

## บทที่ 7

### ตัวแบบแถวคอย

#### ในบทนี้ประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

- โครงสร้างของระบบแถวคอย
- ลักษณะของระบบแถวคอย
- ลักษณะของลูกค้า
- ลักษณะของหน่วยบริการของระบบแถวคอย
- สัญลักษณ์ที่ใช้ในตัวแบบแถวคอย
- ตัวแบบแถวคอยพื้นฐานที่ทำการศึกษา
- ตัวแบบ M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย
- ตัวแบบ M/M/1 จำกัดความยาวแถวคอย
- ตัวแบบ M/M/S ไม่จำกัดความยาวแถวคอย
- การตัดสินใจเกี่ยวกับระบบแถวคอย
- ตัวอย่างการนำตัวแบบแถวคอยมาใช้ในการตัดสินใจ
- แบบฝึกหัด

## บทที่ 7

### ตัวแบบแถวคอย

ตัวแบบแถวคอยเป็นเทคนิควิเคราะห์เชิงปริมาณที่ใช้กันมานานและแพร่หลายมากที่สุดตัวแบบหนึ่ง แถวคอยเป็นสิ่งที่เกิดขึ้นในทุกๆ วันและคนเราทุกคนก็จะประสบกับแถวคอยด้วยตนเองกันมาแล้วทั้งสิ้น เช่น เข้าคิวเพื่อรอที่จะโทรศัพท์สาธารณะ เข้าคิวเพื่อรอชำระเงินกับแคชเชียร์ในห้างสรรพสินค้า เข้าคิวเพื่อซื้อตัวชมภาพยนตร์ เป็นต้น นอกจากคนแล้วยังมีสิ่งอื่นๆ ที่จะต้องมีแถวคอยด้วยเช่นกัน ตัวอย่างเช่น เครื่องจักรที่รอรับการซ่อมแซม

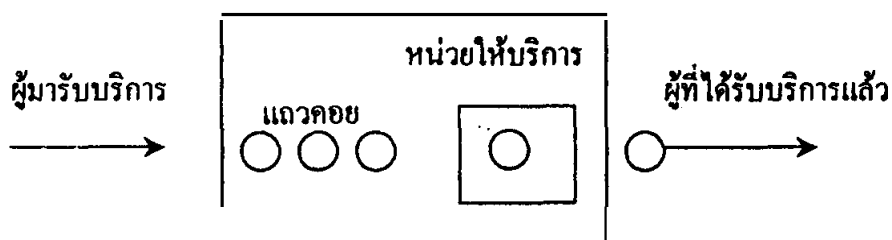
ในบทนี้เราจะได้ทำการศึกษาถึง การนำตัวแบบแถวคอยมาใช้ในการวิเคราะห์ระบบแถวคอยและการตัดสินใจเพื่อเลือกทางเลือกที่ดีที่สุดเกี่ยวกับระบบแถวคอย

#### โครงสร้างของระบบแถวคอย

ระบบแถวคอย (queuing system) หนึ่งๆ จะประกอบด้วยส่วนประกอบที่สำคัญ 2 ส่วน คือ

- 1) แถวคอย
- 2) หน่วยให้บริการ

ซึ่งสามารถแสดงรูปของระบบแถวคอยได้ดังนี้



รูปที่ 1 แสดงโครงสร้างของระบบแถวคอย

ในการวิเคราะห์ระบบแถวคอย เราจะต้องแยกแยะส่วนประกอบต่างๆ ของระบบแถวคอยนั้นออกให้ชัดเจน เพื่อที่จะให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับโครงสร้างของระบบแถวคอย จึงขอยกตัวอย่างของระบบแถวคอยต่างๆ ดังนี้

ตารางที่ 1 ตัวอย่างระบบแถวคอย

ระบบ	ผู้มารับบริการ (ลูกค้า)	หน่วยให้บริการ	ลักษณะการบริการ	ผู้ที่ได้รับบริการแล้ว
คลินิกแพทย์	ผู้ป่วย	แพทย์	การรักษา	ผู้ป่วยที่ได้รับการตรวจรักษาแล้ว
ธนาคาร	ลูกค้า	พนักงาน	ถอน/ฝาก/กู้/โอน/ ฯลฯ	ลูกค้าที่ได้รับบริการแล้ว
แผนกซ่อมเครื่องจักร	เครื่องจักรที่ขัดข้อง	ช่าง	ซ่อมแซมเครื่องจักร	เครื่องจักรที่ซ่อมแล้ว
ด่านเก็บเงินทางด่วน	รถยนต์	พนักงานเก็บเงิน	เก็บเงินค่าผ่านทาง	รถยนต์ที่จ่ายค่าผ่านทางแล้ว

จากตัวอย่างระบบแถวคอยจะเห็นได้ว่า ผู้มารับบริการหรือลูกค้า ไม่จำเป็นจะต้องเป็นคนหรือสิ่งที่มีชีวิต อาจจะเป็นสิ่งที่ไม่มีชีวิตก็ได้ เช่น เครื่องจักรที่ขัดข้อง รถยนต์ ดันฉับเอกสาร เป็นต้น

ในการศึกษาตัวแบบแถวคอยนั้นจะศึกษาในลักษณะที่ผู้เรียนเป็น เจ้าของระบบแถวคอย มิใช่เป็นลูกค้า เจ้าของระบบย่อมต้องการที่จะให้บริการแก่ลูกค้าให้ดีที่สุดเท่าที่จะทำได้ โดยใช้ทรัพยากรให้เป็นประโยชน์อย่างเต็มที่

เมื่อเราสามารถระบุส่วนประกอบที่สำคัญของระบบแถวคอยได้แล้ว ดังในตารางที่ 1 ต่อไปเราจำเป็นต้องรู้จักระบบนั้น ๆ ในรายละเอียดมากขึ้น นั่นคือ ต้องทราบลักษณะพื้นฐานที่

สำคัญของระบบแถวคอยนั้นๆ คือ ลักษณะของระบบแถวคอย ลักษณะของลูกค้า และ ลักษณะของหน่วยให้บริการ

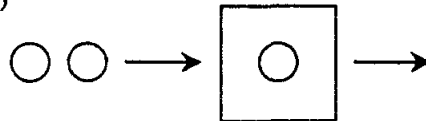
### ลักษณะของระบบแถวคอย

ในการศึกษาลักษณะของระบบแถวคอย จะศึกษาใน 3 ประเด็น คือ รูปแบบของระบบ ระเบียบการให้บริการ และความยาวของแถวคอย

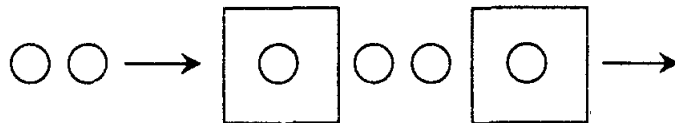
#### 1. รูปแบบของระบบ

รูปแบบของระบบแถวคอย สามารถสรุปแบ่งออกได้เป็น 4 รูปแบบใหญ่ๆ ตามลักษณะขั้นตอนการให้บริการ และจำนวนหน่วยให้บริการ ดังนี้

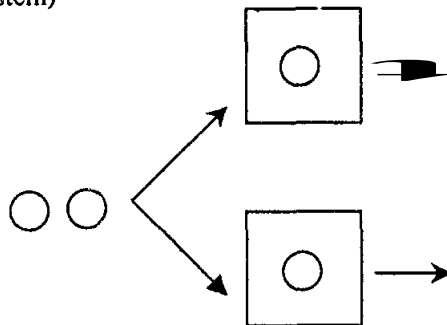
1) ระบบแถวคอยแบบช่องทางเดียว - ขั้นตอนเดียว (single channel - single phase system)



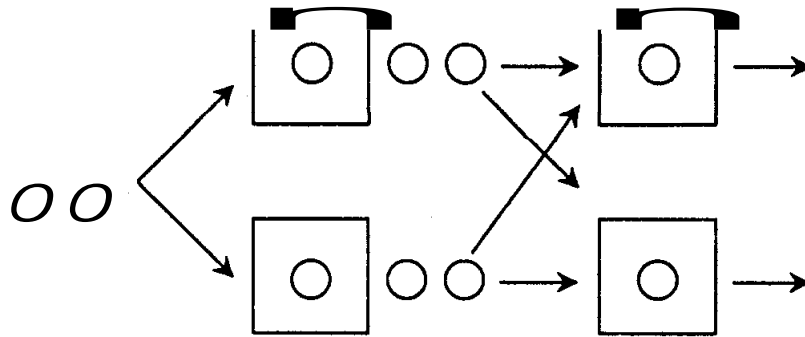
2) ระบบแถวคอยแบบช่องทางเดียว - หลายขั้นตอน (single channel - multiple phase system)



3) ระบบแถวคอยแบบหลายช่องทาง - ขั้นตอนเดียว (multiple channel - single phase system)



4. ระบบแถวคอยแบบหลายช่องทาง - หลายขั้นตอน (Multiple channel - multiple phase system)



ในการใช้ตัวแบบแถวคอยเราจะต้องพิจารณาว่าแถวคอยที่เราศึกษาอยู่นั้นมีรูปแบบเป็นแบบใด ในที่นี้จะเรียนเฉพาะรูปแบบที่ 1 และรูปแบบที่ 3 เท่านั้น

2. ระเบียบการให้บริการ

ระเบียบการให้บริการ หมายถึง กฎเกณฑ์ที่ระบบนั้นใช้ในการกำหนดว่าจะให้บริการแก่ลูกค้ารายใดก่อนรายใดหลัง เราจะต้องพิจารณาว่าระบบแถวคอยที่เรากำลังศึกษาอยู่มีระเบียบการให้บริการแบบใด เช่น

- 1) ลูกค้าที่มาก่อนได้รับบริการก่อน (first come first serve, FCFS)
- 2) ลูกค้าที่มาทีหลังจะได้รับบริการก่อน (last come first serve, LCFS)
- 3) ลูกค้าที่มีความจำเป็นมากกว่าจะได้รับบริการก่อน

3. ความยาวของแถวคอย

ความยาวของแถวคอยพิจารณาได้จากพื้นที่ในระบบแถวคอยว่ามีจำกัดหรือไม่ ซึ่งแบ่งได้เป็น 2 ลักษณะ คือ

- 1) ความยาวของแถวคอยจำกัด หมายถึง พื้นที่ในระบบแถวคอยมีจำกัด ทำให้จำนวนลูกค้าที่อยู่ในแถวคอยมีจำนวนจำกัด
- 2) ความยาวของแถวคอยไม่จำกัด หมายถึง พื้นที่ในระบบแถวคอยมีไม่จำกัด ทำให้จำนวนลูกค้าที่อยู่ในแถวคอยมีจำนวนไม่จำกัด

ในการศึกษาโดยใช้ตัวแบบแถวคอยเราจะต้องพิจารณาว่าความยาวของแถวคอย จำกัดหรือไม่จำกัด

### ลักษณะของลูกค้า

ลูกค้าของระบบแถวคอยคือบุคคลหรือสิ่งต่างๆ ที่จะเข้ามาใช้บริการในระบบ ซึ่งจะพิจารณาในประเด็นต่างๆ ดังต่อไปนี้

#### 1. จำนวนประชากร

จำนวนประชากร (population) คือผู้ที่มีโอกาสจะเข้ามาใช้บริการในระบบ ซึ่งแบ่งได้ 2 อย่างคือ

- 1) จำนวนประชากรมีจำนวนไม่จำกัด เช่น โรงภาพยนตร์ โรงพยาบาล ธนาคาร เป็นต้น
- 2) จำนวนประชากรมีจำนวนจำกัด เช่น แผนกซ่อมรถยนต์ของบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งมีรถยนต์อยู่ในบริษัทอยู่เพียง 20 คัน เป็นต้น

ในการวิเคราะห์ระบบแถวคอยต่างๆ ต้องสามารถระบุให้ได้ว่าประชากรของระบบนั้นมีระบบจำนวนจำกัดหรือไม่จำกัด

#### 2. ลักษณะการเข้ามาใช้บริการ

ลักษณะการเข้ามาใช้บริการ (arrival characteristic) ของลูกค้า แบ่งได้เป็น 2 แบบคือ

- 1) การเข้ามาใช้บริการในอัตราคงที่ หมายถึงลูกค้าเข้ามาในระบบในลักษณะสม่ำเสมอ เช่น ลูกค้าเข้ามาในระบบ 10 คนทุกๆ ชั่วโมง หรือลูกค้าเข้ามาในระบบทุกๆ 6 นาที
- 2) การเข้ามาใช้บริการในแบบสุ่ม หมายถึงลูกค้าเข้ามาในระบบในลักษณะที่ไม่แน่นอนสม่ำเสมอไม่สามารถทราบได้ล่วงหน้า และการเข้ามาของลูกค้าแต่ละรายเป็นอิสระต่อกัน ในการวิเคราะห์จำเป็นต้องใช้ค่าเฉลี่ยของการเข้ามาใช้บริการ ทั้งนี้ต้องศึกษาการแจกแจงความน่าจะเป็นของการเข้ามาใช้บริการด้วยว่าเป็นแบบใด

การเก็บข้อมูลการเข้ามาใช้บริการของลูกค้าทำได้ 2 ลักษณะ คือ

- อัตราการเข้ารับบริการ (arrival rate) คือ ลูกค้าเข้ามาใช้บริการโดยเฉลี่ยกี่คนในหนึ่งหน่วยเวลา เช่น รถที่เข้ามาใช้บริการล้างอัดฉีดโดยเฉลี่ยแล้ว 10 คันต่อชั่วโมง

เวลา - เวลาระหว่างการเข้ามารับบริการ (arrival time interval) คือ เวลาห่างโดยเฉลี่ยระหว่างลูกค้าแต่ละคนที่เข้ามาในระบบ เช่น โดยเฉลี่ยแล้วรถแต่ละคันเข้ามารับบริการล้างอัดฉีดห่างกัน 6 นาที

เรามักนิยมเก็บข้อมูลในลักษณะแบบแรกมากกว่า และในการคำนวณเพื่อการวิเคราะห์จะใช้ข้อมูลในลักษณะแบบแรกเช่นเดียวกัน

ระบบแถวคอยส่วนใหญ่จะมีลักษณะการมารับบริการเป็นแบบสุ่มโดยที่อัตราการเข้ามารับบริการมีการแจกแจงเป็นแบบปัวส์ซง หรือเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล

### 3. พฤติกรรมของลูกค้าส่วนใหญ่ของระบบ

พฤติกรรมของลูกค้าที่เข้ามาในระบบ สามารถแบ่งได้ออก 2 ลักษณะ คือ

1) ลูกค้ามีความอดทนในการรอ ลูกค้าจะอดทนในการรอในระบบจนกว่าจะได้รับบริการ

2) ลูกค้าไม่มีความอดทนในการรอ ลูกค้าจะเปลี่ยนใจไม่รับบริการในระบบเมื่อเห็นว่าแถวคอยยาวเกินไป หรือเปลี่ยนไปใช้บริการในระบบอื่นเมื่อรอได้ระยะเวลาหนึ่ง

ตัวแบบแถวคอยส่วนใหญ่มีสมมติฐานว่าลูกค้าจะรอนจนกว่าจะได้รับบริการ

### ลักษณะของหน่วยบริการของระบบแถวคอย

ลักษณะของหน่วยบริการของระบบแถวคอยสามารถพิจารณาได้จากอัตราการให้บริการ (service rate) ซึ่งแบ่งได้ 2 ลักษณะ คือ

1. อัตราการให้บริการแบบคงที่ หมายถึงในการให้บริการลูกค้าแต่ละรายใช้เวลาเท่าๆ กัน ดังนั้นในแต่ละหน่วยเวลาให้บริการลูกค้าได้เท่ากัน เช่น ปัดผงซักฟอกแต่ละขวดใช้เวลา 2 วินาทีเท่ากัน ดังนั้นอัตราการให้บริการจะคงที่นาทีละ 30 ขวด

2. อัตราการให้บริการแบบสุ่ม หมายถึง การให้บริการลูกค้าแต่ละรายใช้เวลาไม่เท่ากัน ดังนั้นในแต่ละ 1 หน่วยเวลาให้บริการลูกค้าได้ไม่เท่ากัน เช่น แคนเชียร์คิดเงินลูกค้าบางรายใช้เวลา 2 นาที และคิดเงินลูกค้าบางรายใช้เวลาถึง 10 นาที ดังนั้น ในการวิเคราะห์ระบบแถวคอยต้องใช้ค่าเฉลี่ย การบริการ โดยจะต้องทราบการแจกแจงของข้อมูลการให้

บริการด้วย การเก็บข้อมูลในด้านการให้บริการ มักจะอยู่ในรูปของเวลาที่ใช้ในการให้บริการ (service time) มากกว่าอัตราการให้บริการ (service rate) แต่ในการวิเคราะห์ระบบแถวคอยจำเป็นต้องใช้ข้อมูลในลักษณะอัตราการให้บริการ ดังนั้นจึงต้องเปลี่ยนข้อมูลจากเวลาที่ใช้ในการให้บริการเป็นอัตราการให้บริการ เช่น ข้อมูลที่เก็บได้คือ โดยเฉลี่ยแล้วให้บริการลูกค้า 1 คน ใช้เวลา 6 นาที และการแจกแจงข้อมูลเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล เราสามารถเปลี่ยนข้อมูลดังกล่าวเป็นอัตราการให้บริการ ได้ดังนี้

ใน 6 นาที ให้บริการลูกค้าได้ 1 คน

ใน 60 นาที ให้บริการลูกค้าได้  $\frac{1}{6} \times 60 = 10$  คน

ดังนั้นจะได้ อัตราการให้บริการเท่ากับ 10 คนต่อชั่วโมง และมีการแจกแจงแบบปัวส์ซง

ระบบแถวคอยส่วนใหญ่จะมีเวลาที่ใช้ในการให้บริการเป็นแบบสุ่มโดยมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล

### สัญลักษณ์ที่ใช้ในคิวแบบแถวคอย

$\lambda$  (อ่านว่า เลมดา) = อัตราการเข้ามารับบริการ (จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่เข้ามารับบริการในหนึ่งหน่วยเวลา) เช่น 5 คนต่อชั่วโมง

$\mu$  (อ่านว่า มิว) = อัตราการให้บริการ (จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่หน่วยบริการให้บริการได้ในหนึ่งหน่วยเวลา) เช่น 8 คนต่อชั่วโมง

หนึ่งหน่วยเวลาของ  $\lambda$  และ  $\mu$  จะต้องเหมือนกัน เช่น ต่อชั่วโมงเหมือนกันทั้ง  $\lambda$  และ  $\mu$  หรือ ต่อวันทั้ง  $\lambda$  และ  $\mu$

$\frac{1}{\mu}$  = เวลาโดยเฉลี่ยที่ใช้ในการบริการลูกค้า 1 ราย

$\rho$  (อ่านว่า โรห) = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงาน หรือความน่าจะเป็นที่ระบบจะไม่ว่าง

$P_0$  = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง

$P_n$  = ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า  $n$  รายในระบบ



- L = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบ
- $L_q$  = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในแถวคอย
- W = เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนเสียไปในการรับบริการในระบบ (ได้แก่เวลาที่ลูกค้ารออยู่ในแถวคอย รวมกับเวลาที่ได้รับการบริการ)
- $W_q$  = เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนเสียไปในการ รออยู่ในแถวคอยก่อนได้รับการบริการ

### ตัวแบบแถวคอยพื้นฐานที่ทำการศึกษา

ในบทนี้จะทำการศึกษารูปแบบแถวคอยพื้นฐาน 3 รูปแบบ คือ

1. รูปแบบ M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย
2. รูปแบบ M/M/1 จำกัดความยาวแถวคอย
3. รูปแบบ M/M/S ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

### รูปแบบ M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

ลักษณะของระบบแถวคอยที่ใช้รูปแบบ M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอยในการวิเคราะห์ มีดังนี้

1. มีจำนวนประชากรไม่จำกัด
2. อัตราการมารับบริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง หรือเวลาห่างระหว่างการเข้ามารับบริการของลูกค้าแต่ละรายเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล
3. เวลาในการให้บริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล หรืออัตราการให้บริการเป็นแบบสุ่มมีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง
4. ระเบียบการให้บริการเป็นแบบมาก่อนได้รับการก่อน
5. ไม่จำกัดความยาวของแถวคอย
6. รูปแบบของระบบแถวคอยเป็นแบบช่องทางเดียว - ชั้นตอนเดียว (single channel – single phase system)

สูตรการคำนวณสำหรับคิวแบบ M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย เพื่อการวิเคราะห์ระบบแถวคอย มีดังนี้

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$P_{(\leq n)} = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

สมมติฐานของคิวแบบ M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

อัตราการมารับบริการน้อยกว่าอัตราการให้บริการ หรือ  $\lambda < \mu$

ตัวอย่างการวิเคราะห์ด้วยคิวแบบ M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

ตัวอย่างที่ 1

ร้านถ่ายเอกสารแห่งหนึ่งมีเครื่องถ่ายเอกสาร 1 เครื่อง ให้บริการแบบมาก่อนได้รับบริการก่อน ลูกค้าที่เข้ามาเพื่อถ่ายเอกสารจะเข้ามาเป็นแบบสุ่มในอัตราเฉลี่ยนาทีละ 2 คน โดยมีการแจกแจงแบบปัวซอง ถ้าเวลาที่พนักงานประจำเครื่องถ่ายเอกสารให้บริการลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลด้วยค่าเฉลี่ย  $\frac{1}{4}$  นาทีต่อคน จงวิเคราะห์ระบบแถวคอยของร้านถ่ายเอกสารแห่งนี้

## วิธีทำ

ใช้คิวแบบ M/M/1 ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

หา  $\lambda$

ใจทย์บอกมาแล้ว คือ  $\lambda = 2$  คน/นาที

หา  $\mu$

เวลา  $\frac{1}{4}$  นาที ให้บริการลูกค้าได้ 1 คน

$\therefore$  เวลา 1 นาที ให้บริการลูกค้าได้  $\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$  คน

$\therefore \mu = 4$  คน/นาที

ตรวจสอบสมมติฐาน

ในที่นี้  $\lambda < \mu$

$\therefore 2 < 4$

คำนวณตามสูตรสำหรับการวิเคราะห์

$$\begin{aligned} L &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \\ &= \frac{2}{4 - 2} = 1 \text{ flu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_r &= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \\ &= \frac{(2)^2}{(4)(4 - 2)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ คน} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\mu - \lambda} \\ &= \frac{1}{4 - 2} = \frac{1}{2} \text{ นาที} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \\ &= \frac{2}{(4)(4 - 2)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ นาที} \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 - \frac{\lambda}{\mu} \\ &= 1 - \frac{2}{4} = 0.5 \end{aligned}$$

เมื่อคำนวณตามสูตรการวิเคราะห์เสร็จแล้ว ก็ทำการอธิบายตัวเลขที่ได้จากการคำนวณ ดังนี้

โดยเฉลี่ยแล้วจะมีลูกค้า 1 คน อยู่ในระบบ โดย 1/2 คน รออยู่ในแถวคอย ในขณะที่อีก 1/2 คน (1-1/2) กำลังรับบริการอยู่ ลูกค้าแต่ละคนที่มารับบริการถ่ายเอกสาร โดยเฉลี่ยแล้วใช้เวลาในระบบคนละ 1/2 นาที โดยใช้เวลารออยู่ในแถวคอยโดยเฉลี่ยคนละ 1/4 นาที ในขณะที่ใช้เวลา 1/4 นาที (1/2 - 1/4) เพื่อรับบริการถ่ายเอกสาร ความน่าจะเป็นที่เครื่องถ่ายเอกสารจะทำงาน และความน่าจะเป็นที่เครื่องถ่ายเอกสารจะว่างมีค่าเท่ากัน คือ 0.5

### ตัวแบบ M/M/1 จำกัดความยาวแถวคอย

ลักษณะของระบบแถวคอยที่ใช้ตัวแบบ M/M/1 จำกัดความยาวแถวคอย ในการวิเคราะห์ มีดังนี้

1. มีจำนวนประชากรไม่จำกัด
2. อัตราการมารับบริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบปัวส์ซง หรือเวลาห่างระหว่างการเข้ามาใช้บริการของลูกค้าแต่ละรายเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล
3. เวลาในการให้บริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล หรืออัตราการให้บริการเป็นแบบสุ่มมีการแจกแจงแบบปัวส์ซง
4. ระเบียบการให้บริการเป็นแบบมาก่อนได้รับบริการก่อน
5. ความยาวของแถวคอยมีจำนวนจำกัด โดยจำนวนผู้รับบริการสูงสุดที่มีได้ในระบบคือ M (จำนวนแถวคอยสูงสุด = M-1)

6. รูปแบบของระบบแถวคอยเป็นแบบช่องทางเดียว – ขั้นตอนเดียว (single channel – single phase system)

สูตรการคำนวณสำหรับตัวแบบ M/M/1 จำกัดความยาวแถวคอย เพื่อการวิเคราะห์แถวคอย มีดังนี้

$$P_0 = \frac{1 - (\lambda/\mu)}{1 - (\lambda/\mu)^{M+1}}$$

$$P_n = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

$$\text{เมื่อ } n = 1, 2, \dots, M$$

$$P_{(\leq n)} = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

$$\rho = 1 - P_0$$

$$L = \frac{\lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)} - \frac{(M+1)(\lambda/\mu)^{M+1}}{1 - (\lambda/\mu)^{M+1}}$$

$$L_q = L + P_0 - 1$$

$$W_q = \frac{L_q}{[\lambda(1 - P_M)]}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

สมมติฐานของตัวแบบ M/M/1 จำกัดความยาวแถวคอย

อัตราการมารับบริการน้อยกว่าอัตราให้บริการ หรือ  $\lambda < \mu$

ตัวอย่างการวิเคราะห์ด้วยตัวแบบ M/M/1 จำกัดความยาวแถวคอย

ตัวอย่างที่ 2

ร้านถ่ายเอกสารแห่งหนึ่งมีเวลาห่างโดยเฉลี่ยระหว่างลูกค้าแต่ละรายที่เข้ามาขอถ่ายเอกสารเป็น 6 นาที และเวลาเฉลี่ยในการถ่ายเอกสารให้กับลูกค้าแต่ละคนนาน 4 นาที ร้านถ่ายเอกสารแห่งนี้มีเครื่องถ่ายเอกสารเพียงเครื่องเดียว และมีที่ให้ลูกค้านั่งรอรับบริการได้ไม่เกิน 4 ที่ (รวมทั้งคนที่อยู่ในการรับบริการ) กำหนดให้ลูกค้าที่เข้ามาในร้านแล้วไม่มีที่นั่งรอจะ

ไปถ่ายเอกสารที่ร้านอื่น ถ้าเวลาห่างของการเข้ามารับบริการของลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล และเวลาในการให้บริการมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลเช่นเดียวกัน จงวิเคราะห์ระบบแถวคอยของร้านถ่ายเอกสารแห่งนี้ และเสนอแนะว่าทางร้านควรจะมีเครื่องถ่ายเอกสารเพื่อให้บริการแก่ลูกค้าหรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ

ใช้ตัวแบบ M/M/1 จำกัดความยาวแถวคอย

หา  $\lambda$

ในเวลา 6 นาที ลูกค้าเข้ามา 1 คน

ในเวลา 60 นาที ลูกค้าเข้ามา  $\frac{1}{6} \times 60 = 10$  คน

$\therefore \lambda = 10$  คน/ชั่วโมง

หา  $\mu$

ในเวลา 4 นาที ให้บริการลูกค้าได้ 1 คน

ในเวลา 60 นาที ให้บริการลูกค้าได้  $\frac{1}{4} \times 60 = 15$  คน

$\therefore \mu = 15$  คน/ชั่วโมง

ตรวจสอบสมมติฐาน

ในที่นี้  $\lambda < \mu$

$\therefore 10 < 15$

$M = 4$

คำนวณตามสูตรสำหรับการวิเคราะห์

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{1 - (\lambda / \mu)}{1 - (\lambda / \mu)^{M+1}} \\
 &= \frac{1 - (10/15)}{1 - (10/15)^{4+1}} \\
 &= \frac{1 - (10/15)}{1 - (10/15)^5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - (2/3)}{1 - (2/3)^5} \\
&= \frac{1/3}{1 - (32/243)} \\
&= \frac{1/3}{211/243} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{243}{211} \\
&= \frac{81}{211} \\
&= 0.384
\end{aligned}$$

$$P_n = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

$$\begin{aligned}
P_4 &= P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^4 \\
&= 0.384 \left( \frac{10}{15} \right)^4
\end{aligned}$$

$$= 0.076$$

$$\begin{aligned}
\rho &= 1 - P_0 \\
&= 1 - 0.384 \\
&= 0.616
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= \frac{\lambda \mu}{1 - (\lambda/\mu)} - \frac{(M+1)(\lambda/\mu)^{M+1}}{1 - (\lambda/\mu)^{M+1}} \\
&= \frac{10/15}{1 - (10/15)} - \frac{(4+1)(10/15)^{4+1}}{1 - (10/15)^5} \\
&= \frac{2/3}{1 - (2/3)} - \frac{(5)(2/3)^5}{1 - (2/3)^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2/3}{1/3} - \frac{(5)(32/243)}{1 - (32/243)} \\
&= 2 - \frac{160/243}{211/243} \\
&= 2 - \frac{160}{211} \\
&= \frac{262}{211} \\
&= 1.242 \text{ nu} \\
L_q &= L + P_0 - 1 \\
&= 1.242 + 0.384 - 1 \\
&= 0.626 \text{ คน} \\
W_q &= \frac{L_q}{[1 - P_0]} \\
&= \frac{0.626}{10[1 - P_0]} \\
&= \frac{0.626}{10[1 - 0.0761]} \\
&= \frac{0.626}{(10)(0.924)} \\
&= 0.068 \text{ ชั่วโมง หรือ 4.06 นาที} \\
W &= W_q + \frac{1}{\mu} \\
&= 0.068 + \frac{1}{15} \\
&= 0.135 \text{ ชั่วโมง หรือ 8.1 นาที}
\end{aligned}$$

เมื่อทำการคำนวณตามสูตรการวิเคราะห์เสร็จแล้ว ก็ทำการอธิบายตัวเลขที่ได้จากการคำนวณ ดังนี้



โดยเฉลี่ยแล้วจะมีลูกค้า 1.242 คนอยู่ในร้านถ่ายเอกสารแห่งนี้ โดย 0.626 คน รออยู่ในแถวคอย เพราะฉะนั้นอีก 0.616 คน (1.242 - 0.626) กำลังรับบริการอยู่ ลูกค้าแต่ละคนที่มารับบริการถ่ายเอกสารโดยเฉลี่ยแล้วใช้เวลาทั้งหมดอยู่ในร้านคนละ 8.1 นาที และใช้เวลารออยู่ในแถวคอยโดยเฉลี่ยคนละ 4.06 นาที เพราะฉะนั้นลูกค้าแต่ละคนใช้เวลารับบริการถ่ายเอกสารเฉลี่ยคนละ 4.04 นาที (8.1 - 4.06) ความน่าจะเป็นที่ร้านถ่ายเอกสารแห่งนี้จะไม่ว่างมีค่าเท่ากับ 0.616 ส่วนความน่าจะเป็นที่ร้านถ่ายเอกสารนี้จะว่างมีค่าเป็น 0.384

เนื่องจากความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้าเข้ามาใช้บริการถ่ายเอกสารจนเต็มร้านในที่ที่จัดไว้ให้มีเพียง 0.076 ซึ่งมีค่าน้อยมาก และจำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในร้านถ่ายเอกสารนี้มีเพียง 1.242 คน อาจสรุปได้ว่าจำนวนที่ให้ลูกค้านั่งรอในแถวคอยมีมากพอกับความต้องการแล้ว และไม่จำเป็นต้องเพิ่มเครื่องถ่ายเอกสารเพื่อให้บริการแก่ลูกค้า

### ตัวแบบ M/M/S ไม่จำกัดความยาวแถวคอย

ลักษณะของระบบแถวคอยที่ใช้ตัวแบบ M/M/S ไม่จำกัดความยาวแถวคอย ในการวิเคราะห์ มีดังนี้

1. มีจำนวนประชากรไม่จำกัด
2. อัตราการมารับบริการเป็นแบบสุ่มมีการแจกแจงแบบปัวส์ซง หรือเวลาห่างระหว่างการเข้ามาใช้บริการของลูกค้าแต่ละคนเป็นแบบสุ่มมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล
3. เวลาในการให้บริการเป็นแบบสุ่มมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล หรืออัตราการให้บริการเป็นแบบสุ่มมีการแจกแจงแบบปัวส์ซง
4. ระเบียบการให้บริการเป็นแบบมาก่อนได้รับบริการก่อน
5. ไม่จำกัดความยาวของแถวคอย
6. รูปแบบของระบบเป็นแบบหลายช่องทาง - ชั้นตอนเดียว (multiple channel - single phase system)