

บทที่ 8

ตัวแบบการขนส่ง

ในบทนี้ประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

- ลักษณะของปัญหาการขนส่ง
- ขั้นตอนในการแก้ปัญหาการขนส่ง
- ลักษณะของตัวอย่างปัญหา
- การสร้างตารางการคำนวณ
- การตั้งผลลัพธ์เบื้องต้น
- การตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์
- ปัญหาลักษณะพิเศษของตัวแบบการขนส่ง
- แบบฝึกหัด

บทที่ 8

ตัวแบบการขนส่ง

โดยทั่วไปแล้วตัวแบบการขนส่งมักจะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาทางการผลิตและการตลาดของธุรกิจ กล่าวคือ ในขั้นดำเนินการผลิต ธุรกิจจะต้องตัดสินใจว่าควรมีการจัดส่งวัตถุดิบอย่างไร จึงจะทำให้ต้นทุนรวมที่เกิดขึ้นต่ำสุด เพราะว่าในขั้นดำเนินการผลิตต้องมีการนำวัตถุดิบมาจากแหล่งวัตถุดิบหลายแห่ง ส่งมายังโรงงานที่มีอยู่หลายโรงงาน แหล่งวัตถุดิบแต่ละแหล่งมีปริมาณความสามารถในการผลิตวัตถุดิบต่างกัน ขณะที่โรงงานแต่ละโรงก็มีความต้องการวัตถุดิบต่างกันด้วย สำหรับในขั้นดำเนินการตลาดก็พบว่าจะมีการกระจายผลิตภัณฑ์จากโรงงานหลายโรงที่มีกำลังการผลิตต่างกัน ไปเก็บไว้ในคลังสินค้าซึ่งอยู่ในที่ต่าง ๆ ไปยังตลาดต่าง ๆ ซึ่งคลังสินค้าแต่ละแห่ง หรือตลาดแต่ละแห่งมีความต้องการผลิตภัณฑ์ในปริมาณที่ต่างกัน นอกจากนั้นค่าขนส่งระหว่างโรงงานแต่ละแห่งไปยังคลังสินค้า หรือตลาดแต่ละแห่งก็แตกต่างกันด้วย ปัญหาคือควรมีการกระจายสินค้าอย่างไรจึงจะทำให้ต้นทุนรวมที่เกิดขึ้นต่ำสุด ปัญหาในลักษณะดังกล่าวนี้เรียกว่า ปัญหาการขนส่ง (Transportation problem)

ปัญหาการขนส่ง เป็นปัญหาลักษณะพิเศษลักษณะหนึ่งของปัญหาคำหนดการเชิงเส้น ซึ่งสามารถเขียนปัญหาให้อยู่ในรูปแบบกำหนดการเชิงเส้นตามที่ศึกษามาแล้ว ในบทที่ 2 ได้ ทั้งยังสามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ หรือใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดได้เช่นเดียวกัน แต่เนื่องจากกำหนดการเชิงเส้นที่มีลักษณะเป็นปัญหาการขนส่งนั้นมักจะมีตัวแปรและเงื่อนไขบังคับค่อนข้างมาก ยังมีเส้นทางการขนส่งมากเท่าไร จำนวนตัวแปรและเงื่อนไขบังคับก็มากยิ่งขึ้นไปอีก ทำให้เสียเวลาการคำนวณมาก จึงได้มีการพัฒนาวิธีการแก้ปัญหาของปัญหาการขนส่งโดยเฉพาะขึ้นมา ซึ่งช่วยให้การแก้ปัญหาการขนส่งสะดวกรวดเร็วมากขึ้น

ลักษณะของปัญหาการขนส่ง

ปัญหาการขนส่ง เป็นปัญหาเกี่ยวกับการหาวิธีการจัดการจัดสรรสินค้าจากจุดต้นทาง (Origins) อันได้แก่ โรงงาน แหล่งวัตถุดิบ โกดังสินค้า ร้านค้า ฯลฯ ซึ่งมีหลายๆ แห่งไปยังจุดปลายทาง (Destinations) ซึ่งอาจจะเป็นคลังสินค้า ร้านค้า ลูกค้า ฯลฯ ที่มีอยู่หลาย ๆ แห่งเช่นกัน

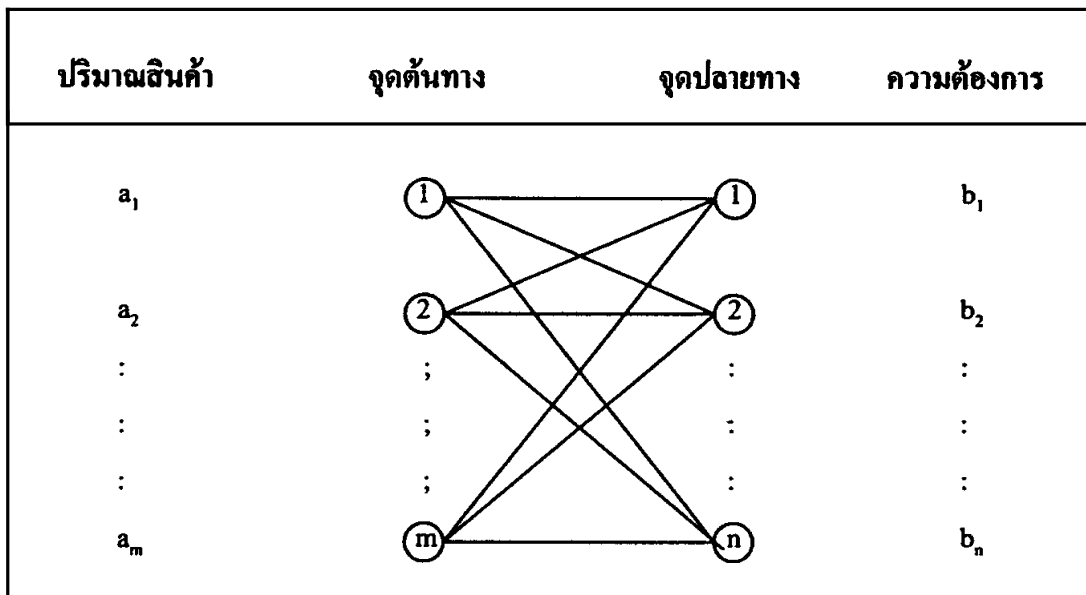
โดยมี วัตถุประสงค์เพื่อให้เสียค่าใช้จ่ายในการขนส่งรวมทั้งสิ้นแล้วต่ำสุด (minimization problem) ในการแก้ปัญหาการขนส่งจำเป็นต้องมีข้อมูลที่สำคัญดังนี้

- 1) จำนวนจุดต้นทาง (m) เช่นมีโรงงานผลิตสินค้า 2 โรงงาน
- 2) จำนวนจุดปลายทาง (n) เช่นคลังสินค้าที่จะรับสินค้าจากโรงงานมี 3 แห่ง
- 3) จำนวนสินค้าที่มีอยู่ที่จุดต้นทางต่างๆ
- 4) จำนวนสินค้าที่จุดปลายทางต่างๆ ต้องการ
- 5) ค่าใช้จ่ายในการขนส่งสินค้าหนึ่งหน่วยจากจุดต้นทางแต่ละแห่งไปยังจุดปลายทางต่าง ๆ

ถ้ากำหนดให้ a_i คือจำนวนสินค้าที่มีอยู่ที่จุดต้นทางที่ i
 b_j คือจำนวนสินค้าที่จุดปลายทางที่ j ต้องการ
 C_{ij} คือค่าใช้จ่ายในการขนส่งสินค้าหนึ่งหน่วยจากจุดต้นทางที่ i ไปยังจุด

ปลายทางที่ j

X_{ij} คือจำนวนสินค้าที่ส่งจากจุดต้นทาง i ไปยังจุดปลายทาง j
 Z คือค่าใช้จ่ายรวม



รูปที่ 1 ลักษณะปัญหาการขนส่ง

จากวัตถุประสงค์เพื่อให้ค่าขนส่งรวมต่ำที่สุดคงได้กล่าวแล้วนั้น สามารถเขียนฟังก์ชัน
วัตถุประสงค์ของปัญหาข้างต้นได้ดังนี้

$$\text{minimize } Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \dots + C_{mn}X_{mn} \text{ หรือ } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij}X_{ij}$$

ทั้งนี้ มีเงื่อนไขบังคับของปัญหาเพียง 2 ด้านเท่านั้น ด้านแรกเกี่ยวกับขีดจำกัดของสินค้ามีอยู่ที่จุดต้นทาง สินค้าที่จะส่งออกไปจากจุดต้นทางหนึ่งๆ รวมกันแล้วต้องเท่ากับจำนวนสินค้าที่จุดต้นทาง สินค้าที่ส่งออกไปจากจุดต้นทางนั้นมีอยู่ หรือเขียนให้อยู่ในรูปเงื่อนไขบังคับของกำหนดการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + \dots + X_{1n} = a_1$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + \dots + X_{2n} = a_2$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$X_{m1} + X_{m2} + X_{m3} + \dots + X_{mn} = a_m$$

$$\text{หรือเขียนโดยย่อ } \sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

เงื่อนไขบังคับอีกด้านหนึ่งคือความต้องการสินค้าหรือความสามารถในการเก็บสินค้าของจุดปลายทาง สินค้าต่างๆ ที่ส่งจากจุดต้นทางมายังจุดปลายทางหนึ่งๆ รวมแล้วจะต้องเท่ากับความต้องการของจุดปลายทางนั้นเขียนให้อยู่ในรูปเงื่อนไขบังคับของกำหนดการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + \dots + X_{m1} = b_1$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + \dots + X_{m2} = b_2$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$X_{1n} + X_{2n} + X_{3n} + \dots + X_{mn} = b_n$$

$$\text{หรือเขียนโดยย่อได้ว่า } \sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

สรุปรูปแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาการขนส่งได้ดังต่อไปนี้

$$\text{minimize } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

subject to :

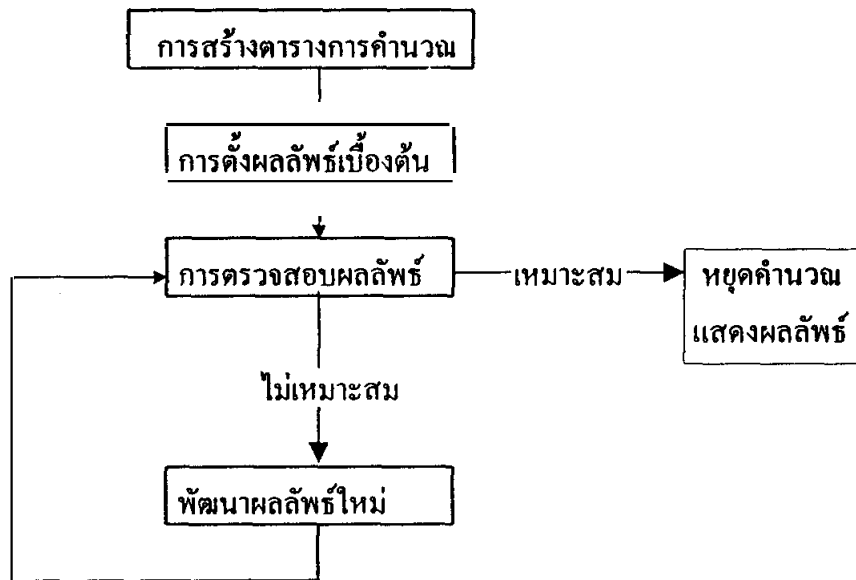
$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

ขั้นตอนในการแก้ปัญหการขนส่ง

ขั้นตอนในการแก้ปัญหการขนส่งเป็นการคำนวณแบบย้อนซ้ำ โดยมีขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยสังเขป ดังนี้



รูปที่ 2 ขั้นตอนในการแก้ปัญหการขนส่ง

ลักษณะของตัวอย่างปัญหา

ในการอธิบายขั้นตอนในการแก้ปัญหาการขนส่งจะใช้โจทย์ตัวอย่างต่อไปนี้

บริษัทผลิตภัณฑ์ไทยจำกัด เป็นบริษัทผู้ผลิตสินค้า มีโรงงานผลิตสินค้า 3 แห่งผลิตสินค้าได้ 100 หน่วย 60 หน่วย และ 120 หน่วย ตามลำดับ สินค้าที่ผลิตได้จะถูกส่งไปเก็บไว้ที่โกดังสินค้า 4 แห่ง ซึ่งมีความต้องการสินค้าแห่งละ 80 หน่วย 40 หน่วย 100 หน่วย และ 60 หน่วย ตามลำดับ ค่าใช้จ่ายในการขนส่งสินค้าจากโรงงานไปยังโกดังต่างๆ แสดงในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ค่าใช้จ่ายในการขนส่ง (บาท / หน่วย)

โรงงาน \ คลังสินค้า	1	2	3	4
1	2	4	4	10
2	6	10	4	8
3	8	2	6	6

ให้ทำการจัดสรรการขนส่งจากโรงงานไปยังคลังสินค้าด้วยวิธีที่ดีที่สุดนั่นคือการทำให้ค่าใช้จ่ายในการขนส่งรวมทั้งหมดต่ำสุด

การสร้างตารางการคำนวณ

ตารางคำนวณที่ใช้ในการแก้ปัญหาการขนส่ง มีลักษณะดังนี้

ตารางที่ 2 ตารางคำนวณปัญหาการขนส่ง

โรงง	1	2	...	n	a.
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	...	C_{1n} X_{1n}	a_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	...	C_{2n} X_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	...	C_{mn} X_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

สมมติฐานที่สำคัญของปัญหาการขนส่งคือ ผลรวมของสินค้าที่มีอยู่ที่จุดต้นทาง (a_i) ต้องเท่ากับผลรวมของสินค้าที่จุดปลายทางต้องการ (b_j)

ดังนั้นจากปัญหาตัวอย่างสามารถสร้างตารางการคำนวณของบริษัทผลิตภัณฑ์ไทย จำกัด ได้ดังนี้

ตารางที่ 3 ตารางการคำนวณปัญหาการขนส่งของบริษัทผลิตภัณฑ์ไทย จำกัด

โกดัง โรงงาน	1	2	3	4	a_i
1	2	4	4	10	100
2	6	10	4	8	60
3	8	2	6	6	120
b_j	80	40	100	60	280

จะเห็นได้ว่าจากตารางที่ 3 จำนวนสินค้าที่โรงงานทั้งสามแห่งรวมกันเท่ากับจำนวนสินค้าที่คลังสินค้าต้องการพอดี ($\sum a_i = \sum b_j$) จึงสามารถดำเนินการขั้นตอนในการแก้ปัญหการขนส่งในขั้นตอนต่อไป คือการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นได้ แต่ในกรณีที่สินค้าที่จุดต้นทางไม่เท่ากับจำนวนสินค้าที่จุดปลายทาง จำเป็นต้องมีการปรับปรุงตารางก่อนที่จะลงมือทำการคำนวณ

กรณีที่ผลรวมของสินค้าที่จุดต้นทางน้อยกว่าผลรวมของสินค้าที่จุดปลายทาง ($\sum a_i < \sum b_j$) ตัวอย่างเช่น จากโจทย์ปัญหาเดิม ถ้าโรงงานที่หนึ่งของบริษัทผลิตภัณฑ์ไทย จำกัด ผลิต สินค้าได้ 60 หน่วย แสดงว่า จำนวนสินค้าที่บริษัทผลิตได้นั้นไม่เพียงพอแก่ความต้องการของคลังสินค้า กล่าวคือ มีสินค้าอยู่เพียง 240 หน่วย (โรงงานที่หนึ่ง 30 หน่วย โรงงานที่สอง 60 หน่วยและโรงงานที่สาม 120 หน่วย) ในขณะที่คลังสินค้าต้องการ 280 หน่วย ดังนั้นจึงต้องเพิ่มโรงงานเข้าไปอีกแห่งหนึ่งเป็นแห่งที่ 4 ซึ่งเป็นโรงงานสมมติ (dummy factory) ที่มีความสามารถผลิตสินค้าได้ 40 หน่วย ความสามารถในการผลิตสินค้าของโรงงานแห่งนี้จะเท่ากับจำนวนสินค้าที่ขาดอยู่ ทำให้ผลรวมของสินค้าที่จุดต้นทาง และจุดปลายทางเท่ากันคือ 280 หน่วย และเนื่องจากโรงงานแห่งที่ 4 เป็นโรงงานสมมติ จึงมีค่าใช้จ่ายในการส่งสินค้าไปยังคลังสินค้าต่างๆ เป็น 0 สร้างตารางในการขนส่งได้ดังตารางที่ 4 ดังนี้

ตารางที่ 4 ตารางคำนวณในกรณี ($\sum a_i < \sum b_j$)

คลังสินค้า โรงงาน	1	2	3	4	a_i
1	2	4	4	10	60
2	6	10	4	8	60
3	8	2	6	6	120
4 (dummy)	0	0	0	0	40
b_j	80	40	100	60	280

สำหรับกรณีที่ผลรวมของสินค้าที่จุดต้นทางมากกว่าผลรวมของสินค้าที่จุดปลายทาง ($\sum a_i < \sum b_j$) สามารถยกตัวอย่างได้ดังนี้ จากโจทย์ปัญหาของบริษัทผลิตภัณฑ์ไทย จำกัด ในตอนต้น ถ้าโรงงานที่ 2 มีกำลังการผลิต 80 หน่วย แทนที่จะเป็น 60 หน่วย แสดงว่าจำนวนสินค้าที่โรงงานทั้งสามผลิตได้มีเกินความต้องการ 10 พับ จึงจำเป็นต้องเติมคลังสินค้าสมมติ (dummy storage) เข้าไปอีก 1 ราย เป็นรายชื่อที่ 5 โดยให้มีความต้องการเท่ากับจำนวนสินค้าที่เกินอยู่นั้นคือ 20 หน่วย และให้มีค่าใช้จ่ายในการขนส่งสินค้าจากโรงงานต่างๆ ไปยังคลังสินค้าสมมตินี้เป็น 0 สร้างตารางปัญหาการขนส่งได้ดังตารางที่ 5 ต่อไปนี้

ตารางที่ 5 ตารางการคำนวณในกรณี ($\sum a_i > \sum b_j$)

คลังสินค้า โรงงาน	1	2	3	4	5	a_i (dummy)
1	2	4	4	10	0	100
2	6	10	4	8	0	80
3	8	2	6	6	0	120
b_j	80	40	100	60	20	300

การตั้งผลลัพท์เบื้องต้น

เมื่อได้ทำการสร้างตารางการคำนวณแล้ว ขั้นตอนต่อไปในการแก้ปัญหาการขนส่งคือ การตั้งผลลัพท์เบื้องต้น ซึ่งการตั้งผลลัพท์เบื้องต้นสามารถทำได้หลายวิธีดังนี้

- 1) วิธีมุมพายัพ (Northwest Corner Method)
- 2) วิธีแกนเหนือไปใต้ (North to South Method)
- 3) วิธีต้นทุนต่ำสุด (Least Cost Method)
- 4) ระเบียบวิธีประมาณค่าโวกเทล (Vogel Approximation Method, VAM)

ในการแก้ปัญหาการขนส่งนั้นเราสามารถเลือกใช้การตั้งผลลัพท์เบื้องต้นด้วยเพียงวิธีใดวิธีหนึ่งเท่านั้น ซึ่งในการตั้งผลลัพท์เบื้องต้นทั้ง 4 วิธีดังกล่าวจะมีขั้นตอนหลัก 2 ขั้นตอนคือ การเลือกช่องทางที่จะจัดสรรสินค้า และการกำหนดจำนวนสินค้าในช่องทางนั้น การตั้งผลลัพท์เบื้องต้นทั้ง 4 วิธีดังกล่าวจะมีความแตกต่างกันในขั้นตอนแรกคือการเลือกว่าจะจัดสรรสินค้าจากจุดต้นทางใดไปยังจุดปลายทางใดเท่านั้น ส่วนขั้นตอนที่สองจะเหมือนกัน

ต่อไปนี้จะแสดงการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีทั้ง 4 ตามลำดับดังต่อไปนี้

1) การตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีมุมพายัพ

การตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีมุมพายัพนั้นนับว่าเป็นวิธีที่ง่ายที่สุด โดยจะพิจารณาในด้านจำนวนสินค้าเท่านั้น และไม่พิจารณาในด้านการขนส่งเลย จึงทำให้รวดเร็วกว่าวิธีอื่น สรุปเป็นขั้นตอนการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีมุมพายัพได้ดังนี้

ก) เริ่มการคำนวณที่ช่องมุมบนด้านซ้ายมือ คือ ช่องที่ (1, 1)

ข) กำหนดค่า $X_{11} = \min(a_1, b_1)$

ค) หักค่า X_{11} ที่จัดสรรออกจากค่า a_1 และ b_1

ง) ถ้าค่า a เหลือ ให้เลื่อน ไปจัดสรรช่องว่างด้านขวามือ

ถ้าค่า b เหลือ ให้เลื่อน ไปจัดสรรช่องว่างข้างล่าง

จ) กำหนดค่า $X_{ij} = \min(a_i, b_j)$

ฉ) กลับไป ค)

นำข้อมูลบริษัทผลิตภัณฑ์ไทย จำกัด ในตารางที่ 5 เข้าตารางการคำนวณปัญหาการขนส่ง แล้วทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นตามขั้นตอนต่างๆ ดังนี้

ขั้นที่ 1 เริ่มคำนวณจากช่องที่ (1, 1) คือการจัดสรรสินค้าจากโรงงานที่ 1 ให้แก่โกดังที่ 1

ขั้นที่ 2 กำหนดค่า X_{11} โดยการเปรียบเทียบค่า a_1 กับ b_1 โรงงานที่ 1 มีสินค้าอยู่ 100 หน่วย ในขณะที่โกดังที่ 1 ต้องการสินค้าเพียง 80 หน่วย ดังนั้น โรงงานที่ 1 จะส่งสินค้าให้โกดังที่ 1 จำนวน 80 หน่วยใส่ 80 หน่วย ลงในช่อง (1, 1)

ขั้นที่ 3 หักจำนวนสินค้าที่จัดสรรแล้วออกจากค่า a_1 และ b_1 นั่นคือ โรงงานที่ 1 มีสินค้า 100 หน่วย ส่งให้โกดังที่ 1 จำนวน 80 หน่วย คงเหลืออีก 20 หน่วย ส่วนโกดังที่ 1 ต้องการสินค้า 80 หน่วย และได้รับจากโรงงานที่ 1 ครบแล้ว

ขั้นที่ 4 เมื่อ โรงงานที่ 1 ยังมีสินค้าเหลืออยู่อีก 20 หน่วย การคำนวณต่อไปจะเลื่อนไปยังช่องขวามือของช่อง (1, 1) คือช่องที่ (1, 2) หมายถึงเรากำลังจะพิจารณา กำหนดจำนวนสินค้าที่จะส่งจากโรงงานที่ 1 ไปยังโกดังที่ 2

ขั้นที่ 5 กำหนดค่า $X_{12} = \min(a_1, b_2) = \min(20, 40) = 20$ หน่วย

ขั้นที่ 6 ใส่ 20 ลงในช่อง (1, 2)

- ขั้นที่ 7 หักค่า a_1 และ b_2 ออกด้วย 20 เหลือค่า $a_1 = 0, b_2 = 20$ เลื่อนไปคำนวณช่องที่ (2, 2)
- ขั้นที่ 8 กำหนดค่า $X_{22} = \min(a_2, b_2) = \min(60, 20) = 20$ หน่วย ใส่ 20 ลงในช่องที่ (2, 2)
- ขั้นที่ 9 หักค่า a_2 และ b_2 ออกด้วย 20 เหลือ $a_2 = 40, b_2 = 0$ เลื่อนไปคำนวณช่องที่ (2, 3)
- ขั้นที่ 10 กำหนดค่า $X_{23} = \min(a_2, b_3) = \min(40, 100) = 40$ หน่วย ใส่ 40 ลงในช่องที่ (2, 3)
- ขั้นที่ 11 หักค่า 40 ออกจากค่า a_2 และ b_3 เหลือ $a_2 = 0, b_3 = 60$ เลื่อนไปคำนวณช่องที่ (3, 3)
- ขั้นที่ 12 กำหนดค่า $X_{33} = \min(a_3, b_3) = \min(120, 60) = 60$ หน่วย ใส่ 60 ลงในช่องที่ (3, 3)
- ขั้นที่ 13 หักค่า a_3 และ b_3 ออกด้วย 60 เหลือ $a_3 = 60, b_3 = 0$ เลื่อนไปคำนวณช่องที่ (3, 4)
- ขั้นที่ 14 กำหนดค่า $X_{34} = \min(a_3, b_4) = \min(60, 60) = 60$ หน่วย ใส่ 60 ลงในช่องที่ (3, 4)

สินค้าจากโรงงานต่างๆ จะถูกจัดสรรหมด และ โกดังทุกแห่งได้รับสินค้าตามที่ต้องการ ดังแสดงในตารางการคำนวณตารางที่ 6

ตารางที่ 6 ผลลัพธ์เบื้องต้นโดยวิธีมุมพายัพ

โกดัง โรงงาน	1	2	3	4	a_i
1	80 → 20	4	4	10	100
2	3	20 ↓ 10	40	8	60
3	8	2	60 ↓ 6	6	120
b_j	80	40	100	60	280

วิธีมุมพายัพให้ผลการจัดสรรสินค้าเบื้องต้นดังต่อไปนี้

- โรงงานที่ 1 ส่งสินค้า 80 หน่วยให้แก่โกดังที่ 1 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(80 \times 2) = 160$ บาท
- โรงงานที่ 1 ส่งสินค้า 20 หน่วยให้แก่โกดังที่ 2 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(20 \times 4) = 80$ บาท

โรงงานที่ 2 ส่งสินค้า 20 หน่วยให้แก่โกดังที่ 2 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(20 \times 10) = 200$ บาท
 โรงงานที่ 2 ส่งสินค้า 40 หน่วยให้แก่โกดังที่ 3 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(40 \times 4) = 160$ บาท
 โรงงานที่ 3 ส่งสินค้า 60 หน่วยให้แก่โกดังที่ 3 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(60 \times 6) = 360$ บาท
 โรงงานที่ 3 ส่งสินค้า 60 หน่วยให้แก่โกดังที่ 4 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(60 \times 6) = 360$ บาท
 รวมค่าใช้จ่ายในการขนส่ง = 1,320 บาท

2) การตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีแวนอนเหนือไปได้

เป็นการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นที่มีแนวความคิดว่าจะนำเอาค่าใช้จ่ายในการขนส่งของจุดต้นทางต่างๆ มาพิจารณาด้วย โดยจะจัดสรรสินค้าที่มีอยู่ในจุดต้นทางเรียงตามลำดับตั้งแต่จุดต้นทางที่ 1, 2, m มีขั้นตอนพอสรุปได้ดังนี้

- ก) เริ่มการคำนวณที่จุดต้นทางที่ 1 (แถวอนที่ 1) ก่อน เลือกช่องทางที่มีค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด
- ข) กำหนดค่า $X_{ij} = \min(a_i, b_j)$
- ค) หักค่า X_{ij} ออกจากค่า a_i และ b_j
- ง) ถ้าค่า a_i ยังเหลือ เลือกช่องทางที่มีค่าใช้จ่ายต่ำที่สุดในแถวอนเดิม ถ้าค่า a_i ถูกจัดสรรหมดไป ให้เลื่อนไปยังแถวอนถัดไป และเลือกช่องทางที่มีค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด
- จ) กลับไป ข)

ตารางที่ 7 ผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีแวนอนเหนือไปได้

โกดัง โรงงาน	1	2	3	4	a_i
1	2 80 → 20	4	4	10	100
2	6	10 60	4	8	60
3	8	2 20 → 40	6	6	120
b_j	80	40	100	60	280

การตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีนี้คำนึงถึงค่าใช้จ่ายโดยเปรียบเทียบค่าใช้จ่ายในการขนส่งสินค้าจากจุดต้นทางเดียวกัน ทั้งนี้ มีข้อจำกัดว่าต้องเริ่มจากแถวอนที่ 1 ก่อน หมายความว่า จะทำการจัดสรรสินค้าที่โรงงานที่หนึ่งผลิตได้จำนวน 100 หน่วยให้หมดเสียก่อน จึงจะเลื่อนไปจัดสรรสินค้าจากโรงงานอื่นๆ ตามลำดับ อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่าจะมีการเปรียบเทียบค่าใช้จ่าย แต่ก็เป็นการเปรียบเทียบค่าใช้จ่ายของโรงงานเดียวกันเท่านั้น มิได้พิจารณาค่าใช้จ่ายระหว่างโรงงาน เปรียบเทียบกัน และยังให้สิทธิแก่โรงงานที่หนึ่งที่จะได้รับการจัดสรรก่อนโรงงานอื่น

ด้วยวิธีแถวอนเหนือไปได้ให้ผลการจัดสรรเบื้องต้นดังนี้

โรงงานที่ 1 ส่งสินค้า 80 หน่วย ให้แก่โกดังที่ 1 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(80 \times 2) = 160$ บาท
 โรงงานที่ 1 ส่งสินค้า 20 หน่วย ให้แก่โกดังที่ 2 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(20 \times 4) = 80$ บาท
 โรงงานที่ 2 ส่งสินค้า 60 หน่วย ให้แก่โกดังที่ 3 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(60 \times 4) = 240$ บาท
 โรงงานที่ 3 ส่งสินค้า 20 หน่วย ให้แก่โกดังที่ 2 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(20 \times 2) = 40$ บาท
 โรงงานที่ 3 ส่งสินค้า 40 หน่วย ให้แก่โกดังที่ 3 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(40 \times 6) = 240$ บาท
 โรงงานที่ 3 ส่งสินค้า 60 หน่วย ให้แก่โกดังที่ 4 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(60 \times 6) = 360$ บาท
 รวมค่าใช้จ่ายในการขนส่ง = 1,120 บาท

3) การตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีต้นทุนต่ำที่สุด

เป็นการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นที่มีแนวคิดว่าจะนำเอาค่าใช้จ่ายในการขนส่งทุกๆ ช่องทางมาพิจารณาพร้อมๆ กัน โดยจะจัดสรรสินค้า ณ ช่องทางที่มีต้นทุนต่ำที่สุด ซึ่งสามารถสรุปขั้นตอนได้ดังนี้

- ก) จากจำนวนช่องทางทั้งหมด เลือกช่องทางที่มีค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด
- ข) กำหนดค่า $X_{ij} = \min(a_i, b_j)$
- ค) หักค่า X_{ij} ออกจากค่า a_i และ b_j
- ง) จากจำนวนช่องทางทั้งหมดที่ยังไม่ได้จัดสรรที่มีข้อบังคับทางด้านปริมาณของจุดต้นทาง และของจุดปลายทางยังเหลืออยู่ให้เลือกช่องทางที่มีค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด
- จ) กลับไป ข)

จากข้อมูลบริษัทผลิตภัณฑ์ไทย จำกัด ที่ได้เข้าตารางการคำนวณปัญหาการขนส่งแล้วจาก ตารางที่ 3 มาทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีต้นทุนต่ำสุดตามขั้นตอนต่างๆ ดังนี้

ขั้นที่ 1 เริ่มการคำนวณ โดยการเลือกช่องที่มีค่าใช้จ่ายต่ำที่สุดซึ่งในที่นี้มี 2 ช่อง คือช่องที่ (1, 1) และช่องที่ (3, 2) ซึ่งให้ค่าใช้จ่ายต่ำสุดที่เท่ากันซึ่งคือ 2 ดังนั้นจะเลือก ช่องใดช่องหนึ่งก็ได้จากทั้งสองช่อง ซึ่งในที่นี้จะเลือกช่องที่ (3, 2)

ขั้นที่ 2 กำหนดค่า $X_{32} = \min(120, 40) = 40$ หน่วย ใส่ 40 ลงในช่อง (3, 2)

ขั้นที่ 3 หักค่า a_3 และ b_2 ออกด้วยจำนวน 40 หน่วย เหลือค่า $a_3 = 80, b_2 = 0$ นั่นคือ โคนัดที่ 2 ได้รับสินค้าเต็มตามจำนวนที่ต้องการแล้ว

ขั้นที่ 4 เลือกช่องทางที่มีค่าใช้จ่ายต่ำสุดจากจำนวนช่องทางที่ยังไม่ได้จัดสรร ดังนั้นในที่นี้จึงเลือกช่อง (1, 1) เพราะว่ามีค่าใช้จ่ายเป็น 2 ซึ่งเป็นช่องทางที่มีค่าใช้จ่ายต่ำ ที่สุดในจำนวนช่องทางที่เหลืออยู่ทั้งหมด

ขั้นที่ 5 กำหนดค่า $X_{11} = \min(100, 80) = 80$ หน่วย ใส่ 80 ลงในช่อง (1, 1)

ขั้นที่ 6 หักค่า a_1 และ b_1 ออกด้วยจำนวน 80 หน่วย เหลือ $a_1 = 20, b_1 = 0$ นั่นคือ โคนัดที่ 1 ได้รับสินค้าเต็มตามจำนวนที่ต้องการแล้ว

ขั้นที่ 7 เลือกช่องทางที่มีค่าใช้จ่ายต่ำที่สุดจากจำนวนช่องทางที่ยังไม่ได้จัดสรรซึ่งค่าใช้จ่ายต่ำสุดของช่องทางที่ยังไม่ได้รับการจัดสรรคือ 2 ซึ่งมี 2 ช่องทางคือช่องที่ (1, 3) และช่องที่ (2, 3) สำหรับช่องทางที่ (1, 2) ซึ่งมีค่าใช้จ่ายเป็น 2 เช่นเดียวกัน แต่เราจะไม่สามารถจัดสรรการขนส่งได้อีก เพราะที่ โคนัดที่ 2 ได้รับการจัดสรร จะเหลือช่องที่ (1, 3) และช่องเต็มแล้ว ดังนั้นที่ (2, 3) จาก 2 ช่องทางนี้ เราสามารถ เลือกจัดสรรช่องทางใดก็ได้ สมมติในที่นี้เลือกช่องที่ (2, 3)

ขั้นที่ 8 กำหนดค่า $X_{23} = \min(60, 100) = 60$ ใส่ 60 ลงในช่อง (2, 3)

ขั้นที่ 9 หักค่า a_2 และ b_3 ออกด้วยจำนวน 60 หน่วย เหลือ $a_2 = 0$ นั่นคือ โรงงานที่ 2 ได้ส่งสินค้าหมดแล้ว ส่วน $b_3 = 40$

ขั้นที่ 10 เลือกจัดสรรช่องที่ (1, 3)

ขั้นที่ 11 กำหนดค่า $X_{13} = \min(20, 40) = 20$ ใส่ 20 ลงในช่อง (1, 3)

ขั้นที่ 12 หักค่า a_1 และ b_3 ออกด้วยจำนวน 20 หน่วย เหลือ $a_1 = 0$ นั่นคือ โรงงานที่ 1 ได้ส่งสินค้าหมดแล้ว ส่วน $b_3 = 20$

ขั้นที่ 13 เลือกจัดสรรช่องที่ (3, 3) หรือช่องที่ (3, 4) ก็ได้ในที่นี้จะทำการจัดสรรช่องที่

(3, 4)

ขั้นที่ 14 กำหนดค่า $X_{34} = \min(80, 60) = 60$ ใส่ 60 ลงในช่อง (3, 4)

ขั้นที่ 15 หักค่า a_3 และ b_4 ออกด้วยจำนวน 60 หน่วย เหลือ $a_3 = 20$ และ $b_4 = 0$ นั่นคือ

โกดังที่ 4 ได้รับสินค้าเต็มจำนวนที่ต้องการแล้ว

ขั้นที่ 16 เลือกจัดสรรช่องที่ (3, 3)

ขั้นที่ 17 กำหนดค่า $X_{33} = \min(20, 20) = 20$ ใส่ 20 ลงในช่องที่ (3, 3)

ขั้นที่ 18 หักค่า a_3 และ b_3 ออกด้วยจำนวน 20 หน่วย เหลือ $a_3 = 0$ นั่นคือโรงงานที่ 3

ได้จัดส่งสินค้าหมดแล้ว ส่วน $b_3 = 0$ นั่นคือโกดังที่ 3 ได้รับสินค้าเต็มตามความต้องการแล้ว

สินค้าจากโรงงานต่าง ๆ จะถูกจัดสรรจนหมด และโกดังทุกแห่งได้รับสินค้าตามที่ต้องการ ดังแสดงในตารางการคำนวณตารางที่ 8

ตารางที่ 8 ผลลัพธ์เบื้องต้นโดยวิธีต้นทุนต่ำสุด

โรงงาน \ โกดัง	1	2	3	4	a_i
1	2 80	4	4 20	10	100
2	6	10	4 60	8	60
3	8	2 40	6 20	6 60	120
b_j	80	40	100	60	280

สังเกตได้ว่า การตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีนี้ได้นำเอาค่าใช้จ่ายในการขนส่งของทุก ๆ โรงงานเข้ามาพิจารณาด้วยกัน การเลือกช่องทางที่จะจัดสรรสินค้าจะเลือกที่มีค่าใช้จ่ายต่ำที่สุดก่อน แล้วเลือกช่องทางที่มีค่าใช้จ่ายต่ำรองลงมาเป็นลำดับถัดๆ ไป จนกระทั่งได้จัดสรรค่า a หรือ b ครบตามจำนวนที่กำหนด

วิธีต้นทุนต่ำสุด ให้ผลการจัดสรรสินค้าเบื้องต้นดังต่อไปนี้

โรงงานที่ 1 ส่งสินค้า 80 หน่วยให้แก่โกดังที่ 1	มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(80 \times 2) =$	160 บาท
โรงงานที่ 1 ส่งสินค้า 20 หน่วยให้แก่โกดังที่ 3	มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(20 \times 4) =$	80 บาท
โรงงานที่ 2 ส่งสินค้า 60 หน่วยให้แก่โกดังที่ 3	มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(60 \times 4) =$	240 บาท
โรงงานที่ 3 ส่งสินค้า 40 หน่วยให้แก่โกดังที่ 2	มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(40 \times 2) =$	80 บาท
โรงงานที่ 3 ส่งสินค้า 20 หน่วยให้แก่โกดังที่ 3	มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(20 \times 6) =$	120 บาท
โรงงานที่ 3 ส่งสินค้า 60 หน่วยให้แก่โกดังที่ 4	มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(60 \times 6) =$	360 บาท
รวมค่าใช้จ่ายในการขนส่ง =		<u>1,040 บาท</u>

4) การตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยระเบียบวิธีประมาณค่าไวเกล, VAM

ระเบียบวิธีประมาณค่าไวเกลเป็นการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นที่มีการคำนวณที่ยุ่งยากกว่าวิธีอื่นๆ เป็นวิธีที่นำเอาค่าใช้จ่ายในการขนส่งของทุก ๆ โรงงานเข้ามาพิจารณาด้วยกัน มีขั้นตอนการคำนวณสรุปได้ดังนี้

- ก) คำนวณค่าแตกต่างระหว่างค่าใช้จ่าย 2 ตัว ที่ต่ำที่สุดของแต่ละแถวอน และแถวตั้ง ถ้าค่าใช้จ่ายต่ำที่สุดเท่ากัน แสดงว่าค่าแตกต่างระหว่างค่าใช้จ่าย 2 ตัวที่ต่ำที่สุดเป็น 0
- ข) เลือกแถวอนหรือแถวตั้งที่มีค่าแตกต่างสูงที่สุด ถ้ามีค่าแตกต่างสูงที่สุดเท่ากันจะเลือกแถวอนหรือแถวตั้งที่มีค่าแตกต่างสูงที่สุดใดก็ได้
- ค) เลือกช่องที่มีค่าใช้จ่ายต่ำที่สุดในแถวอนหรือแถวตั้งที่เลือกไว้ ถ้ามีค่าใช้จ่ายต่ำที่สุดมากกว่า 1 ตัวให้เลือกช่องใดก็ได้
- ง) กำหนดค่า $X_{ij} = \min(a_i, b_j)$ ลงในช่องที่เลือก
- จ) ตัดแถวอน และ / หรือ แถวตั้งที่จัดสรรค่า a_i และ / หรือ b_j หหมดแล้วออกไป
- ฉ) กลับไป ก)

จากข้อมูลของบริษัทผลิตภัณฑไทย จำกัด ตามปัญหาตัวอย่าง นำมาตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยระเบียบวิธีประมาณค่าโวลเจลตามขั้นตอนต่างๆ ตามลำดับต่อไปนี้

- ขั้นที่ 1 หาค่าแตกต่างของค่าขนส่งสองตัวที่ต่ำที่สุดของทุกแถวอน และแถวตั้ง
- ขั้นที่ 2 เลือกแถวที่มีค่าแตกต่างสูงที่สุด ตามตารางข้างต้นจะเห็นว่าค่าแตกต่างที่สูงที่สุดคือ 4 ซึ่งมี 2 ตัวคือ ค่าแตกต่างของแถวอนที่ 3 และค่าแตกต่างของแถวตั้งที่ 1 กรณีเช่นนี้ให้เลือกตัวใดก็ได้ ถ้าตามตัวอย่างข้างต้นเลือกแถวตั้งที่ 1
- ขั้นที่ 3 และเลือกช่องที่ (1, 1) เนื่องจากเป็นช่องทางที่มีค่าใช้จ่ายต่ำที่สุดในแถวตั้งที่ 1
- ขั้นที่ 4 กำหนดค่า $X_{11} = \min(a_1, b_1) = \min(100, 80) = 80$ ใส่ 80 ลงในช่องที่ (1, 1)
- ขั้นที่ 5 เมื่อมีการจัดสรรสินค้าลงในช่องใดแล้วจะต้องมีการปรับปรุงค่า a_i และ b_j ให้เหลือเท่าที่เป็นจริง จากการกำหนดค่า $X_{11} = 80$ แสดงว่าโรงงานที่ 1 จะส่งสินค้าจำนวน 80 หน่วยไปให้โกดังที่ 1 ดังนั้น โรงงานที่ 1 จะมีสินค้าเหลืออยู่เพียง 20 หน่วย ส่วนโกดังที่ 1 ซึ่งมีความต้องการเป็น 80 หน่วย จะได้รับสินค้าครบตามต้องการแล้ว จึงสามารถตัดแถวตั้งที่ 1 ออกไปได้ การคำนวณดังกล่าวแสดงไว้ในตารางที่ 9

ตารางที่ 9 ระเบียบวิธีประมาณค่าโวลเจลรอบที่ 1

โกดัง โรงงาน	1	2	3	4	a_i	ค่าแตกต่าง
1	2 80	4	4	10	100	2
2	6	10	4	8	60	2
3	8	2	6	6	120	4
b_j	80	40	100	60	280	
ค่าแตกต่าง	4	2	0	2		

จากการคำนวณรอบที่ 1 เหลือช่องทางที่จะจัดสรรได้อี 9 ช่องทางใน 3 แถวนอน 3 แถวตั้ง การเลือกว่าจะพิจารณาจัดสรรสินค้าลงไปในช่องทางใดต่อไป จะทำได้โดยย้อนกลับไปขั้นตอนที่ 1 ดังนี้

ขั้นที่ 1 คำนวณค่าแตกต่างระหว่างค่าใช้จ่ายสองตัวที่ต่ำสุดของทุกแถวแนวนอน และแถวตั้ง

ขั้นที่ 2 เลือกแถวแนวนอนที่ 2 หรือแถวแนวนอนที่ 3 ก็ได้เพราะมีค่าแตกต่างสูงสุดเท่ากัน ในตัวอย่างนี้เลือกแถวแนวนอนที่ 3

ขั้นที่ 3 เลือกช่องที่ (3, 2) เพราะเป็นช่องที่มีค่าใช้จ่ายต่ำสุดในแถวแนวนอนที่ 3

ขั้นที่ 4 กำหนดค่า $X_{32} = \min(a_3, b_2) = \min(120, 40) = 40$ หน่วย ใส่ 40 ลงในช่องที่ (3, 2)

ขั้นที่ 5 หักค่า a_3 และ b_2 ออกด้วยจำนวน 40 หน่วย เหลือ $a_3 = 80, b_2 = 0$ คัดแถวตั้งที่ 2 ออก

ตารางที่ 10 ระเบียบวิธีประมาณค่าโวลเทอรอบที่ 2

โกดัง โรงงาน	1	2	3	4	a_i	ค่าแตกต่าง
1		4	4	10		
	80				100	0
2		10	4	8		
					60	4
3		2	6	6		
		40			120	4'
b_j	80	40	100	60	280	
ค่าแตกต่าง	-	1	0	1		

เมื่อคัดแถวตั้งที่ 2 ออกไป ทำให้เหลือช่องทางที่จะจัดสรรสินค้าได้อีก 6 ช่องทางใน 3 แถวนอนและ 2 แถวตั้ง การคำนวณจะย้อนกลับมาขั้นตอนที่ 1 ใหม่ดังนี้

ขั้นที่ 1 คำนวณค่าแตกต่างของแถวแนวนอน และแถวตั้งที่เหลืออยู่

ขั้นที่ 2 เลือกแถวแนวนอนที่ 1

ขั้นที่ 3 ในแถวอนที่ 1 เลือกช่องที่ (1, 3)

ขั้นที่ 4 กำหนดค่า $X_{13} = \min(a_1, b_3) = \min(20, 100) = 20$ หน่วย ใส่ 20 ลงในช่องที่ (1, 3)

ขั้นที่ 5 หักค่า a_1 และ b_3 ออกด้วยจำนวน 20 หน่วย เหลือ $a_1 = 0, b_3 = 80$ ตัดแถวอนที่ 1 ออก

ตารางที่ 11 ระเบียบวิธีประมาณค่าโวลเทรอปที่ 3

โกดัง โรงงาน	1	2	3	4	a_i	ค่าแตกต่าง
1	80		20		100	6
2					60	4
3		40			120	0
b_j	80	40	100	60	280	
ค่าแตกต่าง	-	-	0	2		

เมื่อตัดแถวอนที่ 1 ออกจากการคำนวณ ทำให้เหลือช่องทางที่จะจัดสรรสินค้าได้อีก 4 ช่องทาง กลับไปทำขั้นตอนที่ 1 ใหม่ดังนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดค่าแตกต่างในทุกแถวอนและแถวตั้งที่เหลืออยู่

ขั้นที่ 2 เลือกแถวอนที่ 2

ขั้นที่ 3 ในแถวอนที่ 2 เลือกช่องที่ (2, 3)

ขั้นที่ 4 กำหนดค่า $X_{23} = \min(a_2, b_3) = \min(60, 80) = 60$ หน่วย

ขั้นที่ 5 หักค่า a_2 และ b_3 ออกด้วยจำนวน 60 หน่วย เหลือ $a_2 = 0, b_3 = 20$ ตัดแถวอนที่ 2 ออก

ขั้นที่ 6 เหลือช่องทางที่จะจัดสรรสินค้าอีกเพียง 2 ช่องทาง คือ ช่อง (3, 3) และช่อง (3, 4) และเนื่องจากทั้งสองช่องทางมีค่าใช้จ่ายในการขนส่งเท่ากันคือหน่วยละ 3 บาท จึงพิจารณาช่องใดก่อนก็ได้ ในที่นี้พิจารณาช่อง (3, 3) ก่อนโดยกำหนดค่า $X_{33} = 20$ หน่วย และพิจารณาช่อง (3, 4) กำหนดค่า $X_{34} = 60$ หน่วย

ตารางที่ 12 ระเบียบวิธีประมาณค่าโวลเทอรอบที่ 4

โกดัง โรงงาน	1	2	3	4	
1	80		20		
2			60	4	8
3		40	20	6	6
b_j	80	40	100	60	:
ค่าแตกต่าง	-	-	2	2	

สรุปการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยระเบียบวิธีประมาณค่าโวลเทอมีการจัดสรรสินค้าดังนี้

โรงงานที่ 1 ส่งสินค้าจำนวน 80 หน่วยให้โกดังที่ 1 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(80 \times 2) = 160$ บาท

โรงงานที่ 1 ส่งสินค้าจำนวน 20 หน่วยให้โกดังที่ 3 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(20 \times 4) = 80$ บาท

โรงงานที่ 2 ส่งสินค้าจำนวน 60 หน่วยให้โกดังที่ 3 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(60 \times 4) = 240$ บาท

โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าจำนวน 40 หน่วยให้โกดังที่ 2 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(40 \times 2) = 80$ บาท

โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าจำนวน 20 หน่วยให้โกดังที่ 3 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(20 \times 6) = 120$ บาท

โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าจำนวน 60 หน่วยให้โกดังที่ 4 มีค่าใช้จ่ายในการขนส่ง $(60 \times 6) = 360$ บาท

รวมค่าใช้จ่ายในการขนส่ง = 1,040 บาท

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นได้ว่าการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีที่ต่างกันทำให้ได้จุดเริ่มต้นการคำนวณที่ต่างกัน โดยแต่ละวิธีมีข้อได้เปรียบเสียเปรียบแตกต่างกันออกไป เช่น วิธีมุมพายเป็นวิธีที่ง่าย รวดเร็ว แต่เนื่องจากมิได้นำค่าใช้จ่ายมาพิจารณาเลยทำให้ผลลัพธ์เบื้องต้นที่ได้ห่างไกลจากผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ต้องมีการพัฒนาผลลัพธ์ใหม่หลายครั้ง ในขณะที่ระเบียบวิธีประมาณค่าโวลเกลมีขั้นตอนการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นที่ยุ่งยากใช้เวลายาว แต่เป็นวิธีที่นำค่าใช้จ่ายมาพิจารณาเปรียบเทียบกับทั้งด้านแน่นอนและแนวตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นที่ได้จึงเป็นผลลัพธ์ที่อยู่ใกล้ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด ช่วยประหยัดเวลาในขั้นตอนการพัฒนาผลลัพธ์เพื่อหาคำตอบที่เหมาะสมได้มาก

การตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์

เมื่อได้ทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นแล้ว ขั้นตอนต่อไปในการแก้ปัญหาการขนส่งคือการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ กล่าวคือทำการตรวจสอบว่าผลลัพธ์เบื้องต้นที่ได้นั้นเป็นคำตอบที่ดีที่สุดแล้วหรือยัง ถ้ายังไม่ใช่ผลลัพธ์ที่ดีที่สุดเราจะต้องทำการพัฒนาผลลัพธ์เพื่อให้ได้คำตอบที่เป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุดต่อไป

ในการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์โดยทั่วไป สามารถทำได้ 2 วิธี คือ

ก) วิธี Modified distribution method (MODI)

ข) วิธี Stepping stone method

ในที่นี้จะอธิบายเฉพาะวิธี MODI เท่านั้น

การตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ด้วยวิธี MODI

ก่อนที่จะอธิบายขั้นตอนในการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ด้วยวิธี MODI จำเป็นต้องทำความเข้าใจในเรื่องต่อไปนี้ก่อน

ตัวแปรมูลฐานและตัวแปรอมูลฐาน (basic variables and nonbasic variables) ผลลัพธ์ของปัญหาการขนส่งทุกตารางไม่ว่าจะเป็นผลลัพธ์เบื้องต้นที่ได้มาจากวิธีใดก็ตาม หรือเป็นผลลัพธ์ที่ได้รับการพัฒนาขึ้นมาใหม่ จะประกอบด้วยตัวแปร 2 ประเภท คือ ตัวแปรมูลฐาน และตัวแปรอมูลฐาน ตัวแปรมูลฐานคือตัวแปรในช่องที่มีการกำหนดค่า X_{ij} ส่วนตัวแปรอมูลฐานคือตัวแปรที่ไม่ได้มีการกำหนดค่า X_{ij} ลงในช่องนั้น แสดงว่าไม่มีการส่งสินค้าในช่องทางนั้น ค่า X_{ij} เหล่านี้จึงมีค่าเท่ากับ 0 ตัวอย่างจากตารางที่ 6 การตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นด้วยวิธีมุมพามีตัวแปรมูลฐาน 6 ตัว ได้แก่

$$X_{11} = 80 \qquad X_{23} = 40$$

$$X_{12} = 20 \qquad X_{33} = 60$$

$$X_{22} = 20 \qquad X_{34} = 60$$

และมีตัวแปรอมูลฐาน ได้แก่ $X_{13} = X_{14} = X_{21} = X_{24} = X_{31} = X_{32} = 0$

โดยปกติแล้วจำนวนตัวแปรมูลฐานในตารางผลลัพธ์ของปัญหาการขนส่งจะมีจำนวนเท่ากับ จำนวนแถวอน (m) + จำนวนแถวตั้ง (n) - 1 เสมอ เช่นตามตัวอย่างข้างต้น จุดตัดทางของสินค้าคือ โรงงาน 3 แห่ง จุดปลายทางของสินค้าคือ โกดัง 4 แห่ง จำนวนตัวแปรมูลฐาน = $3 + 4 - 1 = 6$ ตัว ซึ่งจากผลลัพธ์เบื้องต้นที่คำนวณได้ทั้ง 3 วิธีนั้น มีจำนวนตัวแปรมูลฐานครบ 6 ตัวทั้งสิ้น

สภาพย้อนสถานะ (Degeneracy)

กรณีเกิดสภาพย้อนสถานะ คือเมื่อผลลัพธ์ของปัญหาการขนส่งมีจำนวนตัวแปรมูลฐานไม่ครบ $(m+n-1)$ ตัว ทำให้การคำนวณหยุดชะงัก จำเป็นต้องมีวิธีการเฉพาะเพื่อช่วยให้การคำนวณดำเนินต่อไปจนได้ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด การคำนวณปัญหาการขนส่งอาจเกิดสภาพย้อนสถานะตั้งแต่การตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นหรือเกิดระหว่างการพัฒนาผลลัพธ์ก็ได้ วิธีการเฉพาะเพื่อช่วยให้การคำนวณดำเนินต่อไปได้เมื่อเกิดสภาพย้อนสถานะทำได้โดยการกำหนดตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งหรือหลายตัวขึ้นมาเป็นตัวแปรมูลฐาน โดยให้มีค่าเท่ากับศูนย์นั้นก็คือโดยการเติมศูนย์ลงในช่องที่ไม่มีการจัดสรร ทั้งนี้เพื่อที่จะทำให้ตัวแปรมูลฐานมีจำนวนทั้งหมดเป็น $(m+n-1)$ ตัว สำหรับการที่จะเติมศูนย์ลงในช่องว่างใดนั้น มีหลักว่าจะต้องเติมศูนย์ลงในช่องว่างที่จะทำให้การคำนวณสามารถดำเนินต่อไปจนได้ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด

สำหรับตัวอย่างในกรณีเกิดสภาพย้อนสถานะ จะได้กล่าวถึงส่วนหลังของบทนี้

วงจรปิด (closed loop)

ใช้เป็นเครื่องชี้ว่าในการจัดสรรสินค้าจำนวนหนึ่งลงไป ในช่องว่างช่องใดช่องหนึ่งโดยไม่ทำให้จำนวนสินค้าที่มีอยู่ที่จุดตัดทางที่ i (a_i) และจำนวนสินค้าที่จุดปลายทางที่ j (b_j) เปลี่ยนแปลงไปนั้น จะไปกระทบกระเทือนช่องทางที่มีการจัดสรรสินค้าไว้ก่อนแล้วช่องทางใด และกระทบกระเทือนอย่างไรบ้าง วิธีการลากวงจรปิด ทำได้ดังนี้

1) เริ่มต้นที่ช่องทางที่ต้องการปรับปรุง ลากเส้นวงจรในแนวนอนและแนวตั้ง โดยจะสามารถเปลี่ยนทิศทางเป็นตรงกันข้ามได้ ณ ช่องทางที่มีตัวเลขอยู่เท่านั้น จะได้วงจรปิดที่เริ่มต้นและสิ้นสุดที่ช่องทางเดียวกัน ซึ่งเส้นวงจรปิดไม่จำเป็นต้องอยู่ในลักษณะเส้นสี่เหลี่ยมเพียงอย่างเดียว อาจอยู่ในลักษณะเส้นหลายเหลี่ยมก็ได้

2) ใส่เครื่องหมาย +, -, +, -, ... สลับกันไป โดยเริ่มจากช่องทางที่เรากำลังพัฒนาปรับปรุงให้มีเครื่องหมาย +