บทที่ 4
ปัญหาควบคู่และการวิเคราะห์ความไวต่อการเปลี่ยนแปลง

ในบทนี้ประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

- การสร้างตัวแบบปัญหาควบคู่จากตัวแบบปัญหาเดิม
- หลักการสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาควบคู่จากปัญหาเดิม
- หลักเพิ่มเติมในการสร้างปัญหาควบคู่
- การนำปัญหาควบคู่ไปใช้ในการตัดสินใจ
- ความสัมพันธ์ของผลลัพธ์ของปัญหาเดิม และปัญหาควบคู่
- ประโยชน์ของปัญหาควบคู่
- การวิเคราะห์ความไวต่อการเปลี่ยนแปลง
- ประโยชน์ของการวิเคราะห์ความไวต่อการเปลี่ยนแปลง
- การวิเคราะห์ความไวต่อการเปลี่ยนแปลงโดยการวิเคราะห์ผลจากคอมพิวเตอร์
- แบบฝึกหัด

บทที่ 4
ปัญหาควบคู่และการวิเคราะห์ความไวต่อการเปลี่ยนแปลง

ปัญหาตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นทุกปัญหาจะมีปัญหาควบคู่ ซึ่งจะมีลักษณะตรงกันข้าม โดยเรียกปัญหาที่มีอยู่ว่า ปัญหาเดิม (Primal Problem) ส่วนปัญหาที่ควบคู่มาที่มีลักษณะตรงกันข้ามจะเรียกว่า ปัญหาควบคู่ (Dual Problem)

การสร้างตัวแบบปัญหาควบคู่จากตัวแบบปัญหาเดิม

รูปแบบทั่วๆ ไปของปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่ซึ่งแสดงให้เห็นความสัมพันธ์บางประการของปัญหาทั้งสอง แสดงได้ดังต่อไปนี้

ปัญหาเดิม (Primal Problem)

Maximize $Z_p = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$

Subject to:

$$
\begin{aligned}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 &\le b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 &\le b_2 \\
a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 &\le b_3 \\
X_1, X_2, X_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

สร้างปัญหาควบคู่ของกำหนดการเชิงเส้นข้างต้นได้ดังนี้

ปัญหาควบคู่ (Dual Problem)

Minimize $Z_d = b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3$

Subject to:

$$
\begin{aligned}
a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{32}Y_3 &\ge C_1 \\
a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 &\ge C_2 \\
a_{13}Y_1 + a_{23}Y_2 + a_{33}Y_3 &\ge C_3 \\
Y_1, Y_2, Y_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

โดยมี Y_1, Y_2, Y_3 เป็นตัวแปรในปัญหาควบคู่

และ Z_d เป็นค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาควบคู่

เพื่อให้เกิดความเข้าใจอย่างชัดเจนขึ้น ขอยกตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จากตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของบริษัท พัฒนาอุตสาหกรรม จำกัด ตามตัวอย่างที่ 1 ในบทที่2 เป็นดังนี้

$$\text{Maximize } Z_p = 250X_1 + 290X_2$$

Subject to:

$$\begin{aligned} 20X_1 + 30X_2 &\leq 3{,}300 \\ 10X_1 + 6X_2 &\leq 1{,}080 \\ 3X_1 + 3X_2 &\leq 360 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

จงสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาควบคู่ จากปัญหาเดิมข้างต้น

วิธีทำ

เขียนปัญหาควบคู่ได้ดังนี้

$$\text{Minimize } Z_d = 3{,}300Y_1 + 1{,}080Y_2 + 360Y_3$$

Subject to:

$$\begin{aligned} 20Y_1 + 10Y_2 + 3Y_3 &\geq 250 \\ 30Y_1 + 6Y_2 + 3Y_3 &\geq 290 \\ Y_1, Y_2, Y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

หลักการสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาควบคู่ (Dual Problem) จากปัญหาเดิม (Primal Problem)

จากที่กล่าวในหัวข้อข้างต้น สามารถสรุปหลักการสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาควบคู่ (Dual Problem) จากปัญหาเดิม (Primal Problem) ได้ดังนี้

1. จำนวนเงื่อนไขบังคับในปัญหาเดิม จะเป็นจำนวนตัวแปรในปัญหาควบคู่
2. จำนวนตัวแปรในปัญหาเดิม จะเป็นจำนวนเงื่อนไขบังคับในปัญหาควบคู่
3. – ถ้าในปัญหาเดิมเป็น Maximize ในปัญหาควบคู่จะเป็น Minimize
   – ถ้าในปัญหาเดิมเป็น Minimize ในปัญหาควบคู่จะเป็น Maximize
4. ค่าทางขวามือของเงื่อนไขบังคับข้อที่ i ในปัญหาเดิมจะเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวที่ j ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาควบคู่
5. สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวที่ j ในเงื่อนไขบังคับของปัญหาเดิม จะเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในเงื่อนไขบังคับข้อที่ I ในปัญหาควบคู่
6. – ปัญหา Maximize จะต้องมีเงื่อนไขบังคับทุกข้อเป็น ≤
   – ปัญหา Minimize จะต้องมีเงื่อนไขบังคับทุกข้อเป็น ≥
7. สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวที่ j ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาเดิมจะเป็นค่าทางขวามือของเงื่อนไขบังคับข้อที่ i ในปัญหาควบคู่
8. ตัวแปรทุกตัวทั้งในปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่ต้องไม่ติดลบ

ตัวอย่างที่ 2 จงสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาควบคู่จากปัญหาเดิมต่อไปนี้

$$\text{Minimize } Z_p = 30X_1 + 240X_2 + 200X_3$$

Subject to:

$$\begin{aligned} X_1 + 7X_2 + 3X_3 &\geq 8 \\ X_1 + 5X_2 + 5X_3 &\geq 10 \\ X_1 + 3X_2 + 10X_3 &\geq 18 \\ X_1 + 2X_2 + 15X_3 &\geq 22 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ

เขียนปัญหาควบคู่ได้ดังนี้

$$\text{Maximize } Z_d = 8Y_1 + 10Y_2 + 18Y_3 + 22Y_4$$

Subject to:

$$1Y_1 + 1Y + 1Y_3 + 1Y_4 \leq 30$$
$$7Y_1 + 5Y_2 + 3Y_3 + 2Y_4 \leq 240$$
$$3Y_1 + 5Y_2 + 10Y_3 + 15Y_4 \leq 200$$
$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

ตัวอย่างที่ 3 จงสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาควบคู่จากปัญหาเดิมต่อไปนี้

$$\text{Minimize } Z_p = 2X_1 + 3X_2$$

Subject to:

$$0.5X_1 + X_2 \leq 1{,}600$$
$$X_1 + X_2 \leq 2{,}000$$
$$X_2 \geq 800$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

วิธีทำ

ปัญหาข้างต้นเป็น ปัญหาหาค่าสูงสุด ดังนั้นจะต้องจัดเงื่อนไขบังคับให้เป็นเครื่องหมาย ≤ โดยใช้ –1 คูณตลอดเงื่อนไขบังคับข้อที่ 3 จะได้ตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาเดิมเป็นดังนี้

$$\text{Maximize } Z_p = 2X_1 + 3X_2$$

Subject to:

$$0.5X_1 + X_2 \leq 1{,}600$$
$$X_1 + X_2 \leq 2{,}000$$
$$-X_2 \leq -800$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

เขียนปัญหาควบคู่ ได้ดังนี้

$$\text{Minimize } Z_d = 1{,}600Y_1 + 2{,}000Y_2 - 800Y_3$$

Subject to:

$$0.5Y_1 - 1Y_2 \geq 2$$

$$1Y_1 + 1Y_2 - 1Y_3 \geq 3$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

หลักเพิ่มเติมในการสร้างปัญหาควบคู่ (Dual Problem)

ในกรณีที่ปัญหาเดิมมีเงื่อนไขบังคับเครื่องหมายเท่ากับ (=) ซึ่งจำเป็นต้องมีหลักการสร้างปัญหาควบคู่เพิ่มเติม จากที่ได้กล่าวไว้แล้ว ดังนี้

- ถ้าเงื่อนไขบังคับข้อที่ i ในปัญหาเดิมมีเครื่องหมายเท่ากับ (=) ตัวแปรตัวที่ j ในปัญหาควบคู่จะไม่มีเครื่องหมายเป็นขีดจำกัด คือ จะมีค่าเป็นบวก เป็นศูนย์ หรือเป็นลบก็ได้
- ถ้าตัวแปรตัวที่ j ในปัญหาเดิมไม่มีเครื่องหมายเป็นขีดจำกัด เงื่อนไขบังคับข้อที่ i ในปัญหาควบคู่จะมีเครื่องหมายเท่ากับ (=)

เพื่อที่จะให้เกิดความเข้าใจในหลักการสร้างปัญหาควบคู่จากปัญหาเดิม จึงขอยกตัวอย่างต่าง ๆ เพิ่มเติม ดังนี้

ตัวอย่างที่ 4 จงสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาควบคู่จากปัญหาเดิม ต่อไปนี้

$$\text{Maximize } Z_p = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3$$

Subjec to:

$$3X_1 + 12X_2 + 3X_3 \leq 30$$

$$4X_1 - 2X_2 + 6X_3 = 8$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

วิธีทำ

เขียนปัญหาควบคู่ได้ดังนี้

Minimize $Z_d = 30Y_1 + 8Y_2$

Subjec to:

$$3Y_1 + 4Y_2 \geq 5$$
$$12Y_1 - 2Y_2 \geq 12$$
$$3Y_1 + 6Y_2 \geq 4$$
$$Y_1 \geq 0$$

Y_2 **ไม่มีเครื่องหมายเป็นขีดจำกัด**

ตัวอย่างที่ 5 จงสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาควบคู่จากปัญหาเดิมต่อไปนี้

Minimize $Z_p = 3Y_1 - 2Y_2 + 3Y_3 - 4Y_4$

Subject to:

$$1Y_1 - 6Y_2 + 3Y_3 = 10$$
$$2Y_2 - 2Y_4 \leq 10$$
$$3Y_1 + 4Y_3 + 2Y_4 \geq 15$$
$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

วิธีทำ

ปรับปัญหาเดิมให้พร้อมที่จะเปลี่ยนเป็นปัญหาควบคู่ ได้ดังนี้

Miximize $Z_p = 3Y_1 - 2Y_2 + 3Y_3 - 4Y_4$

Subject to:

$$1Y_1 - 6Y_2 + 3Y_3 = 10$$
$$-2Y_2 + 2Y_4 \geq -10$$
$$3Y_1 + 4Y_3 + 2Y_4 \geq 15$$
$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

เขียนปัญหาควบคู่ได้ดังนี้

Maximize $Z_d = 10X_1 - 10X_2 + 15X_3$

Subject to:

$$1X_1 + 0X_2 + 3X_3 \leq 3$$
$$6X_1 - 2X_2 + 0X_3 \leq -2$$
$$3X_1 + 0X_2 + 4X_3 \leq 3$$
$$0X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq -4$$

X_1 ไม่มีเครื่องหมายเป็นขีดจำกัด

$$X_2, X_3 \geq 0$$

ตัวอย่างที่ 6 จงสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาควบคู่จากปัญหาเดิมต่อไปนี้

Maximize $Z_p = 20X_1 + 10X_2$

Subject to :

$$X_1 + X_2 = 150$$
$$X_1 \leq 40$$
$$X_2 \geq 20$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

วิธีทำ

ปรับปัญหาเดิมให้พร้อมที่จะเปลี่ยนเป็นปัญหาควบคู่ ได้ดังนี้

Maximize $Z_p = 20X_1 + 10X_2$

Subject to :

$$X_1 + X_2 = 150$$
$$X_1 \leq 40$$
$$-X_2 \leq -20$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

เขียนปัญหาควบคู่ได้ดังนี้

Minimize $Z_d = 150Y_1 + 40Y_2 - 20Y_3$

Subject to :

$$Y, + Y, \geq 20$$

$$Y, - Y, \geq 10$$

$$Y_2, Y_3 \; 2 \; 0$$

Y_1 ไม่มีเครื่องหมายเป็นขีดจำกัด

การนำปัญหาควบคู่ (Dual Problem) ไปใช้ในการตัดสินใจ

ตัวอย่างที่ 8 ซึ่งต่อเนื่องจากตัวอย่างที่ 7 ที่จะแสดงต่อไปนี้ เป็นตัวอย่างในการนำปัญหาควบคู่ (Dual Problem) ไปใช้ในการตัดสินใจ

ตัวอย่างที่ 7 เกษตรกรคนหนึ่งปลูกมันสำปะหลังกับมะเขือเทศ ในการปลูกมะเขือเทศ 1 ถัง ต้องใช้แรงงาน 2 ชั่วโมง และใช้พื้นที่ 3 ตารางฟุต ในการปลูกมันสำปะหลัง 1 ถัง ต้องใช้แรงงาน 1 ชั่วโมง และใช้พื้นที่ 4 ตารางฟุต กำไรต่อถังของมันสำปะหลัง เท่ากับ 30 บาท กำไรต่อถังของมะเขือเทศ เท่ากับ 35 บาท เกษตรกรคนนี้มีที่ดิน 12,000 ตารางฟุต และมีแรงงาน 4,000 ชั่วโมงแรงงาน

ต้องการทราบว่าเกษตรกรคนนี้ควรปลูกพืชแต่ละชนิดกี่ถัง จึงจะทำให้ได้รับกำไรสูงสุด

วิธีทำ

ให้ X_1 คือ จำนวนมันสำปะหลังที่จะปลูก (ถัง)

X_2 คือ จำนวนมะเขือเทศที่จะปลูก (ถัง)

Z คือ กำไรรวมจากการปลูกพืชทั้ง 2 ชนิด

$$\text{Maximize } Z = 30X_1 + 35X_2$$

Subject to :

$$1X_1 + 2X_2 \leq 4{,}000$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 12{,}000$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

เมื่อสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นเสร็จแล้ว ทำการหาคำตอบของตัวแบบจะได้คำตอบดังนี้

$$X_1 = 2{,}400$$

$$X_2 = 800$$

$$\text{Maximize } Z = 100{,}000$$

∴ เกษตรกรคนนี้ควรปลูกมันสำปะหลัง 2,400 ถัง และควรปลูกมะเขือเทศ 800 ถัง โดยทำให้เกิดกำไรสูงสุดคือ 100,000 บาท

ตัวอย่างที่ 8 จากตัวอย่างที่ 7 ถ้าเกษตรกรคนนี้ต้องการเอาที่ดินไปให้นาย ข เช่าและรับจ้างทำการปลูกพืชทั้ง 2 ชนิดให้นาย ข ด้วย อยากทราบว่าค่าเช่าที่ดินและค่าจ้างแรงงานต่อชั่วโมงที่เขาจะคิดจากนาย ข ควรเป็นเท่าไหร่

วิธีทำ

ให้ Y_1 = มูลค่าของเงื่อนไขบังคับข้อที่ 1 ต่อหน่วย (ค่าแรงงานต่อ 1 ชั่วโมง)

Y_2 = มูลค่าของเงื่อนไขบังคับข้อที่ 2 ต่อหน่วย (ค่าเช่าที่ดินต่อ 1 ตาราง)

Z_d = มูลค่าทั้งหมดของค่าจ้างแรงงานรวมกับมูลค่าทั้งหมดของค่าเช่าที่ดิน

$$\text{Minimize } Z_d = 4{,}000Y_1 + 12{,}000Y_2$$

Subject to :

$$1Y_1 + 4Y_2 \geq 30$$

$$2Y_1 + 3Y_2 \geq 35$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

อธิบายการสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นข้างต้น ได้ดังนี้

<u>จากฟังก์ชันวัตถุประสงค์</u>

$4,000Y_1 + 12,000Y_2$ คือ มูลค่ารวมของทรัพยากรทั้งหมด (ซึ่งในที่นี้คือมูลค่าทั้งหมดของค่าจ้างแรงงานบวกกับมูลค่าทั้งหมดของค่าเช่าที่ดิน) แต่มูลค่าของทรัพยากรที่เกษตกรคนนี้ตั้งไว้ในการไปขายให้นาย ข นั้น ถ้าสูงไปก็ไม่เป็นที่สนใจกับนาย ข ที่จะซื้อทรัพยากรเหล่านั้น ดังนั้นฟังก์ชันวัตถุประสงค์จึงเขียนได้ดังนี้

$$\text{Minimize } Z_d = 4,000Y_1 + 12,000Y_2$$

<u>จากเงื่อนไขบังคับข้อที่ 1</u>

ในการผลิตมันสำปะหลัง 1 ถัง ใช้แรงงาน 1 ชั่วโมง $\therefore$ มูลค่าของแรงงานที่ใช้เท่ากับ $1Y_1$ และใช้ที่ดิน 4 ตารางฟุต $\therefore$ มูลค่าของที่ดินที่ใช้เท่ากับ $4Y_2$ ดังนั้นรายได้หรือมูลค่าที่เกษตกรคนนี้ได้รับจากการขายทรัพยากรแรงงานและค่าเช่าที่ดินเพื่อการบลูกมันสำปะหลัง จึงเท่ากับ $Y_1 + 4Y_2$ ซึ่งมูลค่าหรือรายได้จำนวนนี้อย่างน้อยเกษตกรคนนี้ควรได้รับเท่ากับเอาทรัพยากรทั้ง 2 ชนิด ไปปลูกมันสำปะหลังเอง ซึ่งถ้าเกษตกรคนนี้ปลูกมันสำปะหลังเอง จะทำให้ได้รับกำไรต่อถังเท่ากับ 30 บาท ดังนั้นเงื่อนไขบังคับข้อที่ 1 จึงเขียนได้ดังนี้

$$1Y_1 + 4Y_2 \geq 30$$

<u>จากเงื่อนไขบังคับข้อที่ 2</u>

ในการผลิตมะเขือเทศ 1 ถัง ใช้แรงงาน 2 ชั่วโมง $\therefore$ มูลค่าของแรงงานที่ใช้เท่ากับ $2Y_1$ และใช้ที่ดิน 3 ตารางฟุต $\therefore$ มูลค่าของที่ดินที่ใช้เท่ากับ $3Y_2$ ดังนั้นรายได้หรือมูลค่าที่เกษตกรคนนี้ได้รับจากการขายทรัพยากรแรงงานและค่าเช่าที่ดินเพื่อการปลูกมะเขือเทศ จึงเท่ากับ $2Y_1 + 3Y_2$ ซึ่งมูลค่าหรือรายได้จำนวนนี้ อย่างน้อยเกษตรกรคนนี้ควรได้รับเท่ากับเอาทรัพยากรทั้งสองชนิดไปปลูกมะเขือเทศเอง ซึ่งถ้าเกษตกรคนนี้ปลูกมะเขือเทศเองจะทำให้ได้รับกำไรต่อถังเท่ากับ 35 บาท ดังนั้นเงื่อนไขบังคับข้อที่ 2 จึงเขียนได้ดังนี้

$$2Y_1 + 3Y_2 \geq 35$$

จะเห็นได้ว่าตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นที่ได้สร้างไว้ข้างต้นในตัวอย่างที่ 8 เป็นปัญหาควบคู่ (Dual Problem) ของตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นที่ได้สร้างไว้ในตัวอย่างที่ 7 หรือกล่าวได้ว่าปัญหาในตัวอย่างที่ 7 เป็นปัญหาเดิม (Primal Problem) ส่วนปัญหาในตัวอย่างที่ 8 เป็นปัญหาควบคู่ (Dual Problem)

ดังนั้นจากตัวอย่างที่ 7 และตัวอย่างที่ 8 จึงกล่าวสรุปได้ว่าปัญหาเดิม (Primal Problem) จะเกี่ยวข้องกับการจัดสรรทรัพยากรต่าง ๆ ที่ดีที่สุด ส่วนปัญหาควบคู่ (Dual Problem) เป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณหามูลค่าของทรัพยากรต่าง ๆ ต่อหน่วยที่ดีที่สุด

ต่อไปทำการหาคำตอบของตัวแบบที่ได้สร้างไว้ข้างต้น จะได้คำตอบดังนี้

$$Y_1 = 10, \quad Y_2 = 5$$

$$\text{Minimize } Z_d = 100{,}000$$

$\therefore$ เกษตรกรคนนี้ ควรคิดค่าแรงจากนาย ข ชั่วโมงละ 10 บาท และคิดค่าเช่าที่ดินจากนาย ข ตารางฟุตละ 5 บาท และมูลค่าทั้งหมดของค่าจ้างแรงงานรวมกับมูลค่าทั้งหมดของค่าเช่าที่ดินที่เกษตรกรคนนี้จะได้รับจะเท่ากับ 100,000 บาท

ความสัมพันธ์ของผลลัพธ์ของปัญหาเดิม และปัญหาควบคู่

เราสามารถแก้ปัญหาควบคู่ได้ด้วยวิธีการเดียวกันกับการแก้ปัญหาเดิม โดยที่ผลลัพธ์ของปัญหาหนึ่งจะมีความสัมพันธ์กับอีกปัญหาหนึ่งในประเด็นที่สำคัญดังนี้

1. ค่าของฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์ของปัญหาทั้งสองจะเท่ากัน นั่นคือ

$$\text{Maximize } Z_p = \text{Minimize } Z_d$$

$$\text{หรือ Minimize } Z_p = \text{Maximize } Z_d$$

2. พิจารณาจากการหาคำตอบด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex) พบว่า ตัวแปรในปัญหาเดิมที่สัมพันธ์กับตัวแปรส่วนขาดหรือตัวแปรเทียมในปัญหาควบคู่จะมีค่าเท่ากับค่า Z_j ของตัวแปรส่วนขาดหรือตัวแปรเทียมนั้น ๆ ในตารางสุดท้ายของปัญหาควบคู่ และในทางกลับกันตัวแปรในปัญหาควบคู่ที่สัมพันธ์กับตัวแปรส่วนขาดหรือตัวแปรเทียมในปัญหาเดิมจะมีค่าเท่ากับค่า Z_j ของตัวแปรส่วนขาดหรือตัวแปรเทียมนั้น ๆ ในผลลัพธ์ตารางสุดท้ายของปัญหาเดิม

เพื่อให้เกิดความเข้าใจในหัวข้อนี้ จะขอยกตัวอย่างตามโจทย์ปัญหาตัวอย่างของบริษัท พัฒนาอุตสาหกรรม จำกัด ตามตัวอย่างที่ 1 ของบทนี้

Maximize $Z_p = 250X_1 + 290X_2$

Subjec to :

$$20X_1 + 30X_2 \leq 3{,}300$$

$$10X_1 + 6X_2 \leq 1{,}080$$

$$3X_1 + 3X_2 \leq 360$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

ทำการหาคำตอบด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ ได้ดังนี้

ขั้นตอนแรก จัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ได้ดังนี้

Maximize $Z_p = 250X_1 + 290X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Subject to :

$$20X_1 + 30X_2 + S_1 = 3{,}300$$

$$10X_1 + 6X_2 + S_2 = 1{,}080$$

$$3X_1 + 3X_2 + S_3 = 360$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

ต่อมาทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้น พร้อมทั้งทำการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ จนในที่สุดจะได้ผลเฉลยเหมาะที่สุด ดังตารางซิมเพล็กซ์ต่อไปนี้

ตารางผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหาเดิม โดยวิธีซิมเพล็กซ์

	C_j	250	290	0	0	0	
C_b	เบสิส	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	ผลลัพธ์ (b_i)
290	X_2	0	1	1/10	0	-2/3	90
0	S_2	0	0	4/10	1	-6	240
250	X_1	1	0	-1/10	0	1	30
	Z_j	250	290	4	0	70/3	33,600
	$(C_j - Z_j)$	0	0	-4	0	-170/3	

สรุปคำตอบ ได้ดังนี้

$X_1 = 30,\ X_2 = 90,\ S_1 = 0,\ S_2 = 240,\ S_3 = 0$

Maximize $Z_p = 33{,}600$

จากปัญหาเดิมข้างต้นนำมาสร้างปัญหาควบคู่ (Dual Problem) ได้ดังนี้

Minimize $Z_d = 3{,}300Y_1 + 1{,}080Y_2 + 360Y_3$

Subject to :

$$20Y_1 + 10Y_2 + 3Y_3 \geq 250$$

$$30Y_1 + 6Y_2 + 3Y_3 \geq 290$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

ทำการหาคำตอบด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ ได้ดังนี้

ขั้นตอนแรก จัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ได้ดังนี้

Minimize $Z_d = 3{,}300Y_1 + 1{,}080Y_2 + 360Y_3 + 0S_1 + MA_1 + 0S_2 + MA_2$

Subject to :

$$20Y_1 + 10Y_2 + 3Y_3 - S_1 + A_1 = 250$$

$$30Y_1 + 6Y_2 + 3Y_3 - S_2 + A_2 = 290$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

$$S_1, A_1, S_2, A_2 \geq 0$$

ต่อมาทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้น พร้อมทั้งทำการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์จนในที่สุดจะได้ผลเฉลยเหมาะที่สุด ดังตารางซิมเพล็กซ์ต่อไปนี้

ตารางผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหาควบคู่ โดยวิธีซิมเพล็กซ์

	C_j	3,300	1,080	360	0	M	0	M	
C_b	เบสิส	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	A_1	S_2	A_2	ผลลัพธ์ (b_i)
360	Y_3	0	6	1	-1	1	2/3	-2/3	170/3
3,300	Y_1	1	-2/5	0	1/10	-1/10	-1/10	1/10	4
	Z_j	3,300	840	360	-30	30	-90	90	33,600
	$(C_j - Z_j)$	0	240	0	30	(M – 30)	90	(M-90)	

สรุปคำตอบได้ดังนี้

$Y_1 = 4,\ Y_2 = 0.\ Y_3 = 170/3,$

$S_1 = 0,\ A_1 = 0,\ S_2 = 0,\ A_2 = 0$

Minimize $Z_d = 33{,}600$

จากตารางผลเฉลยเหมาะที่สุดสำหรับปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่ สามารถสรุปความสัมพันธ์ของผลลัพธ์ของปัญหาทั้งสองได้ดังนี้

-- ตัวแปรตัวที่ 1 ของปัญหาเดิม คือ X_1 สัมพันธ์กับเงื่อนไขบังคับข้อที่ 1 ของปัญหาควบคู่ ซึ่งมีตัวแปรเทียมคือ A_1 (หรือกล่าวได้ว่า X_1 สัมพันธ์กับ A_1) ดังนั้น X_1 จะมีค่าเท่ากับค่า Z_j ของตัวแปร A_1 ในตารางผลลัพธ์ชุดสุดท้ายของปัญหาควบคู่ นั่นคือ $X_1 = 30$

– ตัวแปรตัวที่ 2 ของปัญหาเดิม คือ X_2 สัมพันธ์กับเงื่อนไขบังคับข้อที่ 2 ของปัญหาควบคู่ ซึ่งมีตัวแปรเทียมคือ A_2 (หรือกล่าวได้ว่า X_2 สัมพันธ์กับ A_2) ดังนั้น X_2 จะมีค่าเท่ากับค่า Z_j ของตัวแปร A_2 ในตารางผลลัพธ์ชุดสุดท้ายของปัญหาควบคู่ นั่นคือ $X_2 = 90$

– ตัวแปรตัวที่ 1 ของปัญหาควบคู่ คือ Y_1 สัมพันธ์กับเงื่อนไขบังคับข้อที่ 1 ของปัญหาเดิม ซึ่งมีตัวแปรส่วนขาดคือ S_1 (หรือกล่าวได้ว่า Y_1 สัมพันธ์กับ S_1) ดังนั้น Y_1 จะมีค่าเท่ากับค่า Z_j ของตัวแปร S_1 ในตารางผลลัพธ์ชุดสุดท้ายของปัญหาเดิม นั่นคือ $Y_1 = 4$

– ตัวแปรตัวที่ 2 ของปัญหาควบคู่ คือ Y_2 สัมพันธ์กับเงื่อนไขบังคับข้อที่ 2 ของปัญหาเดิม ซึ่งมีตัวแปรส่วนขาดคือ S_2 (หรือกล่าวได้ว่า Y_2 สัมพันธ์กับ S_2) ดังนั้น Y_2 จะมีค่าเท่ากับค่า Z_j ของตัวแปร S_2 ในตารางผลลัพธ์ชุดสุดท้ายของปัญหาเดิม นั่นคือ $Y_2 = 0$

– ตัวแปรตัวที่ 3 ของปัญหาควบคู่ คือ Y_3 สัมพันธ์กับเงื่อนไขบังคับข้อที่ 3 ของปัญหาเดิม ซึ่งมีตัวแปรส่วนขาดคือ S_3 (หรือกล่าวได้ว่า Y_3 สัมพันธ์กับ S_3) ดังนั้น Y_3 จะมีค่าเท่ากับค่า Z_j ของตัวแปร S_3 ในตารางผลลัพธ์ชุดสุดท้ายของปัญหาเดิม นั่นคือ $Y_3 = 170/3$

ดังนั้นจากที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้น จึงสรุปได้ว่าการหาคำตอบของปัญหาควบคู่โดยวิธีซิมเพล็กซ์สามารถหาค่าได้จากตารางผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหาเดิม และเช่นเดียวกันการหาคำตอบของปัญหาเดิมสามารถหาค่าได้จากตารางผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหาควบคู่ ดังนั้นการหาคำตอบของปัญหาควบคู่หรือปัญหาเดิมเราไม่จำเป็นจะต้องทำการคำนวณก็สามารถหาคำตะบได้ ถ้าเราทราบผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหาตรงข้าม

ตัวอย่างที่ 9 จากตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น ต่อไปนี้

Maximize $Z = 40X_1 + 60X_2$

Subjec to :

$$3X_1 + 2X_2 \leq 2{,}000$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 1{,}000$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

ก. หาคำตอบของตัวแบบข้างต้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

ข. สร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาควบคู่ (Dual Problem)

ค. หาคำตอบของ ข้อ ข. จากตารางซิมเพล็กซ์ (Simplex) ของ ข้อ ก.

วิธีทำ

ก.

จัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ได้ดังนี้

Maximize $Z = 40X_1 + 60X_2 + 0S_1 + 0S_2$

Subject to :

$$3X_1 + 2X_2 + S_1 = 2{,}000$$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 1{,}000$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$S_1, S_2 \geq 0$$

ตารางผลลัพธ์เบื้องต้น (ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1)

	C_j	40	60	0	0		
C_b	เบสิส	X_1	X_2	S_1	S_2	ผลลัพธ์ (b_i)	<u>อัตราส่วน</u>
0	S_1	3	2	1	0	2,000	2,000/2 = 1,000
0	S_2	1	2	0	1	1,000	1,000/2 = 500*
	Z_j	0	0	0	0	0	
	$(C_j - Z_j)$	40	60*	0	0		

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2

การคำนวณ	C_b	C_j / เบสิส	40 / X_1	60 / X_2	0 / S_1	0 / S_2	ผลลัพธ์(b_i)	อัตราส่วน
$R_{1u} = R_{1n} - 2R_{2u}$	0	S_1	2	0	1	-1	1,000	1,000/2 = 500*
$R_{2u} = R_{2n}/2$	60	X_2	1/2	1	0	1/2	500	500/1/2 = 1,000
		Z_j	30	60	0	30	30,000	
		$(C_j - Z_j)$	10*	0	0	-30		

ตารางผลเฉลยเหมาะที่สุด (ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3)

C_b	C_j / เบสิส	40 / X_1	60 / X_2	0 / S_1	0 / S_2	ผลลัพธ์ (b_i)
40	X_1	1	0	1/2	-1/2	500
60	X_2	0	1	-1/4	3/4	250
	Z_j	40	60	5	25	35,000
	$(C_j - Z_j)$	0	0	-5	-25	

จะได้คำตอบดังนี้

$X_1 = 500,\ X_2 = 250$

Maximize $Z = 35{,}000$

ข.

สร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาควบคู่ ได้ดังนี้

Minimize $Z_d = 2{,}000Y_1 + 1{,}000Y_2$

Subject to :

$$3Y_1 + Y_2 \geq 40$$

$$2Y_1 + 2Y_2 \geq 60$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

ค. หาคำตอบของปัญหาควบคู่ ได้ดังนี้

- Y_1 ในปัญหาควบคู่สัมพันธ์กับ S_1 ในปัญหาเดิม ดังนั้น Y_1 จึงมีค่าเท่ากับค่า Z_j ของ S_1 ในปัญหาควบคู่ซึ่งในที่นี้เท่ากับ 5 $\therefore\ Y_1 = 5$

- Y_2 ในปัญหาควบคู่สัมพันธ์กับ S_2 ในปัญหาเดิม ดังนั้น Y_2 จึงมีค่าเท่ากับ Z_j ของ S_2 ในปัญหาควบคู่ ซึ่งในที่นี้เท่ากับ $\therefore\ Y_2 = 25$

- ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาควบคู่เท่ากับค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาเดิม ซึ่งในที่นี้คือ Maximize Z_p = Minimize Z_d ซึ่งในที่นี้Maximize Z_p = 35,000 $\therefore$ Minimize Z_d = 35,000

หรือกล่าวสั้น ๆ ได้ดังนี้

- Y_1 ในปัญหาควบคู่ = ค่า Z_j ของ S_1 ในปัญหาเดิม = 5
- Y_2 ในปัญหาควบคู่ = ค่า Z_j ของ S_2 ในปัญหาเดิม = 25
- Mininmize Z_d ในปัญหาควบคู่ = Maximize Z_p ในปัญหาเดิม = 35,000

ในที่นี้เราอาจจะตรวจสอบได้ว่าคำตอบของเราข้างต้นถูกต้องหรือไม่ โดยทำการแก้ปัญหาตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาควบคู่ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ ดังแสดงต่อไปนี้

<u>จัดตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาควบคู่ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน</u>

Minimize $Z_d = 2{,}000Y_1 + 1{,}000Y_2 + 0S_1 + MA_1 + 0S_2 + MA_2$

Subject to :

$$3Y_1 + Y_2 - S_1 + A_1 = 40$$
$$2Y_1 + 2Y_2 - S_2 + A_2 = 60$$
$$Y_1, Y_2 \geq 0$$
$$S_1, A_1, S_2, A_2 \geq 0$$

ทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้น พร้อมทั้งทำการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ ได้ดังนี้