการขนส่งอย่างไร โดยใช้สมการ

$$E_{ij} = C_{ij} - R_i - K_j$$

4) พิจารณาค่า E_{ij}

4.1) ถ้าค่า E_{ij} มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ($E_{ij} \geq 0$) หมดทุกค่า แสดงว่าถ้าจัดสรรสินค้าในช่องว่างที่มีอยู่นั้นจะเป็นการเพิ่มค่าใช้จ่าย (กรณีค่า E_{ij} เป็นบวก) หรือทำให้ค่าใช้จ่ายรวมไม่เปลี่ยนแปลง (กรณีค่า E_{ij} เป็น 0) แสดงว่าผลลัพธ์ที่มีอยู่นั้นเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดแล้ว การจัดสรรสินค้าตามผลลัพธ์นั้นเป็นการจัดสรรที่ทำให้เกิดค่าใช้จ่ายในการขนส่งที่ต่ำสุด

4.2) ถ้ายังมีค่า E_{ij} บางค่าเป็นลบ ($E_{ij} < 0$) แสดงว่าถ้ามีการจัดสรรสินค้าลงในช่องว่างนั้นจะสามารถลดค่าใช้จ่ายในการขนส่งได้ นั่นคือหมายถึงว่าผลลัพธ์ที่มีอยู่นั้นสามารถพัฒนาให้ดีขึ้นได้หรือสามารถพัฒนาให้มีค่าใช้จ่ายในการขนส่งที่ต่ำลงได้ ให้เลือกช่องว่างที่มีค่า E_{ij} เป็นลบมากที่สุด เพื่อทำการจัดสรรสินค้าลงในช่องว่างนั้น

5) หากจำนวนหน่วยที่จะปรับปรุงโดยใช้วงจรปิด (closed loop) ตามที่ได้อธิบายมาแล้วข้างต้น

6) ปรับปรุงตารางเพื่อพัฒนาผลลัพธ์ใหม่

7) กลับไปข้อ 1)

จากปัญหาตัวอย่างของบริษัทผลิตภัณฑ์ไทย จำกัด สามารถทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีมุมพายัพได้ ดังตารางที่ 6 แล้วนำมาทำการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์โดยใช้วิธี MODI ได้ดังนี้

ตารางที่ 13 ผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีมุมพายัพ

โกดัง โรงงาน	1	2	3	4	a_i
1	2 80	4 20	4	10	100
2	6	10 20	4 40	8	60
3	8	2	6 60	6 60	120
b_j	80	40	100	60	280

ตรวจสอบจำนวนตัวแปรมูลฐานมีครบคือ 6 ตัว จากนั้นคำนวณค่า R_i และ K_j โดยพิจารณาเฉพาะช่องที่มีตัวแปรมูลฐาน โดยใช้สมการ $R_i + K_j = C_{ij}$ โดยกำหนดให้ $R_1 = 0$

$$\text{ช่อง (1, 1) ; } R_1 + K_1 = C_{11}$$

$$0 + K_1 = 2 \quad \therefore K_1 = 2$$

$$\text{ช่อง (1, 2) ; } R_1 + K_2 = C_{12}$$

$$0 + K_2 = 4 \quad \therefore K_2 = 4$$

$$\text{ช่อง (2, 2) ; } R_2 + K_2 = C_{22}$$

$$R_2 + 4 = 10 \quad \therefore R_2 = 6$$

$$\text{ช่อง (2, 3) ; } R_2 + K_3 = C_{23}$$

$$6 + K_3 = 4 \quad \therefore K_3 = -2$$

$$\text{ช่อง (3, 3) ; } R_3 + K_3 = C_{33}$$

$$R_3 + (-2) = 6 \quad \therefore R_3 = 8$$

$$\text{ช่อง (3, 4) ; } R_3 + K_4 = C_{34}$$

$$8 + K_4 = 6 \quad \therefore K_4 = -2$$

จะได้ค่า R_i และ K_j ครอบคลุมค่าคงแสดงในตารางต่อไปนี้

โกดัง โรงงาน	1	2	3	4	a_i	R_i
1	2 80	4 20	4	10	100	0
2	6	10 20	4 40	8	60	6
3	8	2	6 60	6 60	120	8
b_j	80	40	100	60	140	
K_j	2	4	-2	-2		

นำค่า R_i , K_j ที่คำนวณได้ ประกอบกับค่า C_{ij} ที่มีข้อมูลอยู่ก่อนแล้วมาคำนวณหาค่า E_{ij} ของช่องว่างต่างๆ จากสมการ

$$E_{ij} = C_{ij} - R_i - K_j$$

$$\text{ช่องว่าง (1, 3); } E_{13} = C_{13} - R_1 - K_3 = 4 - 0 - (-2) = +6$$

$$\text{ช่องว่าง (1, 4); } E_{14} = C_{14} - R_1 - K_4 = 10 - 0 - (-2) = +12$$

$$\text{ช่องว่าง (2, 1); } E_{21} = C_{21} - R_2 - K_1 = 6 - 6 - 2 = -2$$

$$\text{ช่องว่าง (2, 4); } E_{24} = C_{24} - R_2 - K_4 = 8 - 6 - (-2) = +4$$

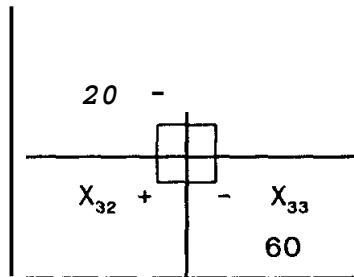
$$\text{ช่องว่าง (3, 1); } E_{31} = C_{31} - R_3 - K_1 = 8 - 8 - 2 = -2$$

$$\text{ช่องว่าง (3, 2); } E_{32} = C_{32} - R_3 - K_2 = 2 - 8 - 4 = -10$$

ค่า E_{ij} ที่เป็น + แสดงว่าถ้ามีการจัดสรรสินค้าในช่องทางนั้นค่าใช้จ่ายรวมจะเพิ่มขึ้นค่า E_{ij} ที่เป็น - แสดงว่าถ้ามีการจัดสรรสินค้าในช่องทางนั้นค่าใช้จ่ายรวมจะลดลง จะเห็นได้ว่า E_{ij} ของช่องว่างต่างๆ ในผลลัพธ์เบื้องต้นของปัญหานี้ยังมีค่าเป็นลบอยู่ถึง 3 ค่า คือ E_{21} , E_{31} และ E_{32} แสดงว่าช่องว่างเหล่านี้สามารถพัฒนาผลลัพธ์ให้ดีขึ้นได้

ถ้าจัดส่งสินค้า 1 หน่วย จากโรงงานที่ 2 ไปยังโกดังที่ 1 ค่าใช้จ่ายรวมจะลดลง 2 บาท
 ถ้าจัดส่งสินค้า 1 หน่วย จากโรงงานที่ 3 ไปยังโกดังที่ 1 ค่าใช้จ่ายรวมจะลดลง 2 บาท
 ถ้าจัดส่งสินค้า 1 หน่วย จากโรงงานที่ 3 ไปยังโกดังที่ 2 ค่าใช้จ่ายรวมจะลดลง 10 บาท

ดังนั้นจึงเลือกปรับปรุงช่องว่างที่ (3, 2) เพราะสามารถลดค่าใช้จ่ายลงได้มากที่สุด จากการ
 จัดสรรสินค้าหนึ่งหน่วยลงในช่องทางนี้จะสามารถลดค่าใช้จ่ายลงได้ถึง 10 บาท ยิ่งจัดสรรสินค้าลงใน
 ช่องทางนี้มากเท่าไรก็จะลดค่าใช้จ่ายลงได้มากเท่านั้น แต่การจะกำหนดจำนวนสินค้าที่จะจัดสรร
 ในช่องทางดังกล่าวนั้นจะต้องตระหนักว่ามีขีดจำกัด เพราะการจัดสรรสินค้าลงในช่องทางใดๆ ก็
 ตามย่อมกระทบกระเทือนการจัดสรรที่ทำไว้ก่อนแล้ว ทั้งในทางเพิ่มจำนวนสินค้าและลดจำนวนสินค้า
 ล้าง ดังนั้นการกำหนดจำนวนสินค้าที่จะจัดสรรลงในช่อง (3, 2) ทำได้โดยการลากวงจรมืด เริ่ม
 จากช่องทางที่ (3, 2) ได้ดังนี้



หมายความว่า การจัดสินค้าลงในช่องทางที่ (3, 2) จะต้องปรับปรุงจำนวนสินค้าที่จัดสรรไว้
 แล้วในช่องที่ (3, 3), (2, 2) และ (2, 3) โดยจะต้องลดจำนวนสินค้าในช่องทางที่ (3, 3) และช่องทาง
 ที่ (2, 2) พร้อมกับเพิ่มจำนวนสินค้าในช่องทางที่ (2, 3) ด้วยจำนวนที่เท่าๆ กัน ดังนั้นปริมาณสินค้า
 ที่จะจัดสรรลงในช่องทางที่ (3, 2) จะต้องไม่เกินจำนวนสินค้าที่มีอยู่ในช่องทางที่จะลดลง หรือกล่าว
 อีกนัยหนึ่ง ปริมาณสินค้าที่จะจัดสรรลงในช่องทาง (3, 2) และ (2,) ทำได้โดยเปรียบเทียบค่า X_{ij}
 ของช่องทางที่มีเครื่องหมายลบในวงจรมืดที่ลากไว้ เลือกค่า X_{ij} ที่น้อยที่สุดเป็นจำนวนหน่วยที่จะปรับ
 ปรุง ในตัวอย่างนี้คือ 20 หน่วยเท่าๆ กันได้ผลลัพธ์ใหม่ซึ่งมีการจัดสรรสินค้าที่เปลี่ยนไป จึงต้อง
 มีการตรวจสอบว่าผลลัพธ์ที่ได้พัฒนาขึ้นมาใหม่นี้เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดแล้วหรือยัง โดยการตรวจ
 ดูจำนวนตัวแปรมูลฐาน ปรากฏว่าครบ 6 ตัว จึงทำการคำนวณค่า R_i และ K_j ได้ตารางผลลัพธ์ชุด
 ใหม่พร้อมทั้งค่า R_i และ K_j ดังนี้

ตารางที่ 14 ผลลัพธ์ชุดที่ 2 และค่า R_i และ K_j

โกดัง โรงงาน	1	2	3	4	a_i	R_i
1	2 80	4 20	4	10	100	0
2	6	10 60	4	8	60	-4
3	8	2 20	6 40	6 60	120	-2
b_j	80	40	100	60	280	
K_j	2	4	8	8		

$$R_1 + K_1 = C_{11} ; 0 + K_1 = 2 \therefore K_1 = 2$$

$$R_1 + K_2 = C_{12} ; 0 + K_2 = 4 \therefore K_2 = 4$$

$$R_3 + K_2 = C_{32} ; R_3 + 4 = 2 \therefore R_3 = -2$$

$$R_3 + K_3 = C_{33} ; -2 + K_3 = 6 \therefore K_3 = 8$$

$$R_3 + K_4 = C_{34} ; -2 + K_4 = 6 \therefore K_4 = 8$$

$$R_2 + K_3 = C_{23} ; R_2 + 8 = 4 \therefore R_2 = -4$$

คำนวณค่า E_{ij} ของช่องว่างต่างๆ ได้ดังนี้

$$E_{13} = C_{13} - R_1 - K_3 = 4 - 0 - 8 = -4$$

$$E_{14} = C_{14} - R_1 - K_4 = 10 - 0 - 8 = +2$$

$$E_{21} = C_{21} - R_2 - K_1 = 6 - (-4) - 2 = +8$$

$$E_{22} = C_{22} - R_2 - K_2 = 10 - (-4) - 4 = +10$$

$$E_{24} = C_{24} - R_2 - K_4 = 8 - (-4) - 8 = +4$$

$$E_{33} = C_{33} - R_3 - K_3 = 8 - (-2) - 2 = +8$$

เลือกปรับปรุงช่องทาง (1, 3) แล้วหาจำนวนหน่วยที่จะปรับปรุงโดยลากวงจรของช่องทางที่ (1, 3)

X_{12}		X_{13}
20	-	+
	+	-
X_{32}		X_{33}
20		40

จากการเปรียบเทียบค่า X_{ij} ของช่องทางที่จะต้องถูกลดจำนวนสินค้าลงคือ ช่องทางที่ (1, 2) และ (3, 3) ค่าที่ต่ำที่สุดคือ 20 ดังนั้นจำนวนหน่วยที่จะปรับปรุงคือ 20 หน่วย

ตารางที่ 15 ผลลัพธ์ชุดที่ 3 และค่า R_i และ K_j

โกดัง โรงงาน	1	2	3	4	a_i	R_i
1	80 2	4	4	10	100	0
2	6	10	4	8	60	0
3	8	2	6	6	120	2
b_j	80	40	100	60	280	
K_j	2	0	4	4		

จากตารางผลลัพธ์ชุดที่ 3 จำนวนตัวแปรมูลฐานครบ 6 ตัว กำหนดค่า R_i, K_j ได้ดังนี้

$$R_1 + K_1 = C_{11} ; 0 + K_1 = 2 \rightarrow K_1 = 2$$

$$R_1 + K_3 = C_{13} ; 0 + K_3 = 4 \rightarrow K_3 = 4$$

$$R_2 + K_3 = C_{23} ; R_2 + 4 = 4 \rightarrow R_2 = 0$$

$$R_3 + K_3 = C_{33} ; R_3 + 4 = 6 \rightarrow R_3 = 2$$

$$R_3 + K_2 = C_{32} ; 2 + K_2 = 2 \rightarrow K_2 = 0$$

$$R_3 + K_4 = C_{34} ; 2 + K_4 = 6 \rightarrow K_4 = 4$$

และเพื่อเป็นการตรวจสอบว่าผลลัพธ์ชุดที่ 3 นี้เป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุดหรือไม่ ให้กำหนดค่า E_{ij} ของทุกช่องว่าง

$$E_{12} = C_{12} - R_1 - K_2 = 4 - 0 - 0 = +4$$

$$E_{14} = C_{14} - R_1 - K_4 = 10 - 0 - 4 = +6$$

$$E_{21} = C_{21} - R_2 - K_1 = 6 - 0 - 2 = +4$$

$$E_{22} = C_{22} - R_2 - K_2 = 10 - 0 - 0 = +10$$

$$E_{24} = C_{24} - R_2 - K_4 = 8 - 0 - 4 = +4$$

$$E_{31} = C_{31} - R_3 - K_1 = 8 - 2 - 2 = +4$$

ค่า E_{ij} เป็นบวกหมดทุกค่า แสดงว่าผลลัพธ์ชุดที่ 3 นี้เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดแล้ว โดยมีการจัดส่งสินค้า ดังนี้

โรงงานที่ 1 ส่งสินค้าไปโกดังที่ 1 จำนวน 80 หน่วย ค่าใช้จ่ายในการขนส่ง 160 บาท

โรงงานที่ 1 ส่งสินค้าไปโกดังที่ 3 จำนวน 20 หน่วย ค่าใช้จ่ายในการขนส่ง 80 บาท

โรงงานที่ 2 ส่งสินค้าไปโกดังที่ 3 จำนวน 60 หน่วย ค่าใช้จ่ายในการขนส่ง 240 บาท

โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าไปโกดังที่ 2 จำนวน 40 หน่วย ค่าใช้จ่ายในการขนส่ง 80 บาท

โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าไปโกดังที่ 3 จำนวน 20 หน่วย ค่าใช้จ่ายในการขนส่ง 120 บาท

โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าไปโกดังที่ 4 จำนวน 60 หน่วย ค่าใช้จ่ายในการขนส่ง 360 บาท

รวมค่าใช้จ่าย 1,040 บาท

จากที่กล่าวมาทั้งหมดเป็นการพัฒนาผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธี MODI จากการจัดผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีมุมพายัพ ซึ่งได้ค่าใช้จ่ายในการขนส่งที่ต่ำสุดคือ 1,040 บาท เพื่อให้เกิดความเข้าใจยิ่งขึ้น ให้ท่านลองนำผลลัพธ์เบื้องต้นที่ตั้งด้วยวิธีแวนอนเหนือไปได้ จากตารางที่ 7 หรือวิธีต้นทุนต่ำสุด จากตารางที่ 8 หรือวิธี VAM จากตารางที่ 12 มาทำการพัฒนาผลลัพธ์ด้วยวิธีMODI เมื่อทำการพัฒนาผลลัพธ์เสร็จแล้วก็จะได้ค่าใช้จ่ายในการขนส่งต่ำสุดที่เท่ากันคือ 1,040 บาท

ดังนั้นในที่นี้จึงขอเน้นย้ำว่าในการแก้ปัญหาการขนส่งนั้น ในการจัดผลลัพธ์เบื้องต้นเราอาจตั้งด้วยวิธีใดก็ได้เพียงวิธีเดียว แต่เมื่อทำการพัฒนาผลลัพธ์เสร็จแล้ว ไม่ว่าจะจัดผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีใดก็ตามในที่สุดจะได้ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดที่เหมือนกัน

ปัญหาลักษณะพิเศษของตัวแบบการขนส่ง

การใช้ตัวแบบการขนส่งเพื่อหาคำตอบที่ต้องการนั้น บางครั้งอาจจะทำได้ไม่ง่ายนักเหมือนกับกรณีโจทย์ตัวอย่างของบริษัทผลิตภัณฑ์ไทย จำกัด ซึ่งเป็นการใช้ตัวแบบการขนส่งเพื่อแก้ปัญหาที่มีลักษณะเป็นพื้นฐานมากที่สุด แต่ผู้แก้ปัญหาอาจจะต้องเจออุปสรรคในการหาคำตอบ ซึ่งปัญหาลักษณะพิเศษดังกล่าวนี้ ได้แก่

1. การเกิดสภาพซ้อนสถานะ (Degeneracy) ในการหาคำตอบ
2. การแก้ปัญหาในกรณีที่ผลรวมของสินค้าที่จุดต้นทางไม่เท่ากับผลรวมของสินค้าที่จุดปลายทาง
3. การแก้ปัญหาในกรณีผลเฉลยเหมาะสมที่สุดมีหลายผลลัพธ์
4. ปัญหาการขนส่งที่มีลักษณะเป็นปัญหาหาค่าสูงสุด
5. กรณีมีข้อห้ามในการส่งสินค้าในบางช่องทาง
6. กรณีบังคับให้ขนส่งปริมาณขั้นต่ำ
7. กรณีบังคับให้มีการขนส่งในปริมาณแน่นอน

ต่อไปนี้จะแสดงการแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบในแต่ละกรณีดังกล่าวให้เข้าใจอย่างสังเขป

1. การเกิดสภาพซ้อนสถานะ (Degeneracy) ในการหาคำตอบ

โดยทั่วไปแล้วในแต่ละขั้นตอนของการแก้ปัญหาการขนส่งโดยการใช้ตัวแบบการขนส่งคำตอบที่ได้จะมีจำนวนช่องที่มีตัวเลขหรือตัวแปรมูลฐานเท่ากับจำนวนจุดต้นทาง + จำนวนจุดปลายทาง - 1 ($m + n - 1$) ถ้าเมื่อไรก็ตามที่ผลลัพธ์ของปัญหาการขนส่งมีช่องที่มีตัวเลขหรือตัวแปรมูลฐานไม่เท่ากับ $m + n - 1$ แสดงว่าเกิดสภาพซ้อนสถานะ (Degeneracy) ขึ้น ทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดได้

สภาพซ้อนสถานะ (Degeneracy) อาจเกิดขึ้นได้ทั้งในขั้นการหาคำตอบและในขั้นของการพัฒนาผลลัพธ์ก็ได้ เมื่อเกิดสภาพซ้อนสถานะขึ้น จะไม่สามารถหาค่า R_i หรือ ค่า K_j ในวิธีMODI ได้ครบ ดังนั้นในการแก้ปัญหาที่เกิดสภาพซ้อนสถานะขึ้นนี้ต้องมีวิธีการพิเศษ ซึ่งจะแสดงวิธีสำหรับการเกิดปัญหาดังกล่าวที่เกิดขึ้นใน 2 ขั้นตอน คือ

- 1.1 สภาพซ้อนสถานะที่เกิดขึ้นในการหาผลลัพธ์เบื้องต้น
- 1.2 สภาพซ้อนสถานะที่เกิดขึ้นในระหว่างการพัฒนาผลลัพธ์

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงแต่ละกรณีดังกล่าวให้เข้าใจโดยสังเขป

1.1 กรณีเกิดสภาพซ้อนสถานะในตารางผลลัพธ์เบื้องต้น

จะมีสาเหตุจากการกำหนดค่า $X_{ij} = \min(a_i, b_j)$ ถ้าปรากฏว่าค่า $a_i = b_j$ จะทำให้ตัวแปรมูลฐานมีจำนวนตัวแปรมูลฐานน้อยกว่าที่ควรจะเป็น และไม่สามารถทำการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ได้ เนื่องจากจะคำนวณค่า R_i, K_j บางค่าไม่ได้ จึงต้องกำหนดให้ X_{ij} ในช่องว่างที่จะสามารถทำให้หาค่า R_i, K_j ได้ ในช่องว่างช่องหนึ่งหรือหลายช่องตามจำนวนตัวแปรมูลฐานที่ขาดอยู่ให้เป็นตัวแปรมูลฐานที่มีค่าเท่ากับศูนย์ เช่น มีตัวแปรมูลฐาน 5 ตัว ในขณะที่ $(m + n - 1) = 6$ แสดงว่าตัวแปรมูลฐานขาดไป 1 ตัว จะกำหนดให้ $X_{ij} = 1$ ตัวมีค่าเท่ากับศูนย์ แล้วเติมลงในช่องว่างที่จะสามารถทำให้หาค่า R_i, K_j ได้ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 1

บริษัทแห่งหนึ่ง มีข้อมูลการขนส่ง จากแหล่งวัตถุดิบมายังโรงงานของบริษัทซึ่งจัดทำเป็นตารางได้ ดังนี้

ตารางที่ 16 ตารางการขนส่งของบริษัทแห่งหนึ่ง

จาก \ ไป	โรงงาน X	โรงงาน Y	โรงงาน Z	รวมปริมาณ วัตถุดิบ
แหล่งวัตถุดิบ A	2	8	4.5	25
แหล่งวัตถุดิบ B	4	5	5.5	30
แหล่งวัตถุดิบ C	6	9	7.5	35
ความต้องการ วัตถุดิบของโรงงาน	15	40	35	90

จากตารางข้างต้นนำมาตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีมุมพายัพได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดค่า $X_{11} = \min(25, 15) = 15$

ขั้นที่ 2 เลื่อนมาช่อง (1, 2) กำหนดค่า $X_{12} = \min(10, 40) = 10$

ขั้นที่ 3 เลื่อนมาช่อง (2, 2) กำหนดค่า $X_{22} = \min(30, 30) = 30$ จะเห็นได้ว่าในช่องนี้

$a_i = b_j$ จึงกล่าวได้ว่าในขั้นนี้ทำให้เกิดสภาพซ้อนสถานะขึ้น

ขั้นที่ 4 เนื่องจากเมื่อหักค่า a_2 และ b_2 ออกด้วยจำนวน 30 หน่วยแล้วทั้ง a_2 และ b_2 จะหมดไป จึงต้องเลื่อนไปพิจารณาช่องที่ (3, 3)

ขั้นที่ 5 กำหนดค่า $X_{33} = \min(35, 35) = 35$ ได้ผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีมุมพายัพดังแสดงในตารางที่ 17

ตารางที่ 17 ผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีมุมพายัพ

จาก \ ไป	โรงงาน X	โรงงาน Y	โรงงาน Z	a_i
แหล่งวัตถุดิบ A	15	10	4.5	25
แหล่งวัตถุดิบ B	4	5	5.5	30
แหล่งวัตถุดิบ C	6	9	7.5	35
b_j	15	40	35	90

จากขั้นตอนการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นขั้นที่ 3 กำหนดค่า $X_{22} = \min(a_2, b_2)$ ปรากฏว่าค่า a_2 เหลืออยู่ 30 และค่า $b_2 = 30$ เช่นเดียวกัน จึงกำหนดให้ $X_{22} = 30$ เมื่อใดก็ตามที่ทำการกำหนดค่า X_{ij} แล้วมีค่า $a_i = b_j$ จะทำให้ผลลัพธ์ชุดนั้นมีจำนวนตัวแปรมูลฐานน้อยกว่าที่ควร เช่น ในตัวอย่างข้างต้นมีจำนวนตัวแปรมูลฐานเพียง 4 ตัว ไม่ครบจำนวน $(m + n - 1)$ คือ $3 + 3 - 1 = 5$ ตัว จึงต้องกำหนดให้ $X_{ij} = 1$ ตัว เป็นตัวแปรมูลฐานมีค่าเท่ากับ 0 เพื่อที่จะทำให้จำนวนตัวแปรมูลฐานครบ 5 ตัว และต้องเติมลงในช่องว่างที่จะทำให้สามารถหาค่า R_i และ K_j ได้ ซึ่งในที่นี้ ควรเติม 0 ลงในช่อง (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2) ช่องใดช่องหนึ่งเท่านั้น จึงจะสามารถทำให้หาค่า R_i และ K_j ได้ครบทุกตัว แต่ถ้าเติม 0 ลงในช่องว่าง (2, 1) จะทำให้ ไม่สามารถหาค่า R_i และ K_j ได้ครบทุกตัว

อนึ่งไม่มีหลักชัดเจนว่าเราจะเติม 0 ลงในช่องว่างใดที่จะทำให้เราสามารถหาค่า R_i และ K_j ได้ครบทุกตัว แต่เราจะลองผิดลองถูกโดยการเติม 0 ลงในช่องว่างต่างๆ เพื่อที่จะหาว่าเมื่อเติม 0 ลงในช่องว่างใดแล้วจึงจะทำให้หาค่า R_i และ K_j ได้ครบทุกตัว เราก็จะเลือกเติม 0 ลงในช่องว่างนั้น

จากตัวอย่างข้างต้นถ้าเราเติม 0 ลงในช่องว่าง (2, 3) เราจะสามารถหาค่า R_i และ K_j ได้ครบทุกค่า ดังแสดงในตารางที่ 18

ตารางที่ 18 แสดงการเพิ่มตัวแปรมูลฐาน และการหาค่า R_i และ K_j

จาก \ ไป	โรงงาน X	โรงงาน Y	โรงงาน Z	a_i	R_i
แหล่งวัตถุดิบ A	15	10	4.5	25	0
แหล่งวัตถุดิบ B	4	30	5.5	30	-3
แหล่งวัตถุดิบ C	6	9	7.5	35	-1
b_j	15	40	35	90	
K_j	2	8	8.5		

แสดงรายละเอียดในการหาค่า R_i และ K_j ได้ดังนี้

ช่อง (1, 1); $R_1 + K_1 = C_{11}$

$$0 + K_1 = 2 \quad \therefore K_1 = 2$$

ช่อง (1, 2); $R_1 + K_2 = C_{12}$

$$0 + K_2 = 8 \quad \therefore K_2 = 8$$

ช่อง (2, 2); $R_2 + K_2 = C_{22}$

$$R_2 + 8 = 5 \quad \therefore R_2 = -3$$

ช่อง (2, 3); $R_2 + K_3 = C_{23}$

$$-3 + K_3 = 5.5 \quad \therefore K_3 = 8.5$$

ช่อง (3, 3); $R_3 + K_3 = C_{33}$

$$R_3 + 8.5 = 7.5 \quad \therefore R_3 = -1$$

เมื่อเราสามารถหาค่า R_i และ K_j ได้ครบทุกค่าแล้ว ขั้นตอนต่อไปเราก็สามารถทำการพัฒนาผลลัพธ์ได้ตามขั้นตอนที่ได้ศึกษามา

1.2 กรณีเกิดสภาพข้อสถานะขึ้นระหว่างการพัฒนาผลลัพท์

ในบางกรณีสภาพข้อสถานะมิได้เกิดตั้งแต่การตั้งผลลัพท์เบื้องต้น แต่เกิดในระหว่างการพัฒนาผลลัพท์ใหม่เมื่อลากรวงจรปิดเพื่อหาผลกระทบของการปรับปรุงช่องทางที่เลือกไว้ และหาจำนวนหน่วยที่จะปรับปรุงตาราง ปรากฏว่าค่า X_{ij} ที่ค่าสุดของช่องทางที่จะลดจำนวนสินค้าลงนั้นเท่ากัน ทำให้ผลลัพท์ที่พัฒนาขึ้นมาใหม่ มีจำนวนตัวแปรมูลฐานน้อยลง

ตัวอย่างที่ 2

จากผลลัพท์เบื้องต้นของปัญหาการขนส่งสินค้าจากโรงงาน 3 แห่ง ไปยังโกดัง 3 แห่ง ซึ่งหาด้วยวิธีมุมพายัพ คำนวณค่า R_i และ K_j ของแถวอนและแถวตั้ง แสดงในตารางที่ 19 ดังนี้

ตารางที่ 19 ผลลัพท์เบื้องต้นหาด้วยวิธีมุมพายัพ

โรงงาน \ โกดัง	1	2	3	a_i	R_i
1	90	90	60	180	0
2	60	60	60	120	-4
3	30	30	60	60	4
b_j	90	150	120	360	
K_j	4	8	12		

จากตารางที่ 19 จะเห็นได้ว่าผลลัพท์เบื้องต้นนี้ไม่เกิดสภาพข้อสถานะเพราะว่าช่องที่มีตัวเลขหรือตัวแปรมูลฐานมีจำนวนเท่ากับ 5 ซึ่งจะเท่ากับ $m + n - 1$ ดังนั้นทำให้เราสามารถหา R_i และ K_j ได้ ดังนั้นเราก็จะคำนวณหาค่าดัชนีพัฒนาการ (E_{ij}) จากช่องว่าง เพื่อหาช่องทางที่จะปรับปรุงได้ และต่อไปก็จะหาจำนวนหน่วยที่จะทำการปรับปรุง ซึ่งแสดงรายละเอียดได้ดังนี้

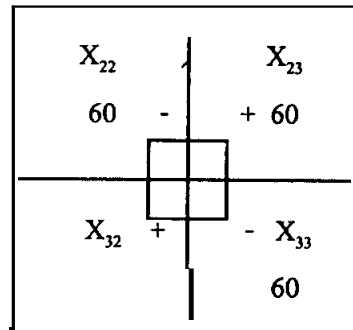
$$E_{13} = C_{13} - R_1 - K_3 = 24 - 0 - 12 = 12$$

$$E_{21} = C_{21} - R_2 - K_1 = 8 - (-4) - 4 = 8$$

$$E_{31} = C_{31} - R_3 - K_1 = 16 - 4 - 4 = 8$$

$$E_{32} = C_{32} - R_3 - K_2 = 4 - 4 - 8 = -8$$

ดังนั้น จึงทำการปรับปรุงที่ช่อง (3, 2) และเมื่อใช้วงจรถัดซึ่งแสดงได้ดังนี้



ดังนั้น จึงทำการปรับปรุงด้วย 60 แล้วทำการปรับปรุงตารางเพื่อพัฒนาผลลัพธ์ใหม่ได้ดังนี้

ตารางที่ 20 ผลลัพธ์ชุดที่ 2

โกดัง โรงงาน	1	2	3	a_i
1	90	90		180
2			120	120
3		60		60
b_j	90	150	120	360

จากตารางผลลัพธ์ชุดที่ 2 ดังตารางที่ 20 จะเห็นได้ว่า ช่องที่มีตัวเลขหรือตัวแปรมูลฐาน(basic variables) มีเพียง 4 ตัว ซึ่งไม่ครบจำนวน $m + n - 1$ ขาดไป 1 ตัว แสดงว่าในผลลัพธ์ชุดที่ 2 นี้ได้เกิดสภาพข้อตันสถานะขึ้น ไม่สามารถหาค่า R_i และ K_j ได้ครบทุกตัว ซึ่งในที่นี้จะมีช่องว่างอยู่ทั้งหมด 5 ช่อง ดังกล่าวนั้นเราสามารถใส่ 0 ได้เพียง 4 ช่องเท่านั้นที่จะทำให้สามารถหาค่า R_i และ K_j ได้ครบทุกตัว ช่องที่เราไม่สามารถใส่ 0 เพื่อการหาค่า R_i และ K_j คือช่อง (3, 1) ในที่นี้เราจะทำการใส่ 0 ลงในช่อง (3, 3) แล้วทำการหาค่า R_i และ K_j ได้ดังตารางที่ 21 แล้วทำการพัฒนาผลลัพธ์ใหม่ได้ดังนี้

ตารางที่ 21 การหาค่า R_i และ K_j จากผลลัพธ์ชุดที่ 2

โกดัง โรงงาน	1	2	3	a_i	R_i
1	90	90	24	180	0
2	8	4	8	120	-12
3	16	4	16	60	-4
b_j	90	150	120	360	
K_j	4	8	20		

จากตารางที่ 21 สามารถนำมาหาค่าดัชนีพัฒนาการ (E_{ij}) ของช่องว่างได้ดังนี้

$$E_{13} = C_{13} - R_1 - K_3 = 24 - 0 - 20 = 4$$

$$E_{21} = C_{21} - R_2 - K_1 = 8 - (-12) - 4 = 16$$

$$E_{22} = C_{22} - R_2 - K_2 = 4 - (-12) - 8 = 8$$

$$E_{31} = C_{31} - R_3 - K_1 = 16 - (-4) - 4 = 16$$

จะเห็นได้ว่า E_{ij} มีค่าเป็นบวกทุกค่า ดังนั้นผลลัพธ์ชุดที่ 2 ในตารางที่ 21 จะให้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุดแล้ว โดยมีการจัดสรรการขนส่งที่ดีที่สุด และค่าใช้จ่ายรวมในการขนส่งต่ำสุด เป็นดังนี้

โรงงานที่ 1 ส่งสินค้าให้แก่โกดังที่ 1 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(90 \times 4) = 360$ บาท
 โรงงานที่ 1 ส่งสินค้าให้แก่โกดังที่ 2 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(90 \times 8) = 720$ บาท
 โรงงานที่ 2 ส่งสินค้าให้แก่โกดังที่ 3 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(120 \times 8) = 960$ บาท
 โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าให้แก่โกดังที่ 2 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(60 \times 4) = 240$ บาท
 รวมค่าใช้จ่ายในการขนส่ง = 2,280 บาท

มีข้อสังเกตว่าในบางครั้งขณะที่เกิดสภาพซ้อนสถานะขึ้น แล้วเราทำการเติม 0 ลงในช่องว่าง เพื่อที่จะหาค่า R_i และ K_j ให้ได้ครบทุกค่าแล้วนั้น เมื่อเราทำการหาค่า E_{ij} และหาจำนวนหน่วยที่จะปรับปรุงโดยใช้วงจรปิด และพบว่าจากวงจรปิดเราจะต้องปรับปรุงด้วยจำนวน 0 หน่วย แสดงตารางผลลัพธ์ที่เรากำลังพิจารณานั้น จะให้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดแล้ว เพื่อให้เข้าใจคำอธิบายดังกล่าวได้ชัดเจนขึ้น ขอยกตัวอย่างที่ 3 ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3

ปัญหาการขนส่งของบริษัทแห่งหนึ่ง มีข้อมูลปรากฏดังข้างล่างนี้ ให้ท่านทำการจัดสรรการขนส่งที่จะทำให้ค่าใช้จ่ายในการขนส่งต่ำสุด

ผลิต / โรงงาน \ ตลาด	1	2	กำลังการผลิต
1	3	1	25
2	2	4	55
3	6	7	40
ความต้องการ ของตลาด	55	65	120

จากตารางการขนส่งข้างต้นนำมาตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีมุมพายัพได้ดังนี้

ตารางที่ 22 ตารางผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีมุมพายัพ

โรงงาน \ ตลาด	1	2	a_i
1	3 25	1	25
2	2 30	4 25	55
3	6	7 40	40
b_j	55	65	120

จะเห็นได้ว่าการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีมุมพายัพตามตารางที่ 22 ไม่เกิดสภาพซ้อนสถานะ เพราะว่ามีช่องที่มีตัวเลขหรือตัวแปรมูลฐานมีจำนวนเท่ากับ $m + n - 1$ ดังนั้น จึงทำการหาค่า R_i และ K_j ได้ครบทุกตัว และทำการพัฒนาผลลัพธ์ได้ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ตารางที่ 23 หาค่า R_i และ K_j จากตารางผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีมุมพาย์

โรงงาน \ ตลาด	1	2	a_i	R_i
1	25	25	25	0
2	30	25	55	-1
3	40	40	40	2
b_j	55	65	120	
K_j	3	5		

หาค่าดัชนีพัฒนาการ (E_{ij}) จากช่องว่างได้ดังนี้

$$E_{12} = C_{12} - R_1 - K_2 = 1 - 0 - 5 = -4$$

$$E_{31} = C_{31} - R_3 - K_1 = 6 - 2 - 3 = 1$$

ดังนั้นจึงทำการปรับปรุงที่ช่อง (1, 2) หากจำนวนหน่วยที่จะปรับปรุงโดยใช้วงจรถัด ได้ดังนี้

X_{11}		X_{12}
25	-	+
X_{21}	+	-
30		X_{22}
		25

ดังนั้นจึงทำการปรับปรุงด้วย 25 แล้วทำการปรับปรุงตารางเพื่อพัฒนาผลลัพธ์ใหม่ได้ดังนี้

ตารางที่ 24 ผลลัพธ์ชุดที่ 2

โรงงาน \ ตลาด	1	2	a_i
1	3	1	25
2	55	4	55
3	6	7	40
b_j	55	65	120

ผลลัพธ์ชุดที่ 2 มีช่องที่มีตัวเลข หรือตัวแปรมูลฐานทั้งหมด 3 ตัว ซึ่งจะน้อยกว่า $m + n - 1$ ซึ่งคือ 4 ตัว อยู่ 1 ตัว ดังนั้นจึงไม่สามารถทำการหาค่า R_i และ K_j ได้ครบทุกตัว ต้องทำการเติมตัวแปรมูลฐานด้วย 0 ลงในช่องใดช่องหนึ่งต่อไปนี้ ได้แก่ ช่อง (1, 1), (2, 2) และช่อง (3, 1) และจะต้องเป็นช่องที่จะทำให้สามารถหาค่า R_i และ K_j ได้ครบทุกตัว สมมติในที่นี้ เราจะเติม 0 ลงในช่อง (1, 1) ดังนั้น เราจะหาค่า R_i และ K_j พร้อมทั้งทำการพัฒนาผลลัพธ์ได้ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 25 แสดงการหาค่า R_i และ K_j จากผลลัพธ์ชุดที่ 2

โรงงาน \ ตลาด	1	2	a_i	R_i
1	0	25	25	0
2	55		55	-1
3		40	40	6
b_j	55	65	120	
K_j	3	1		

หาค่าดัชนีพัฒนาการ (E_{ij}) จากช่องว่างได้ดังนี้

$$E_{22} = C_{22} - R_2 - K_2 = 4 - (-1) - 1 = 4$$

$$E_{31} = C_{31} - R_3 - K_1 = 6 - 6 - 3 = -3$$

จะเห็นว่า E_{31} มีค่าเป็นลบมากที่สุด ดังนั้นจึงทำการปรับปรุงช่อง (3, 1) และทำการหาจำนวนหน่วยที่จะทำการปรับปรุงโดยใช้วงจรปิด ได้ดังนี้

X_{11}		X_{12}
0	-	+ 25
X_{21}		X_{22}
55		
X_{31}	+	- 40 X_{32}

จะเห็นได้ว่า X_{ij} ที่มีเครื่องหมายลบน้อยที่สุดคือ 0 ดังนั้นจึงทำการปรับปรุงช่อง (3, 1) จากตารางที่ 25 ด้วยจำนวน 0 และเมื่อทำการปรับปรุงแล้วตารางที่ 25 ก็จะไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้น จึงแสดงว่า ตารางที่ 25 หรือผลลัพธ์ชุดที่ 2 เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดแล้ว

2. การแก้ปัญหาในกรณีที่ผลรวมของสินค้าที่จุดต้นทางไม่เท่ากับผลรวมของสินค้าที่จุดปลายทาง

จากตัวอย่างกรณีปัญหาของบริษัทผลิตภัณฑไทย จำกัด หรือตัวอย่างอื่นๆ ที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่าผลรวมของสินค้าที่จุดต้นทางเท่ากับผลรวมของสินค้าที่จุดปลายทาง แต่ก็อาจจะเป็นไปได้ว่าในบางครั้งนั้นผลรวมของสินค้าที่จุดต้นทางอาจไม่เท่ากับผลรวมของสินค้าที่จุดปลายทาง ในกรณีนี้ นั้น เคยกล่าวมาแล้วบ้างในตอนต้นว่าเราจะต้องใช้ Dummy เข้ามาช่วยในการสร้างตารางการคำนวณ ก่อนที่จะทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้น ซึ่งเราอาจแบ่งพิจารณาได้เป็น 2 กรณี คือ

2.1 กรณีผลรวมของสินค้าที่จุดต้นทางมากกว่าผลรวมของสินค้าที่จุดปลายทางต้องการ ($\sum a_i < \sum b_j$) หรือ (Total Supply > Total Demand)

ในกรณีนี้ นั้น เราจะเพิ่มความต้องการปลอม หรือ dummy destination ซึ่งให้มีความต้องการเท่ากับ $\sum a_i - \sum b_j$ วัตถุประสงค์ก็เพื่อรับเอาสินค้าที่เกินความต้องการ ทั้งนี้ก็เพื่อที่จะทำให้จำนวนสินค้าที่จุดต้นทางเท่ากับจำนวนสินค้าที่จุดปลายทาง โดยที่จะกำหนดค่าขนส่งจากต้นทางไปปลายทางมีค่าเท่ากับ 0

ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างในกรณี Total Supply > Total Demand

ตารางที่ 26 ตารางการคำนวณในกรณี Total Supply > Total Demand

ตลาด \ โรงงาน	1	2	Supply
A	2	6	200
B	4	3	120
Demand	180	80	320
			180

จะเห็นว่าจำนวนสินค้าที่โรงงาน A และ B มีอยู่ = $200 + 120 = 320$ หน่วย ส่วนจำนวนสินค้าที่ตลาดที่ 1 และ 2 ต้องการ = $100 + 80 = 180$ หน่วย ดังนั้นจำนวนสินค้าที่โรงงานผลิตได้มากกว่าจำนวนสินค้าที่ตลาดต้องการ = $320 - 180 = 140$ หน่วย ดังนั้นเราต้องสร้างตลาด สมมติโดยให้มีความต้องการ 140 หน่วย และค่าขนส่งจากโรงงานต่างๆ มายังตลาดสมมตินี้เท่ากับ 0 และสามารถสร้างตารางการคำนวณได้ดังนี้

ตารางที่ 27 ตารางการคำนวณกรณีเพิ่ม Dummy destination

โรงงาน \ ตลาด	1	2	Dummy	Supply
A	2	6	0	200
B	4	3	0	120
Demand	100	80	140	320

หลังจากตั้งตารางการคำนวณได้แล้ว ขั้นตอนต่อไปก็ทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นและพัฒนาผลลัพธ์ตามกระบวนการที่ได้ศึกษามา จนสุดท้ายจะได้ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 28 ผลเฉลยเหมาะสมที่สุดในกรณีเพิ่ม Dummy destination

โรงงาน \ ตลาด	1	2	Dummy	Supply
A	2	6	0	200
B	4	3	0	120
Demand	100	80	140	320