

สูตรการคำนวณสำหรับคิวแบบ M/M/S ไม่จำกัดความยาวแถวคอย เพื่อการวิเคราะห์ระบบแถวคอย มีดังนี้

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{S!} \cdot \frac{(s\mu)}{(S\mu-\lambda)}}$$

$$L_q = P_0 \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s \rho}{S!(1-\rho)^2}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$P_n = P_0 \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \quad \text{เมื่อ } n \leq S$$

$$P_n = P_0 \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{S!S^{n-s}} \quad \text{เมื่อ } n \geq S$$

หมายเหตุ

$$n! = (n)(n-1)(n-2) \dots (1)$$

$$0! = 1$$

$$\text{เช่น } 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

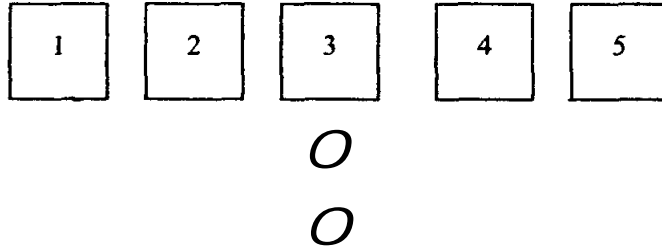
สมมติฐานของคิวแบบ M/M/S ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

$$\lambda < s\mu$$

ตัวอย่างการวิเคราะห์ด้วยคิวแบบ M/M/S ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

ตัวอย่างที่ 3

ธนาคารแห่งหนึ่งมีพนักงานรับจ่ายเงิน (Teller) 5 คน ลูกค้าเข้ามาใช้บริการเป็นแบบสุ่ม โดยเวลาที่ลูกค้าแต่ละคนเข้ามาในธนาคารโดยเฉลี่ยแล้วคือ 2.5 นาที และมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล พนักงานแต่ละคนให้บริการลูกค้าเป็นแบบสุ่มได้ในอัตราเฉลี่ย 6 คนต่อชั่วโมง โดยมีการแจกแจงแบบปัวซอง ในปัจจุบันธนาคารจัดระบบแถวคอยดังนี้



จงวิเคราะห์ระบบแถวคอยนี้

วิธีทำ

ใช้คิวแบบ M/M/S ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

หา λ

ในเวลา 2.5 นาที ลูกค้าเข้ามา 1 คน

ในเวลา 60 นาที ลูกค้าเข้ามา $\frac{1}{2.5} \times 60 = 24$ คน

$\therefore \lambda = 24$ คนต่อชั่วโมง

หา μ

โจทย์บอกมาแล้วคือ $\mu = 6$ คน/ชั่วโมง

$\therefore \lambda = 24$ คนต่อชั่วโมง

หา S

โจทย์บอกมาแล้วคือ S = 5 ช่องทาง

ตรวจสอบสมมติฐาน

$$S\mu = 5 \times 6 = 30$$

ดังนั้น $\lambda < s\mu$ เพราะว่า $24 < 30$

คำนวณตามสูตรสำหรับการวิเคราะห์

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{24}{5 \times 6} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \cdot \frac{(s\mu)}{(S\mu-\lambda)}} \\ &= \frac{1}{\sum_{n=0}^4 \frac{(\frac{24}{6})^n}{n!} + \frac{(\frac{24}{6})^5}{5!} \cdot \frac{(5 \times 6)}{(5 \times 6) - (24)}} \\ &= \frac{1}{\frac{(\frac{24}{6})^0}{0!} + \frac{(\frac{24}{6})^1}{1!} + \frac{(\frac{24}{6})^2}{2!} + \frac{(\frac{24}{6})^3}{3!} + \frac{(\frac{24}{6})^4}{4!} + \frac{(\frac{24}{6})^5}{5!} \cdot \frac{30}{6}} \\ &= \frac{1}{\frac{(4)^0}{1} + \frac{(4)^1}{1} + \frac{(4)^2}{2} + \frac{(4)^3}{6} + \frac{(4)^4}{24} + \frac{(4)^5}{5 \times 24} \cdot 5} \\ &= \frac{1}{1+4+\frac{8}{2}+\frac{32}{6}+\frac{32}{3}+\frac{128}{3}} \\ &= \frac{231}{231} = \frac{1}{77} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_q &= P_0 \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s \rho}{s!(1-\rho)^2} \\ &= \frac{3}{231} \cdot \frac{(\frac{24}{6})^5 \cdot \frac{4}{5}}{5!(1-\frac{4}{5})^2} \\ &= \frac{3}{231} \cdot \frac{(4)^5 (\frac{4}{5})}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (\frac{1}{5})^2} \\ &= \frac{3}{231} \cdot \frac{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times \frac{4}{5}}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}} \\ &= \frac{512}{231} \end{aligned}$$

≈ 2.216 คน

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= 2.216 + \frac{24}{6}$$

$$= 2216 + 4$$

$$= 6216 \text{ คน}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$= \frac{2.216}{24}$$

$$= 0.0923 \text{ ชั่วโมง}$$

$$= 5.5 \text{ นาที}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$= 0.0923 + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{0.5538+1}{6}$$

$$= \frac{1.5538}{6}$$

$$= 0.259 \text{ ชั่วโมง} = 15.5 \text{ นาที}$$

เมื่อทำการคำนวณตามสูตรต่างๆ ข้างต้นแล้ว ก็ทำการแปลความหมายด้วย ดังนี้

การให้บริการของพนักงานรับจ่ายเงินของธนาคารแห่งนี้จะมีลูกค้าอยู่ในระบบโดยเฉลี่ยประมาณ 6 คน (6.216 คน) ทั้งนี้จะมีลูกค้าโดยเฉลี่ยประมาณ 2 คน (2.216) อยู่ในแถวคอย ในขณะที่เฉลี่ยแล้วอีก 4 คน (6.216 - 2.216) กำลังรับบริการอยู่ ลูกค้าแต่ละคนที่เข้ามาใช้บริการเฉลี่ยแล้วใช้เวลาทั้งสิ้นคนละประมาณ 15.5 นาที โดยเสียเวลารออยู่ในแถวคอยเฉลี่ยคนละประมาณ 5.5 นาที ดังนั้นโดยเฉลี่ยแล้ว 1 คนจะเสียเวลาในการรับบริการ 10 นาที (15.5 - 5.5) ความน่าจะเป็นที่พนักงานรับจ่ายเงินจะไม่ว่างมีค่าเท่ากับ 0.8 ส่วนความน่าจะเป็นที่พนักงานรับจ่ายเงินจะว่างมีค่าประมาณ 0.013

การตัดสินใจเกี่ยวกับระบบแถวคอย

การตัดสินใจเกี่ยวกับระบบแถวคอย ทำได้โดยการเปรียบเทียบค่าใช้จ่ายรวมที่เกี่ยวกับระบบแถวคอยของแต่ละทางเลือก และเลือกทางเลือกที่มีค่าใช้จ่ายรวมที่เกี่ยวกับระบบแถวคอยที่ต่ำสุด

ค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวกับระบบแถวคอยมี 2 อย่าง คือ

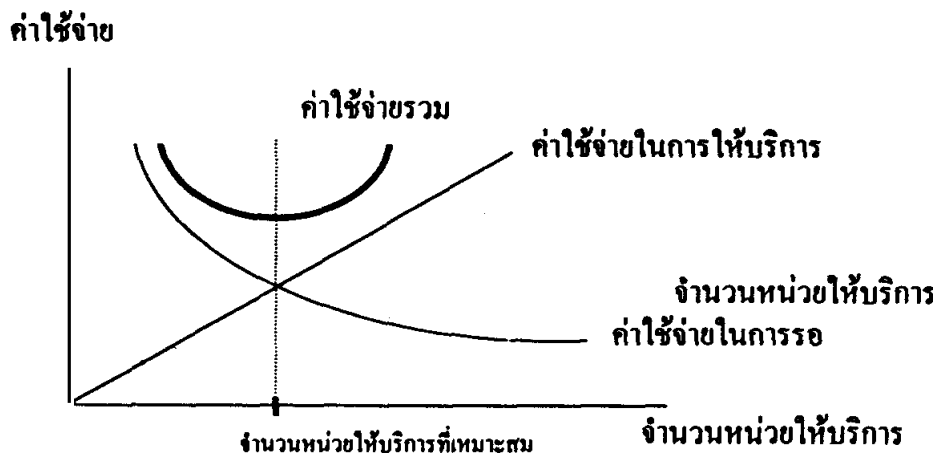
1. ค่าใช้จ่ายในการให้บริการ
2. ค่าใช้จ่ายในการรอ

1. ค่าใช้จ่ายในการให้บริการ (Service Cost) เป็นค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องกับการให้บริการตั้งแต่ค่าจ้างพนักงานให้บริการ เครื่องมือ อุปกรณ์ ค่าสถานที่ ค่าดูแลรักษาเครื่องมือ อุปกรณ์ต่างๆ ฯลฯ จะพบว่าค่าใช้จ่ายส่วนนี้จะมากขึ้น ถ้าจำนวนหน่วยให้บริการหรือผู้ให้บริการมากขึ้น

2. ค่าใช้จ่ายในการรอ (Waiting Cost) เป็นค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องกับการเสียโอกาสในการทำกำไรจากการให้บริการหรือการเสียโอกาสในการทำประโยชน์อื่นๆ ของลูกค้าในกรณีที่หน่วยให้บริการ ไม่สามารถให้บริการลูกค้าได้ทันทีทำให้ลูกค้าต้องเสียเวลาอยู่ในระบบเพื่อรับบริการ เช่น บริษัทแห่งหนึ่งมีรถแท็กซี่ให้เช่า ถ้ารถคันใดเสียจะส่งไปให้ช่างซ่อม ในกรณีที่ช่างไม่ว่าง เนื่องจากกำลังซ่อมรถคันอื่น จะต้องรอนจนกว่าจะได้รับการซ่อมรวมเวลาที่รอและรับบริการซ่อมตั้งแต่ 8.00 น. - 16.00 น. เป็นเวลา 8 ชั่วโมง ทำให้บริษัทขาดรายได้ค่าเช่าที่ควรจะได้รับเป็นเงิน 1,600 บาท หรือคิดเป็นชั่วโมงละ 200 บาท หรือนั่นก็คือค่าใช้จ่ายในการรอทั้งหมดเป็น 1,600 บาท และค่าใช้จ่ายในการรอต่อชั่วโมงเป็น 200 บาท เป็นต้น

ค่าใช้จ่ายทั้งสองประเภทมีความขัดแย้งกัน กล่าวคือ ถ้าธุรกิจจัดเตรียมผู้ให้บริการจำนวนมากค่าใช้จ่ายในการให้บริการก็จะสูง แต่ลูกค้าไม่ต้องคอยนาน ทำให้ไม่มีค่าใช้จ่ายในการรอต่ำ ในทางตรงกันข้าม ถ้าธุรกิจจัดเตรียมผู้ให้บริการจำนวนน้อย จะมีค่าใช้จ่ายในการให้บริการต่ำ แต่จะมีค่าใช้จ่ายในการรอสูง ดังนั้นค่าใช้จ่ายรวมของระบบแถวคอยจะประกอบด้วยค่าใช้จ่ายในการให้บริการบวกกับค่าใช้จ่ายในการรอหรือค่าใช้จ่ายในการเสียโอกาส เป้าหมายของธุรกิจจึงเป็นความพยายามที่จะให้เกิดความสมดุลระหว่างค่าใช้จ่ายในการให้บริการและค่าใช้จ่ายในการรอ หรือต้องการให้มีค่าใช้จ่ายรวมต่ำที่สุด และให้มีจำนวนผู้ให้

บริการที่เหมาะสม ดังแสดงความสัมพันธ์ของค่าใช้จ่าย จุดที่มีค่าใช้จ่ายรวมต่ำสุดและจำนวนผู้ให้บริการที่เหมาะสม แสดงตามรูปที่ 1



รูปที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ของค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวกับระบบแถวคอย

จากรูปที่ 1 แสดงให้เห็นว่าจำนวนหน่วยให้บริการที่ดีที่สุดคือจำนวนที่มีค่าใช้จ่ายทั้ง 2 ประเภทนี้รวมแล้วต่ำที่สุด ซึ่งค่าใช้จ่ายรวมเกี่ยวกับระบบแถวคอยสามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\text{ค่าใช้จ่ายรวม} = \text{ค่าใช้จ่ายในการให้บริการ} + \text{ค่าใช้จ่ายในการรอ}$$

$$TC = S.C_s + L.C_w$$

$$\text{หรือ } TC = S.C_s + \lambda WC_w$$

โดย S คือ จำนวนหน่วยให้บริการ

C_s คือ ค่าใช้จ่ายในการให้บริการของหน่วยให้บริการหนึ่งหน่วยต่อหนึ่งหน่วยเวลา

L คือ จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยของระบบ

C_w คือ ค่าใช้จ่ายในการรอของลูกค้า 1 คนในหนึ่งหน่วยเวลา

W คือ เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนเสียไปในระบบ

λ คือ อัตราการมารับบริการ

หมายเหตุ ในการหาสมการ TC เพื่อการตัดสินใจเกี่ยวกับระบบแถวคอย เราจะต้องพิจารณาปัญหาให้รอบคอบ ซึ่งอาจจะต้องปรับสมการ TC ให้เข้ากับสถานการณ์ เช่น ถ้า S มีมากกว่า 1 ราย และแต่ละรายมีค่า C_s ไม่เท่ากัน ในการคำนวณค่าใช้จ่ายในการให้บริการเราจะต้องคำนวณค่า $S \cdot C_s$ แยกกันในแต่ละรายแล้วนำผลคูณของแต่ละรายมารวมกันก็จะได้ค่าใช้จ่ายในการให้บริการ เป็นต้น

ตัวอย่างการนำตัวแบบแถวคอยมาใช้ในการตัดสินใจ

จากหัวข้อในตอนต้นเราได้กล่าวถึงการวิเคราะห์ระบบแถวคอย ในหัวข้อนี้เราจะได้ศึกษากันถึงการนำเอาการวิเคราะห์ระบบแถวคอยเพื่อมาใช้ในการตัดสินใจ ซึ่งการตัดสินใจเกี่ยวกับระบบแถวคอยเกิดขึ้นได้ในหลายสถานการณ์ ดังต่อไปนี้

1. การตัดสินใจกำหนดจำนวนหน่วยบริการที่เหมาะสม

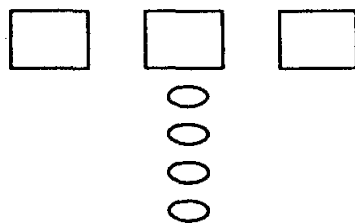
ตัวอย่างที่ 4

กิจการบริการปรึกษาเกี่ยวกับผิวหนังแห่งหนึ่ง ทำการเก็บข้อมูลพบว่าลูกค้าเข้ามาในกิจการที่กิจการมีลักษณะสุ่ม โดยมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวส์ซองในอัตราเฉลี่ย 6 คนต่อชั่วโมง กิจการแห่งนี้มีผู้เชี่ยวชาญทั้งหมด 3 คน โดยเฉลี่ยแล้วผู้เชี่ยวชาญแต่ละคนจะทำการตรวจและให้คำแนะนำลูกค้าใช้เวลาโดยเฉลี่ยต่อลูกค้า 1 คน 24 นาที โดยมีการแจกแจงเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล

กิจการแห่งนี้กำลังพิจารณาว่าควรจะมีผู้เชี่ยวชาญหรือไม่ เพื่อให้บริการลูกค้าได้ดีขึ้น และถ้าเพิ่มจะเพิ่มกี่คน ถ้าประมาณว่าค่าใช้จ่ายในการมีผู้เชี่ยวชาญ 1 คน คิดเป็นชั่วโมงละ 240 บาท ค่าเสียโอกาสของกิจการที่ลูกค้าต้องคอยคิดเป็นชั่วโมงละ 500 บาท ต่อลูกค้า 1 คน โดยที่ลูกค้าของกิจการแห่งนี้มีไม่จำกัดจำนวน พร้อมทั้งความยาวของแถวคอยมีไม่จำกัด และลูกค้าคนใดมาก่อนก็จะได้รับบริการก่อน

วิธีทำ

เดิม ระบบแถวคอยมีลักษณะ M/M/3 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย ดังนี้



ต้องตัดสินใจว่าระบบแถวคอยจะมีลักษณะเป็นแบบใดดีในบรรดา M/M/3 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย, M/M/4 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย, M/M/5 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย, M/M/6 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย,

พิจารณาทางเลือกที่ 1 คือ M/M/3 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

$$S = 3$$

$$C_s = 240 \text{ บาท/คน/ชั่วโมง}$$

$$C_w = 500 \text{ บาท/คน/ชั่วโมง}$$

$$\lambda = 6 \text{ คน/ชั่วโมง}$$

หา μ

ในเวลา 24 นาทีให้บริการลูกค้าได้ 1 คน

ในเวลา 60 นาที ให้บริการลูกค้าได้ $\frac{1}{24} \times 60$ คน = 2.5 คน

$$\therefore \mu = 2.5 \text{ คน/ชั่วโมง}$$

ตรวจสอบสมมติฐานของคิวแบบ M/M/3 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

$$\lambda < S\mu$$

$$\therefore 6 < (3)(2.5)$$

นั่นคือ $6 < 7.5$

หา L ของ M/M/3 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

$$P_0 = 0.056$$

$$\rho = 0.8$$

$$L_q = 2.58 \text{ คน}$$

$$L = 4.98 \text{ คน}$$

หา TC

$$TC = S.C_s + L.C_w$$

$$\therefore TC = (3)(240) + (4.98)(500)$$

$$= 3,210 \text{ บาท/ชั่วโมง}$$

พิจารณาทางเลือกที่ 2 คือ M/M/4 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

$$S = 4$$

$$C_s = 240 \text{ บาท/คน/ชั่วโมง}$$

$$C_w = 500 \text{ บาท/คน/ชั่วโมง}$$

$$\lambda = 6 \text{ คน/ชั่วโมง}$$

$$\mu = 2.5 \text{ คน/ชั่วโมง}$$

หา L ของ M/M/4

$$P_0 = 0.083$$

$$\rho = 0.6$$

$$L_q = 0.43 \text{ คน}$$

$$L = 2.83 \text{ คน}$$

หา TC

$$TC = S.C_s + L.C_w$$

$$\therefore TC = (4)(240) + (2.83)(500)$$

$$= 2,375 \text{ บาท/ชั่วโมง}$$

พิจารณาทางเลือกที่ 3 คือ M/M/5 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

$$S = 5$$

$$C_s = 240 \text{ บาท/คน/ชั่วโมง}$$

$$C_w = 500 \text{ บาท/คน/ชั่วโมง}$$

$$\lambda = 6 \text{ คน/ชั่วโมง}$$

$$\mu = 2.5 \text{ คน/ชั่วโมง}$$

หา L ของ M/M/5 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

$$P_0 = 0.0893$$

$$\rho = 0.48$$

$$L_q = 0.102 \text{ คน}$$

$$L = 2.502 \text{ คน}$$

หา TC

$$TC = S.C_s + L.C_w$$

$$\therefore TC = (5)(240) + (2.502)(500)$$

$$= 2,451 \text{ บาท/ชั่วโมง}$$

จะเห็นได้ว่าการมีผู้เช่าชาอู 4 คน จะมี TC ต่ำกว่าการมีผู้เช่าชาอู 3 คน และเมื่อมีผู้เช่าชาอู 5 คน TC จะสูงขึ้นกว่ามีผู้เช่าชาอู 4 คน ดังนั้นถ้ามีผู้เช่าชาอู 6 คน, 7 คน, ก็ จะยังเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ เมื่อจำนวนผู้เช่าชาอูเพิ่มขึ้น เพราะว่า TC เมื่อสูงและลดต่ำลงมาและสูง อีก TC ก็ จะสูงขึ้นเรื่อยๆ ต่อไป เมื่อจำนวนผู้เช่าชาอูเพิ่มขึ้น (บททวนความรู้เกี่ยวกับเรื่องนี้ ได้จากรูปที่ 1 ของบทนี้)

\therefore สรุปว่ากิจการควรจะมีผู้เช่าชาอูเพิ่มอีก 1 คน รวมผู้เช่าชาอูทั้งหมดที่ควรจะมี คือ 4 คน

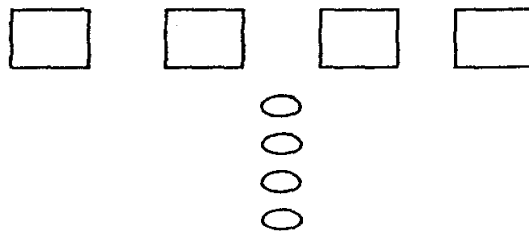
2. การตัดสินใจจัดรูปแบบแถวคอย

ตัวอย่างที่ 5

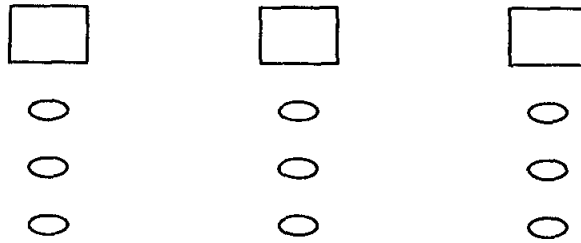
จากตัวอย่างที่ 4 ถ้ามีผู้เสนอว่ากิจการนี้จะพิจารณาจัดรูปแบบการเข้ารับบริการ ของลูกค้าเสียใหม่มากกว่าการเพิ่มผู้เช่าชาอูเป็น 4 คน โดยให้ผู้เช่าชาอูแต่ละคนมีแถวคอย ของตนเอง ท่านเห็นด้วยหรือไม่

วิธีทำ

ระบบแถวคอยที่ตัดสินใจเปลี่ยนในตัวอย่างที่ 4 มีลักษณะ M/M/4 ไม่จำกัดความ ยาวแถวคอย



ต้องการตัดสินใจว่าระบบแถวคอยควรมีลักษณะเป็น 3(M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย) ดีหรือไม่



ดังนั้นเราจึงต้องทำการเปรียบเทียบ TC ของระบบ M/M/4 ไม่จำกัดความยาวแถวคอยกับ 3(M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย)

คำนวณหา TC กรณี M/M/4 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

$$TC = 2,375 \text{ บาท/ชั่วโมง}$$

ซึ่งได้แสดงวิธีการคำนวณให้คุณแล้วในตัวอย่างที่ 4

คำนวณหา TC กรณี 3(M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย)

พิจารณา M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

$$\lambda = \frac{6}{3} = 2 \text{ คน/ชั่วโมง}$$

$$\mu = 2.5 \text{ คน/ชั่วโมง}$$

ตรวจสอบสมมติฐานของ M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

$$\text{ในที่นี้ } \lambda < \mu$$

$$\therefore 2 < 2.5$$

หา L ของ M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

$$\begin{aligned} L &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \\ &= \frac{2}{2.5 - 2} \\ &= 4 \text{ คน} \end{aligned}$$

หา TC ของ M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

$$TC = S.C_s + L.C_w$$

$$\begin{aligned}\therefore TC &= (1 \times 240) + (4 \times 500) \\ &= 2,240 \text{ บาท}\end{aligned}$$

คำนวณหา TC ของ 3(M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย)

$$\begin{aligned}\therefore TC &= 3 \times 2,240 \\ &= 6,720 \text{ บาท}\end{aligned}$$

เนื่องจาก TC ในกรณี 3(M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย) มากกว่า TC กรณี M/M/4 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าไม่ควรจัดรูปแบบแถวคอยใหม่ แต่ควรเพิ่มผู้เชี่ยวชาญ 1 คน รวมเป็นผู้เชี่ยวชาญทั้งหมด 4 คน

\therefore สรุปว่าไม่ควรจัดระบบการคอยใหม่ แต่ควรเพิ่มผู้เชี่ยวชาญ 1 คน รวมเป็นผู้เชี่ยวชาญทั้งหมด 4 คน

3. การตัดสินใจกำหนดจำนวนที่นั่งแถวคอย

ตัวอย่างที่ 6

สถานบริการแก๊สสำหรับรถยนต์แห่งหนึ่งมีหัวจ่ายน้ำมันอยู่ 1 ชุด ปัจจุบันมีที่จอดรถสำหรับรถที่จะเข้ารับบริการเติมแก๊ส 3 คัน (รวมที่สำหรับรถที่กำลังเติมแก๊สด้วย) เจ้าของสถานบริการ ได้รับรายงานจากพนักงานเติมแก๊สว่ามีบ่อยครั้งที่มียอดรถที่จะเข้าเติมแก๊สแต่เข้าไม่ได้ เพราะไม่มีที่จอด สถานบริการแห่งนี้เป็นที่เช่าและอาจเพิ่มขยายที่จอดรถได้แต่ต้องเช่าที่เพิ่มและลงทุนสร้างลานจอดรถ ซึ่งวิเคราะห์แล้วพบว่าต้องเสียต้นทุนเพิ่มวันละ 100 บาท ต่อที่จอด 1 คัน จากการเก็บข้อมูลของรถยนต์ที่เข้าเติมแก๊สพบว่า มีรถเข้ารับบริการเฉลี่ยชั่วโมงละ 7 คัน พนักงานให้บริการเติมแก๊สได้เฉลี่ยชั่วโมงละ 10 คัน ช่วงห่างระหว่างเวลาเข้ารับบริการ และเวลาในการบริการมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล ถ้ากำไรเฉลี่ยต่อรถ 1 คัน ที่เข้ารับบริการเท่ากับ 40 บาท และสถานบริการเปิดทำงานวันละ 10 ชั่วโมง จึงตัดสินใจว่าสถานบริการแก๊สแห่งนี้ควรเพิ่มที่จอดจากเดิมหรือไม่ ถ้าเพิ่มควรเพิ่มอีกกี่ที่

วิธีทำ

วิเคราะห์เพื่อการตัดสินใจโดยใช้ตัวแบบ M/M/1 จำกัดความยาวแถวคอย

ในการตัดสินใจว่าควรเพิ่มที่จอดรถหรือไม่ จะต้องวิเคราะห์ต้นทุนที่จะเพิ่มขึ้นต่อวันจากการเพิ่มที่จอดรถ และกำไรที่จะได้เพิ่ม ค่าสถิติที่สำคัญในการวิเคราะห์นี้คือ ค่าความน่าจะเป็นที่จะมีรถจอดเต็มแถวคอย ซึ่งทำให้ลูกค้าใหม่เข้ารับบริการไม่ได้ ทำให้เสียโอกาสในการทำกำไร ถ้ากำไรที่จะได้มีค่ามากกว่าต้นทุนที่จะจ่ายเพิ่มก็แสดงว่าควรเพิ่มที่จอดรถ แต่ถ้าต้นทุนที่ต้องเพิ่มอันเกิดจากการเพิ่มที่จอดรถมีค่ามากกว่ากำไรที่จะได้ก็ไม่ควรเพิ่มที่จอดรถ

$$\lambda = 7 \text{ คัน/ชั่วโมง}$$

$$\mu = 10 \text{ คัน/ชั่วโมง}$$

กรณีปัจจุบันคือ มีที่จอดรถ 3 คัน ($M = 3$)

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1 - (\lambda/\mu)}{1 - (\lambda/\mu)^{M+1}} \\ &= \frac{1 - (7/10)}{1 - (7/10)^{3+1}} \\ &= \frac{1 - (7/10)}{1 - (7/10)^4} \\ &= 0.395 \end{aligned}$$

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

$$\begin{aligned} P_3 &= 0.395 \left(\frac{7}{10} \right)^3 \\ &= 0.135 \end{aligned}$$

แสดงว่า โดยเฉลี่ยจะมีโอกาสที่รถจอดเต็มจนรถคันถัดไปไม่สามารถเข้ารับบริการได้ เป็น 0.135 หรือ 13.5% ของช่วงเวลาดำเนินการ ดังนั้นจำนวนรถที่ไม่สามารถเข้ารับบริการได้ คือ ผลคูณของชั่วโมงทำงานต่อวันกับค่าความน่าจะเป็นที่จะมีรถจอดเต็มแถวคอยคูณด้วยจำนวนเฉลี่ยของรถที่จะเข้ารับบริการต่อชั่วโมง (λ)

$$\begin{aligned} \therefore \text{จำนวนรถที่เข้ารับบริการไม่ได้ต่อวัน} &= 0.135 \times 10 \times 7 \\ &= 9.45 \text{ คัน/วัน} \end{aligned}$$

กรณีเพิ่มที่จอดรถเป็น 4 คัน ($M = 4$)

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1 - (\lambda / \mu)}{1 - (\lambda / \mu)^{M+1}} \\ &= \frac{1 - (7 / 10)}{1 - (7 / 10)^{4+1}} \\ &= \frac{1 - (7 / 10)}{1 - (7 / 10)^5} \\ &= 0.361 \end{aligned}$$

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

$$\begin{aligned} P_4 &= 0.361 \left(\frac{7}{10} \right)^4 \\ &= 0.087 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{จำนวนรถที่เข้ารับบริการไม่ได้ต่อวัน} &= 0.08 \times 10 \times 7 \\ &= 6.09 \text{ คัน/วัน} \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้าเพิ่มที่จอดรถอีก 1 คัน คือจาก 3 คัน เป็น 4 คัน จะสามารถลดจำนวนรถที่เข้ารับบริการไม่ได้ลงจากเดิม $= 9.45 - 6.09 = 3.36$ คัน/วัน ทำให้กำไรเพิ่มขึ้น $= 3.36 \times 40 = 134.4$ บาท/วัน แต่ต้นทุนการเพิ่มที่จอดรถ 1 ที่ เป็น 100 บาท/วัน ซึ่งน้อยกว่ากำไรที่จะได้เพิ่ม ดังนั้นจึงควรเพิ่มที่จอดรถจาก 3 คัน เป็น 4 คัน

ต่อไปจะต้องพิจารณาว่าควรเพิ่มที่จอดรถจาก 4 คันเป็น 5 คันหรือไม่ โดยการศึกษากรณีเพิ่มที่จอดรถเป็น 5 คัน

กรณีเพิ่มที่จอดรถเป็น 5 คัน ($M = 5$)

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{1 - (\lambda / \mu)}{1 - (\lambda / \mu)^{M+1}} \\
 &= \frac{1 - (7 / 10)}{1 - (7 / 10)^{5+1}} \\
 &= \frac{1 - (7 / 10)}{1 - (7 / 10)^6} \\
 &= 0.340
 \end{aligned}$$

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

$$\begin{aligned}
 P_5 &= 0.340 \left(\frac{7}{10} \right)^5 \\
 &= 0.057
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{จำนวนรถที่เข้ารับบริการไม่ได้ต่อวัน} &= 0.057 \times 10 \times 7 \\
 &= 3.99 \text{ คัน/วัน}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้าเพิ่มที่จอดรถจาก 4 คันเป็น 5 คัน จะลดจำนวนรถที่เข้ารับบริการไม่ได้ลงจากเดิม $= 6.09 - 3.99 = 2.1$ คัน/วัน ทำให้กำไรเพิ่มขึ้น $= 2.1 \times 40 = 84$ บาท/วัน ซึ่งน้อยกว่าต้นทุนการเพิ่มที่จอดรถอีก 1 ที่ คือ 100 บาท/วัน ดังนั้นจึงไม่ควรเพิ่มที่จอดรถจาก 4 คันเป็น 5 คัน

ดังนั้น สรุปว่าสถานบริการแก๊สสำหรับรถยนต์ควรเพิ่มที่จอดรถจาก 3 คัน เป็น 4 คัน ซึ่งจะทำให้กำไรต่อวันเพิ่มขึ้นอีก $134.4 - 100 = 34.4$ บาท/วัน

4. การตัดสินใจลักษณะอื่นๆ

นอกเหนือจากการตัดสินใจใน 3 ลักษณะข้างต้นที่ได้อธิบายมาแล้ว ผู้บริหารยังสามารถใช้ข้อมูลจากการวิเคราะห์ระบบแถวคอยในการตัดสินใจลักษณะอื่นๆ เช่น ตัดสินใจเลือกพนักงานให้บริการ กำหนดประสิทธิภาพในการให้บริการของหน่วยบริการ เลือกชนิดของอุปกรณ์ในการให้บริการ เป็นต้น

แบบฝึกหัด

- ข้อ 1. คำนับเก็บเงินค่าผ่านทางแห่งหนึ่ง มีพนักงานเก็บเงินค่าผ่านทาง 1 คน ทำหน้าที่เก็บเงินค่าผ่านทาง จากสถิติในอดีตพบว่า เวลาในการเก็บเงินค่าผ่านทางมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล เฉลี่ยคันละ 30 วินาที ระยะเวลาห่างของรถยนต์ที่วิ่งผ่านด่านมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล มีอัตราเฉลี่ย 60 คัน/ชั่วโมง
- 1.1 จงวิเคราะห์ระบบแถวคอยโดยคำนวณค่าทางสถิติต่าง ๆ ของระบบแถวคอย พร้อมทั้งแปลความหมายค่าทางสถิติต่างๆ ที่ได้คำนวณไว้
 - 1.2 จงคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่จะมีรถยนต์ 3 คัน ในระบบแถวคอย
 - 1.3 จงคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่จะมีรถยนต์ น้อยกว่าหรือเท่ากับ 3 คันในระบบแถวคอย
- ข้อ 2. สถานีบริการน้ำมันแห่งหนึ่งมีหัวจ่ายน้ำมันดีเซลอยู่ 1 หัวจ่าย รถยนต์ที่ใช้ น้ำมันดีเซลเข้ามาใช้บริการโดยเฉลี่ยชั่วโมงละ 8 คัน โดยเวลาห่างระหว่างเวลาที่เข้ารับบริการมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล เวลาในการให้บริการมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลด้วยเวลาเฉลี่ยคันละ 5 นาที สถานีบริการมีที่จอดรถคอยรับบริการได้ไม่เกิน 4 คัน (รวมรถที่อยู่ ในระหว่างรับบริการด้วย) จงคำนวณค่าสถิติต่าง ๆ ของตัวแบบแถวคอยพร้อมทั้งแปลความหมาย และคำนวณค่าความน่าจะเป็นเท่าใด ที่มีรถจอดรับบริการจนเต็มจนทำให้รถคันหลังไม่สามารถเข้ารับบริการได้
- ข้อ 3. ห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งมีแคชเชียร์คิดเงิน 3 ช่องทาง ลูกค้าที่ซื้อสินค้าเข้ามาจ่ายเงินเฉลี่ย 50 คนต่อชั่วโมง โดยเวลาห่างระหว่างเวลาที่เขาจ่ายเงินมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล เวลาในการคิดเงินของแคชเชียร์มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลด้วยเวลาเฉลี่ยคนละ 3 นาที จงคำนวณค่าทางสถิติต่าง ๆ ของตัวแบบแถวคอย พร้อมทั้งแปลความหมายและคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้า 2 คนในระบบ และ 4 คนในระบบ

ข้อ 4. สำนักงานแห่งหนึ่งเช่าเครื่องถ่ายเอกสารรุ่น DX-60 ในค่าเช่าวันละ 150 บาท ซึ่งมีความเร็วในการถ่ายเอกสารให้บริการแก่พนักงานฝ่ายต่าง ๆ โดยเฉลี่ยชั่วโมงละ 12 ราย ในขณะที่พนักงานมาขอรับบริการถ่ายเอกสารเฉลี่ยชั่วโมงละ 8 ราย จากการสังเกตของผู้จัดการพบว่าในแต่ละวันจะมีพนักงานมาเสียเวลากับการรอคอยถ่ายเอกสารจำนวนมาก ซึ่งเขาประเมินว่า ค่าจ้างพนักงานที่มารอคอยถ่ายเอกสารคิดเป็นชั่วโมงละ 20 บาทต่อคน จากปัญหาดังกล่าวเขาจึงคิดจะเปลี่ยนเครื่องถ่ายเอกสารเป็นเครื่องที่เร็วกว่าเดิม ผู้ให้เช่าเครื่องได้เสนอราคาค่าเช่าเครื่องที่มีความเร็วเพิ่มขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับเครื่องปัจจุบัน โดยมีราคาค่าเช่าคิดเป็นต่อวันทำงาน ดังแสดงต่อไปนี้

เครื่องรุ่น	ให้บริการเฉลี่ยได้ (คน/ชั่วโมง)	ราคาค่าเช่า (บาท/วัน)
DX-60*	12	150
DX-90	24	250
DX-100	30	300

*DX-60 เป็นรุ่นที่ใช้ในปัจจุบัน

ถ้าอัตราการเข้ามาขอรับบริการถ่ายเอกสารมีการแจกแจงแบบปัวส์ซง และเวลาการให้บริการถ่ายเอกสารมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล ผู้จัดการควรตัดสินใจเลือกเช่าเครื่องถ่ายเอกสารรุ่นใดจึงจะเสียค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด สมมติว่า 1 วัน มีการทำงาน 8 ชั่วโมง

ข้อ 5. ถ้าสำนักงานดังกล่าวในข้อ 4 ซึ่งมีปัญหามีพนักงานรอคอยในการถ่ายเอกสารจำนวนมาก ถ้าบริษัทที่ให้เช่าเครื่องถ่ายเอกสารไม่มีเครื่องรุ่นอื่น นอกจากรุ่น DX-60 ซึ่งถ้าสำนักงานแห่งนี้จะเช่าเพิ่มเครื่องที่สอง บริษัทจะคิดค่าเช่าเพียงวันละ 130 บาท สำหรับเครื่องที่สอง และถ้าจะเช่าเครื่องที่สามเพิ่ม ก็จะใช้ค่าเช่าเพียง 100 บาท/วัน สำหรับเครื่องที่สาม จงวิเคราะห์ว่าสำนักงานแห่งนี้ควรเช่าเครื่องถ่ายเอกสารเพิ่มเป็นกี่เครื่อง

ข้อ 6. นายแดงได้วางโครงการไว้ว่าจะเปิดบริการล้างรถ โดยคาดว่าลูกค้าจะนำรถเข้ามารับบริการโดยเฉลี่ย 1 คันต่อ 8 นาที โดยมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล เว้นเสียแต่ว่าบริเวณที่จอดรถรอรับบริการจะเต็ม ลูกค้าจึงจะขับรถออกไปรับบริการจากที่อื่น และเวลาที่ใช้ในการล้างรถมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลด้วยค่าเฉลี่ย 6 นาที จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกค้าจะต้องนำรถไปรับบริการจากที่อื่น ถ้ามีเนื้อที่สำหรับให้รถจอดรถรอรับบริการ (ไม่รวมถึงรถที่กำลังรับบริการอยู่) ดังข้อย่อยต่อไปนี้

6.1 0 คัน

6.2 2 คัน

6.3 4 คัน

ข้อ 7. ร้านตัดผมแห่งหนึ่งมีลูกค้าเข้ามารับบริการในรูปแบบการแจกแจงแบบปัวส์ซองในอัตราเฉลี่ย 1.5 คน/ชั่วโมง ในร้านมีช่างตัดผม 1 คน ตัดผมเฉลี่ยหัวละ 0.5 ชั่วโมง โดยมีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง และมีเก้าอี้ให้นั่งรวม 3 ตัว ถ้าลูกค้าใหม่มาแล้วพบว่าลูกค้าเต็มร้านก็จะไปตัดร้านอื่นและจะไม่กลับมาอีก ถ้าร้านได้กำไรหัวละ 30 บาท ทางร้านจะมีค่าเสียโอกาสชั่วโมงละเท่าใด

ข้อ 8. จากตัวอย่างที่ 6 ถ้าค่าเช่าที่จอดรถที่จะทำเพิ่มคิดเพียงวันละ 75 บาท จงวิเคราะห์ว่าควรเพิ่มที่จอดรถเป็น 6 คัน หรือไม่