ดังนั้นจากตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของตัวอย่างนี้ จัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ได้ดังนี้

$$\text{Maximize } Z = 3X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1$$

Subject to :

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 + S_1 = 6$$

$$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 - S_2 + A_1 = 8$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$S_1, S_2, A_1 \geq 0$$

<u>ขั้นตอนที่ 2 ขั้นตอนที่ 3</u> การตั้งผลลัพธ์เบื้องต้น และการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์

เมื่อจัดตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานได้แล้ว ขั้นต่อไปคือ ทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้น และการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ ซึ่งการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นทำได้โดยใช้หลักการดังที่ได้อธิบายมาแล้วในกรณีที่ 1 (Max, ≤ ทุกข้อ) และเนื่องจากปัญหาตามตัวอย่างนี้เป็นปัญหา Max ดังนั้นการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ จะใช้หลักการตามที่ได้อธิบายมาแล้วในกรณีที่ 1 (Max, ≤ ทุกข้อ) เช่นเดียวกันดังนั้นการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นพร้อมทั้งการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์สามารถแสดงได้ดังตารางผลลัพธ์เบื้องต้น (ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1) ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งถึง ตารางสุดท้าย ซึ่งแสดงได้ดังนี้

ตารางผลลัพธ์เบื้องต้นที่ 1 (ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1)

	C_j	3	3	2	0	0	-M		
C_b	เบสิส	X_1	X_2	X_3*	S_1	S_2	A_1	ผลลัพธ์ (b_i)	อัตราส่วน
0	S_1	4	2	2	1	0	0	6	6/2 = 3
-M	A_1*	3	2	4*	0	-1	1	8	8/4 = 2*
	Z_j	-3M	-2M	-4M	0	M	-M	-8M	
	$(C_j - Z_j)$	(3+3M)	(3+2M)	(2+4M)*	0	-M	0		

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2

การคำนวณ		C_j	3	3	2	0	0	-M		
	C_b	เบสิส	X_1	X_2*	X_3	S_1	S_2	A_1	ผลลัพธ์ (b_i)	อัตราส่วน
$R_{1ใ} = R_{1เ} - 2R_{1ใ}$	0	S_1*	5/2	1*	0	1	½	- ½	2	2/1 = 2*
$R_{2ใ} = R_{2เ}/4$	2	X_3	¾	½	1	0	-1/4	¼	4	4/(1/2) = 8
		Z_j	3/2	1	2	0	- ½	½	4	
		$(C_j - Z_j)$	3/2	2*	0	0	½	(-M- ½)		

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3

<u>การคำนวณ</u>

$R_{1\text{ม}} = R_{1\text{ด}}$

$R_{2\text{ม}} = R_{2\text{ด}} - (1/2)\,R_{1\text{ม}}$

	C_j	3	3	2	0	0	-M	
C_b	เบสิก	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	ผลลัพธ์ (b_i)
3	X_2	5/2	1	0	1	½	-½	2
2	X_3	-½	0	1	-½	-½	½	1
	Z_j	13/2	3	2	2	-½	-½	8
	$(C_j - Z_j)$	-7/2	0	0	-2	-½	(-M- ½)	

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3 ให้คำตอบที่ดีที่สุดแล้ว คือ

$X_1 = 0,\ X_2 = 2,\ X_3 = 1$

$S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ A_1 = 0$

Maximize Z = 8

การแก้ปัญหาตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นกรณีที่ 4 (เงื่อนไขบังคับมีเครื่องหมายเป็น =) ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

ตัวอย่างที่ 11 จงหาคำตอบของตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นต่อไปนี้ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

Minimize $Z = 3X + 5Y$

Subject to :

$X \leq 4$

$2Y \leq 12$

$3X + 2Y = 18$

$X, Y \geq 0$

วิธีทำ

จะเห็นได้ว่าตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นตามตัวอย่างนี้ เงื่อนไขบังคับข้อที่ 3 มีเครื่องหมายเป็นเท่ากับ (=) การหาคำตอบด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ ทำได้ตามขั้นตอนตามลำดับดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> การจัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

หลักการจัดให้อยู่ในรูปมาตรฐาน กรณีเงื่อนไขบังคับมีเครื่องหมายเป็น = ทำได้ดังนี้

– ให้เติมตัวแปรเทียม (Artificial Variable) ซึ่งใช้สัญลักษณ์ "A" โดยการบวก (+)เข้าไปในเงื่อนไขบังคับ

– พิจารณาว่าในฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็น Max หรือ Min

– ถ้าเป็น Max ให้เติม - MA ในฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์

– ถ้าเป็น Min ให้เติม + MA ในฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์

โดย M คือ เลขบวกจำนวนมาก ๆ ($M \rightarrow \infty$)

ดังนั้นจากตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหานี้ จัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ได้ดังนี้

Minimize $Z = 3X + 5Y + 0S_1 + 0S_2 + MA_1$

Subject to :

$$X + S_1 = 4$$

$$2Y + S_2 = 12$$

$$3X + 2Y + A_1 = 18$$

$$X, Y \geq 0$$

$$S_1, S_2, A_1 \geq 0$$

<u>ขั้นตอนที่ 2 และขั้นตอนที่ 3</u> การตั้งผลลัพธ์เบื้องต้น และการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์

เมื่อจัดตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานได้แล้ว ขั้นตอนต่อไปคือทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้น และการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ ซึ่งการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นทำได้โดยใช้หลักการดังที่ได้อธิบายมาแล้วในกรณีที่ 1 (Max, ทุกข้อ) และเนื่องจากปัญหาตามตัวอย่างนี้เป็นปัญหา Min ดังนั้นการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ จะใช้หลักการตามที่ได้อธิบายมาแล้วในกรณีที่ 2 (Min, ทุกข้อ) ดังนั้นการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นพร้อมทั้งการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ สามารถแสดงได้ดังตารางผลลัพธ์เบื้องต้น (ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1) ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งถึงตารางสุดท้ายซึ่งแสดงได้ดังนี้

ตารางผลลัพธ์เบื้องต้น (ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1)

C_b	C_j	3	5	0	0	M		
	เบสิส	X*	Y	S_1	S_2	S_3	ผลลัพธ์ (b_i)	อัตราส่วน
0	S_1*	1*	0	I	0	0	4	4/1 = 4*
0	S_2	0	2	0	I	0	I2	
M	A_1	3	2	0	0	I	18	18/3 = 6
	Z_j	3M	2M	0	0	M	18M	
	$(C_j - Z_j)$	3 –3M*	5-2M	0	0	0		

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2

การคำนวณ	C_b	C_j	3	5	0	0	M		
		เบสิส	X	Y*	S_1	S_2	S_7	ผลลัพธ์ (b_i)	อัตราส่วน
$R_{1ใ} = R_{1ก}$	3	X	1	0	I	0	0	4	
$R_{2ใ} = R_{2ก}$	0	S_2	0	2	0	I	0	12	12/2 = 6
$R_{3ใ} = R_{3ก}-3R_{1ใ}$	M	A_1*	0	2*	-3	0	1	6	6/2 = 3*
		Z_j	3	2M	(3-3M)	0	M	12 +6M	
		$C_j - Z_j$	0	(5-2M)*	(-3 + 3M)	0	0		

การคำนวณ	C_7	C_j	3	5	0	0	M	
		เบสิส	X	Y	S_1	S_2	S_7	ผลลัพธ์ (b_i)
$R_{1ใ} = R_{1ก}$	3	X	1	0	1	0	0	4
$R_{2ใ} = R_{2ก} - 2R_{3ใ}$	0	S_2	0	0	3	1	-1	6
$R_{3ใ} = R_{3ก}/2$	5	Y	0	I	-3/2	0	1/2	3
		Z_j	3	5	-912	0	5/2	21
		$(C_j - Z_j)$	0	0	9/2	0	M-5/2	

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3 ให้คำตอบที่ดีที่สุดแล้ว คือ

$X = 4, \quad Y - 3$

$S_1 = 0, \quad S_2 = 6, \quad A_1 = 0$

Minimize $Z = 27$

ตัวอย่างเกี่ยวกับการแก้ปัญหาตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex) ข้างต้น ครบทั้ง 4 กรณีแล้ว ต่อไปจะนำเสนอตัวอย่างการหาคำตอบตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นที่เงื่อนไขบังคับมีครบทั้ง 3 ลักษณะคือ ≤, ≥ และ = ดังตัวอย่างที่ 12

ตัวอย่างที่ 12 จงหาคำตอบของตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นต่อไปนี้ ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

Minimize $Z = 5X + 6Y$

Subject to :

$$\begin{aligned} X + Y &= 1,000 \\ X &\le 300 \\ Y &\ge 150 \\ X, Y &\ge 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ

จัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ได้ดังนี้

Minimize $Z = 5X + 6Y + MA_1 + 0S_1 + 0S_2 + MA_2$

Subject to :

$$\begin{aligned} X + Y + A_1 &= 1,000 \\ X + S_1 &= 300 \\ Y - S_2 + A_2 &= 150 \\ X, Y &\ge 0 \\ S_1, S_2, A_1, A_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

สร้างตารางผลลัพธ์เบื้องต้นได้ดังนี้

ตารางผลลัพธ์เบื้องต้น (ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1)

	C_j	5	6	M	0	0	M	
C_b	เบสิส	X	Y	A_1	S_1	S_2	A_2	ผลลัพธ์ (b_i)
M	A_1	1	1	1	0	0	0	1,000
0	S_1	1	0	0	1	0	0	300
M	A_2	0	1	0	0	-1	1	150
	Z_j	M	2M	M	0	-M	M	1,150M
	$(C_j - Z_j)$	(5-M)	(6 - 2M)	0	0	M	0	

ต่อไปทำการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ไปเรื่อย ๆ ตามความรู้ที่เรียนมาจะได้คำตอบที่ดีที่สุด ดังนี้ (ให้นักศึกษาฝึกหัดทำการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ด้วยตัวเองด้วยว่าได้คำตอบตรงกันหรือไม่ ถ้าไม่ตรงกันแสดงว่านักศึกษาทำผิด และให้หาให้ได้ว่าทำผิดที่ประเด็นใด)

$X = 300, \quad Y = 700$

$S_1 = 0, \; S_2 = 550, \quad A_1 = 0, \; A_2 = 0$

Minimize $Z = 5{,}700$

จากตัวอย่างเกี่ยวกับการหาคำตอบของตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นที่กล่าวมาข้างต้นทั้งหมด จะเห็นว่าปัญหาทุกข้อที่ให้มาค่าทางขวามือของเงื่อนไขบังคับมีค่าไม่ติดลบ ดังนั้นนักศึกษาอาจเกิดข้อสงสัยว่าถ้าค่าทางขวามือของเงื่อนไขบังคับมีค่าติดลบ การหาคำตอบตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex) จะทำอย่างไร ดังนั้นในตัวอย่างที่ 13 ซึ่งจะแสดงต่อไปนี้จะตอบข้อสงสัยของนักศึกษาได้

ตัวอย่างที่ 13 (เป็นตัวอย่างที่ต้องการให้นักศึกษาได้เข้าใจความรู้ในเรื่องการจัดตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานในการหาคำตอบตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ ในกรณีที่ค่าทางขวามือของเงื่อนไขบังคับมีค่าติดลบ)

จงทำการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นต่อไปนี้ ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

$$\text{Maximize } Z = 4X_1 + 2X_2$$

Subject to :

$$\begin{aligned} 3X_1 + 2X_2 &\leq 16 \\ -4X_1 + 3X_2 &\geq -14 \\ 7X_1 + 2X_2 &= 28 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ

การจัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานเริ่มต้นให้ทำค่าทางขวามือให้มีค่าไม่ติดลบเสียก่อน โดยการนำ -1 ไปคูณตลอดเงื่อนไขบังคับข้อที่ค่าคงที่ทางขวามือมีค่าติดลบ (ซึ่งในที่นี้คือเงื่อนไขบังคับข้อที่ 2) ดังนี้

$$\text{Maximize } Z = 4X_1 + 2X_2$$

Subject to :

$$\begin{aligned} 3X_1 + 2X_2 &\leq 16 \\ 4X_1 - 3X_2 &\leq 14 \\ 7X_1 + 2X_2 &= 28 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ต่อจากนั้นทำการจัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานตามหลักการที่ได้เรียนมา ได้ดังนี้

$$\text{Maximize } Z = 4X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1$$

Subject to :

$$\begin{aligned} 3X_1 + 2X_2 + S_1 &= 16 \\ -4X_1 + 3X_2 + S_2 &= 14 \\ 7X_1 + 2X_2 + A_1 &= 28 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \\ S_1, S_2, A_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

ต่อจากนั้นนำมาสร้างตารางผลลัพธ์เบื้องต้น (ตารางซิมเพล็กซ์ ที่ 1) ได้ดังนี้

	C_j	4	2	0	0	-M	
C_b	เบสิส	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	ผลลัพธ์ (b_i)
0	S_1	3	2	1	0	0	16
0	S_2	4	3	0	1	0	14
-M	A_1	7	2	0	0	1	28
	Z_j	-7M	-2M	0	0	-M	-28M
	$(C_j - Z_j)$	(4+7M)	(2+2M)	0	0	0	

ต่อไปทำการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ไปเรื่อย ๆ ตามความรู้ที่เรียนมาจนในที่สุดจะได้คำตอบที่ดีที่สุด ดังนี้

$X_1 = 3$, $X_2 = 3.5$

$S_1 = 0$, $S_2 = 12.5$, $A_1 = 0$

Maximize $Z = 19$

ลักษณะผลลัพธ์แบบต่างๆ ในการหาคำตอบตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

ในบางครั้งการหาคำตอบตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex) อาจจะให้ลักษณะผลลัพธ์แบบแปลก ๆ เช่นเดียวกับที่ได้อธิบายไว้ในวิธีกราฟ ต่อไปนี้นักศึกษาจะเห็นลักษณะของผลลัพธ์แบบแปลก ๆ จากการหาคำตอบตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ ซึ่งจะแบ่งออกเป็น 4 กรณี ดังนี้

1 คำตอบที่ดีที่สุดมีหลายคำตอบ (Alternative Solutions)

ตัวอย่างที่ 14 จงหาคำตอบของตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นต่อไปนี้ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

Maximize $Z = 50X_1 + 75X_2$

Subject to :

$$
\begin{aligned}
2X_1 + 3X_2 &\le 30 \\
5X_1 + 2X_2 &\le 40 \\
2X_2 &\le 16 \\
X_1, X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

วิธีทำ

จัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

$$\text{Maximize } Z = 50X_1 + 75X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

Subject to :

$$2X_1 + 3X_2 + S_1 = 30$$

$$5X_1 + 2X_2 + S_2 = 40$$

$$2X_2 + S_3 = 16$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

ต่อไปทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นพร้อมทั้งทำการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ไปเรื่อย ๆ จนในที่สุดได้ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3 ดังนี้

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3

	C_j	50	75	0	0	0		
C_b	เบสิส	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3*	ผลลัพธ์(b_i)	อัตราส่วน
50	X_1	1	0	½	0	-3/4	3	
0	S_2*	0	0	-5/2	1	11/4*	9	9/(11/4)= 36/11*
75	X_2	0	1	0	0	½	8	8/(1/2) = 16
	Z_j	50	75	25	0	0	750	
	$(C_j - Z_j)$	0	0	-25	0	0*		

จากตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3 นี้ ได้คำตอบดังนี้

$X_1 = 3, \quad X_2 = 8$

$S_1 = 0, \quad S_2 = 9 \quad S_3 = 0$

Maximize $Z = 750$

เมื่อพิจารณาค่า $(C_j - Z_j)$ ในตารางที่ 3 พบว่า ค่า $(C_j - Z_j)$ มีค่าเป็นลบหรือศูนย์ทุกตัวแล้ว ดังนั้นจึงถือว่าตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3 นี้เป็นตารางที่ดีที่สุดแล้ว ส่วนจะมีผลเฉลยเหมาะที่สุดอย่างอื่นอีกหรือไม่นั้นมีข้อสังเกตคือ ถ้าค่า $(C_j - Z_j)$ ของตัวแปรอมูลฐานเป็นศูนย์แสดงว่ามีผลเฉลยเหมาะที่สุดแบบอื่นอีก ก็ให้เลือกตัวแปรนั้นเป็นตัวแปรเข้า

จากตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3 ซึ่งถือว่าเป็นตารางผลเฉลยเหมาะที่สุดของตัวอย่างข้างต้น S_3 เป็นตัวแปรอมูลฐานมีค่า $(C_j - Z_j)$ เป็นศูนย์แสดงว่านอกเหนือจากผลเฉลยเหมาะที่สุดชุดนี้แล้วยังมีผลเฉลยเหมาะที่สุดแบบอื่นอีกด้วย เราจะหาผลลัพธ์นั้นได้จากการนำ S_3 เข้าเบสิส และ S_2 (ซึ่งมีค่าอัตราส่วนต่ำที่สุด) ออกจากเบสิส สร้างตารางผลลัพธ์ชุดใหม่ได้ดังนี้

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 4

การคำนวณ	C_b	C_j / เบสิส	X_1 (50)	X_2 (75)	S_1 (0)	S_2* (0)	S_3 (0)	ผลลัพธ์ (b_i)	อัตราส่วน
$R_{1N} = R_{1n} + 3/4R_{2N}$	50	X_1	1	0	-4/22	3/11	0	60/11	(60/11)/(3/11) = 20
$R_{2N} = R_{2n} / (4/11)$	0	S_3*	0	0	-10/11	4/11*	1	36/11	(36/11)/(4/11) = 9*
$R_{3N} = R_{3n} - 1/2R_{2N}$	75	X_2	0	1	5/11	-2/11	0	70/11	
		Z_j	50	75	275/11	0	0	750	
		$(C_j - Z_j)$	0	0	-275/11	0*	0		

จากตารางซิมเพล็กซ์ที่ 4 ให้ผลเฉลยเหมาะที่สุดอีกชุดหนึ่งคือ

$X_1 = 60/11, \; X_2 = 70/11$

$S_1 = 0, \; S_2 = 0 \; S_3 = 36/11$

Maximize $Z = 750$

อย่างไรก็ตามพบว่า ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 4 นี้ ให้คำตอบที่ดีที่สุดแล้ว แต่ยังมีคำตอบอื่นอีก ดังนั้นจากตารางซิมเพล็กซ์ที่ 4 นี้ จะนำ S_2 เป็นตัวแปรเข้า และ S_3 เป็นตัวแปรออก ซึ่งเมื่อทำการเปลี่ยนเบสิสโดยใช้หลัก Pivot Operation ก็จะได้ลักษณะตารางการคำนวณเหมือนตารางที่ 3 ดังนั้นจึงสรุปว่าผลเฉลยเหมาะที่สุดของตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นนี้มี 2 ชุด คือผลเฉลยเหมาะที่สุดตามตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3 และตารางซิมเพล็กซ์ที่ 4

จะเห็นได้ว่าผลเฉลยเหมาะที่สุดชุดที่ 1 (จากตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3) และชุดที่ 2 1 (จากตารางซิมเพล็กซ์ที่ 4) ให้ค่าผลลัพธ์เท่ากันคือ Maximize $Z = 750$ แต่ค่า X_1 และ X_2 แตกต่างกัน

2 คำตอบที่ไม่มีขอบเขต (Unbounded Solution)

ตัวอย่างที่ 15 จงหาคำตอบของตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นต่อไปนี้ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

Maximize $Z = 3X_1 + 2X_2$

Subject to :

$$-X_1 + X_2 \leq 2$$
$$X_1 - 3X_2 \leq 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

วิธีทำ

จัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

Maximize $Z = 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2$

Subject to :

$$-X_1 + X_2 + S_1 = 2$$
$$X_1 - 3X_2 + S_2 = 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$
$$S_1, S_2 \geq 0$$

ต่อมาทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้น พร้อมทั้งทำการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ไปเรื่อย ๆ จนในที่สุดได้ตารางที่ 2 ดังนี้

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2

	C_j	3	2	0	0		
C_b	เบสิส	X_1	X_2	S_1	S_2	ผลลัพธ์ (b_i)	อัตราส่วน
0	S_1	0	-2	1	1	6	-
3	X_1	1	-3	0	1	4	-
	Z_j	3	-9	0	3	12	
	$(C_j - Z_j)$	0	11*	0	-3		

จากตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2 พบว่า ตัวแปรออกคือ X_2 แต่เมื่อคำนวณหาอัตราส่วนเพื่อจะหาตัวแปรออก พบว่า **ไม่สามารถหาตัวแปรออกได้ ดังนั้นจึงสรุปว่าตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นนี้มีคำตอบที่ไม่มีขอบเขต** (Unbounded Solution)

3 ไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้ (Infeasible Solution)

กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นไม่สามารถหาบริเวณผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ของคำตอบ (Infeasible Region)

ตัวอย่างที่ 16 จงหาคำตอบของตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นต่อไปนี้ ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

Maximize Z $= X_1 + 2X_2$

Subject to :

$$X_1 + X_2 \geq 2$$
$$X_1 + X_2 \leq 1$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

วิธีทำ

จัดตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ได้ดังนี้

Maxmize Z $= X_1 + 2X_2 + 0S_1 - MA_1 + 0S_2$

Subject to :

$$X_1 + X_2 - S_1 + A_1 = 2$$
$$X_1 + X_2 + S_2 = 1$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$
$$S_1, S_2, A_1 \geq 0$$

เมื่อได้ทำการจัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานแล้ว ต่อจากนั้นทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นพร้อมทั้งทำการตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์จนในที่สุดได้ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2 ดังนี้

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2

	C_j	1	2	0	-M	0	
C_b	เบสิส	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	ผลลัพธ์ (b_i)
-M	A_1	0	0	-1	1	-1	1
2	X_2	1	1	0	0	1	1
	Z_j	2	2	M	-M	(M+2)	(2-M)
	$(C_j - Z_j)$	-1	0	-M	0	(-M-2)	

เมื่อทำการตรวจสอบผลลัพธ์ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2 โดยพิจารณาค่า $(C_j - Z_j)$ พบว่าผลลัพธ์ชุดที่สองนี้เป็นผลเฉลยเหมาะที่สุด ได้ค่าตัวแปรต่างๆ ดังนี้

$X_1 = 0, \; X_2 = 1$

$S_1 = 0, \; S_2 = 0, \; A_1 = 1$

แต่การที่ตัวแปรเทียม A_1 **ยังคงอยู่ในเบสิส** โดยในที่นี้มีค่าเท่ากับ 1 ทำให้ฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์มีค่า (Z) $= 1(0) + 2(1) + 0(0) - M(1) + 0(0) = \mathbf{2 - M}$

แสดงว่าตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นนี้ ไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้

4 กรณีสภาพซ้อนสถานะ (Degeneracy)

เป็นลักษณะผลลัพธ์ที่มีตัวแปรมูลฐานบางตัวมีค่าเท่ากับศูนย์ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า เมื่อใดก็ตามที่จำนวนตัวแปรที่มีค่าเป็นบวกมีจำนวนน้อยกว่าจำนวนเงื่อนไขบังคับเรียกว่าเกิดสภาพซ้อนสถานะ (Degeneracy) ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วนที่ต่ำที่สุดเท่ากัน ทำให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ไม่พัฒนาดีขึ้นตามผลลัพธ์ที่เปลี่ยนไป

ตัวอย่างที่ 17 จงหาคำตอบของตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นต่อไปนี้ ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

Maximize $Z = 4X_1 + 3X_3$

Subject to :

$$\begin{aligned} X_1 - X_2 &\le 4 \\ 2X_1 + X_3 &\le 8 \\ X_1 + X_2 + X_3 &\ge 6 \\ X_1, X_2, X_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ

จัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน พร้อมทั้งทำการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้น และตรวจสอบและพัฒนาผลลัพธ์ ได้ดังนี้

Maximize $Z = 4X_1 + 0X_2 + 3X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Subject to :

$$\begin{aligned} X_1 - X_2 + 0X_3 + S_1 &= 2 \\ 2X_1 + 0X_2 + X_3 + S_2 &= 8 \\ X_1 + X_2 + X_3 + S_3 &= 6 \\ X_1, X_2, X_3 &\ge 0 \\ S_1, S_2, S_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

ตารางผลลัพธ์เบื้องต้น (ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1)

	C_j	4	0	3	0	0	0		
C_b	เบสิส	X_1 *	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	ผลลัพธ์(b_i)	อัตราส่วน
0	S_1*	1*	-1	0	1	0	0	4	4/1 = 4*
0	S_2	2	0	1	0	1	0	8	8/2 = 4
0	S_3	1	1	1	0	0	1	6	6/1 = 6
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	
	$(C_j - Z_j)$	4*	0	3	0	0	0		

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2

C_b	เบสิส	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	ผลลัพธ์ (b_i)	อัตราส่วน
	C_j	4	0	3	0	0	0		
4	X_1	1	-1	0	1	0	0	4	-
0	S_2	0	2*	1	-2	1	0	0	0*
0	S_3	0	2	1	-1	0	1	2	1
	Z_j	4	-4	0	4	0	0	16	
	$(C_j - Z_j)$	0	4*	3	-4	0	0		

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3

C_b	เบสิส	X_1	X_2	X_3*	S_1	S_2	S_3	ผลลัพธ์ (b_i)	อัตราส่วน
	C_j	4	0	3	0	0	0		
4	X_1	1	0	½	0	½	0	4	4/(1/2)= 8
0	X_2*	0	1	½*	-1	½	0	0	0/(1/2)=0*
0	S_3	0	0	0	1	-1	1	2	-
	Z_j	4	0	2	0	2	0	16	
	$(C_j - Z_j)$	0	0	1*	0	-2	0		

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 4

C_b	เบสิส	X_1	X_2	X_3	S_1*	S_2	S_3	ผลลัพธ์(b_i)	อัตราส่วน
	C_j	4	0	3	0	0	0		
4	X_1	1	-1	0	1	0	0	4	4/1 = 4
3	X_3	0	2	1	-2	1	0	0	-
0	S_3*	0	0	0	1*	-1	1	2	2/1 = 2*
	Z_j	4	2	3	-2	3	0	16	
	$(C_j - Z_j)$	0	-2	0	2*	-3	0		

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 5

	C_j	4	0	3	0	0	0	
C_b	เบสิส	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	ผลลัพธ์ (b_i)
4	X_1	1	-1	0	0	1	-1	2
3	X_3	0	2	1	0	-1	2	4
0	S_1	0	0	0	1	-1	1	2
	Z_j	4	2	3	0	1	2	20
	$(C_j - Z_j)$	0	-2	0	0	-1	-2	

จากตารางซิมเพล็กซ์ชุดที่ 5 ค่า $(C_j - Z_j)$ เป็นลบหรือศูนย์หมดทุกค่า แสดงว่าเป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดแล้ว อย่างไรก็ดีตามตารางการคำนวณข้างต้นได้เกิดกรณีสภาพซ้อนสถานะ (Degeneracy) ขึ้น โดยพิจารณาจากประเด็นดังต่อไปนี้

1. ตารางผลลัพธ์เบื้องต้น (ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1) มีค่าอัตราส่วนเท่ากัน 2 ค่า คือ 4
2. ในตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2 ตัวแปรมูลฐาน S_2 มีค่าเท่ากับ 0 (แสดงว่าเกิดสภาพซ้อนสถานะในตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2)
3. ในตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3 ตัวแปรมูลฐาน X_2 มีค่าเท่ากับ 0 (แสดงว่าเกิดสภาพซ้อนสถานะในตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3)
4. ในตารางซิมเพล็กซ์ที่ 4 ตัวแปรมูลฐาน X_3 มีค่าเท่ากับ 0 (แสดงว่าเกิดสภาพซ้อนสถานะในตารางซิมเพล็กซ์ที่ 4)
5. ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ในผลลัพธ์ของตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2, 3, และ 4 ไม่มีการพัฒนาให้ดีขึ้น นั่นคือค่า Z_j ยังคงมีค่าเท่าเดิมคือ 16

การหาคำตอบตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

ตามที่ทราบกันในตอนต้นแล้วว่าการหาคำตอบตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นสามารถทำได้ 3 วิธี ด้วยกัน คือ 1. วิธีกราฟ 2. วิธีซิมเพล็กซ์ 3. วิธีการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ สองวิธีแรกได้นำเสนอไปแล้ว ดังนั้นในส่วนนี้จะขออธิบายวิธีการใช้โปรแกรมคอมพิวแตอร์

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูปที่ใช้ในการหาคำตอบกำหนดการเชิงเส้นมีอยู่หลายโปรแกรมด้วยกัน ซึ่งรายงานผลจากโปรแกรมแต่ละโปรแกรมก็คล้ายๆ กัน ในที่นี้จะนำเสนอผลจากการหาคำตอบกำหนดการเชิงเส้นด้วยโปรแกรม LINDO โดยจะขอยกตัวอย่างปัญหาใหม่เพื่อให้ผู้อ่านได้มีทักษะในการสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นมากยิ่งขึ้น ดังนี้

1. กรณีการหาค่าสูงสุด (Maximization)

ตัวอย่างที่ 18

โรงงานผลิตพัดลมไฟฟ้าแห่งหนึ่ง ผลิตพัดลม 3 แบบ คือ แบบตั้งโต๊ะ แบบตั้งพื้น และแบบติดเพดาน พัดลมทั้ง 3 แบบ ต้องผ่านขั้นตอนการผลิตที่สำคัญ 3 ขั้นตอนคือ การผลิตชิ้นส่วน การประกอบ และการตรวจสอบ ข้อมูลของเวลาที่ใช้ในการผลิตต่อเครื่อง พร้อมทั้งจำนวนแรงงานและชิ้นส่วนที่มีในแต่ละแผนกใน 1 วัน แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

แผนก	จำนวนชิ้นส่วนหรือเวลาที่ใช้ในการผลิตต่อเครื่อง			จำนวนชิ้นส่วนหรือเวลาที่มี
	ตั้งโต๊ะ	ตั้งพื้น	ติดเพดาน	
ผลิตชิ้นส่วน	0.5 ชิ้น	4 ชิ้น	3 ชิ้น	960 ชิ้น/วัน
ประกอบ	0.75 ชม. - คน	2 ชม.- คน	1 ชม. - คน	400 ชม. - คน/วัน
ตรวจสอบ	0.25 ชม. - คน	1 ชม. - คน	0.75 ชม. - คน	160 ชม. - คน/วัน

จากการศึกษากำไรต่อเครื่อง พบว่า

แบบตั้งโต๊ะเป็น 40 บาท แบบตั้งพื้นเป็น 120 บาท และแบบติดเพดานเป็น 60 บาท และจากข้อมูลของฝ่ายการตลาดพบว่าพัดลมติดเพดานไม่ควรผลิตเกินวันละ 10 เครื่อง เนื่องจากมีความต้องการจำกัด

ต้องการทราบว่าในแต่ละวันฝ่ายผลิตควรจะผลิตพัดลมแต่ละแบบจำนวนกี่เครื่อง จึงจะทำให้ได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ

ในการแก้ปัญหาข้างต้น ก่อนอื่นเราจะต้องทำการสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นจากปัญหาขึ้นมาก่อน ซึ่งสามารถสร้างได้ดังนี้

ให้ X_1 = จำนวนพัดลมตั้งโต๊ะที่จะผลิตต่อวัน (เครื่อง)

X_2 = จำนวนพัดลมตั้งพื้นที่จะผลิตต่อวัน (เครื่อง)

X_3 = จำนวนพัดลมติดเพดานที่จะผลิตต่อวัน (เครื่อง)

Z = กำไรรวมที่ได้รับจากการผลิตพัดลมทั้ง 3 แบบ

$$\text{Maximize } Z = 40X_1 + 120X_2 + 60X_3$$

Subject to :

$$\begin{array}{rcr}
0.5X_1 + 4X_2 + 3X_3 & \leq & 960 \\
0.75X_1 + 2X_2 + 1X_3 & \leq & 400 \\
0.25X_1 + 1X_2 + 0.75X_3 & \mathrm{I} & 160 \\
1X_3 & \mathrm{I} & 10 \\
X_1, X_2, X_3 & \geq & 0
\end{array}$$

เมื่อได้ทำการสร้างตัวแบบเสร็จแล้ว ขั้นต่อไปจึงทำการหาคำตอบจากตัวแบบที่ได้สร้างไว้ ซึ่งในที่นี้จะใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูป "LINDO" เพื่อหาคำตอบ ซึ่งในการหาคำตอบโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูปนี้ ก่อนที่เราจะป้อนข้อมูลเข้าคอมพิวเตอร์ มีสิ่งสำคัญ 2 ประการที่เราควรจะต้องระวัง ได้แก่

1. ตัวแปรทุกตัวตามตัวแบบจะต้องไม่เป็นค่าลบ และเนื่องจากข้อกำหนดนี้จะเป็นความเจริงเสมอ (เนื่องจากตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น จะมีข้อจำกัดเกี่ยวกับตัวแปรทุกตัวจะต้องไม่เป็นค่าลบเสมอ) จึงไม่จำเป็นต้องป้อนข้อมูลส่วนนี้เข้าไป
2. ตัวแปรทุกตัวของเงื่อนไขบังคับจะต้องอยู่ด้านซ้ายมือ ส่วนค่าคงที่จะอยู่ด้านขวามือของสมการหรืออสมการ ก่อนที่จะป้อนข้อมูลเข้าคอมพิวเตอร์ต้องตรวจสอบ และถ้าตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นมิได้อยู่ในรูปแบบดังกล่าว ให้ปรับปรุงตัวแบบให้เรียบร้อยเสียก่อน

เมื่อได้ป้อนตัวแบบลงในโปรแกรม LINDO แล้ว ก็สามารถสั่งให้โปรแกรม LINDO หาคำตอบ จากตัวแบบของตัวอย่างที่ 18 เมื่อหาคำตอบด้วยโปรแกรม LINDO จะได้ผลลัพธ์ดังแสดงในรูปที่ 27

```
 look all

MAX      40 X1 + 120 X2 + 60 X3
SUBJECT TO
        2)   0.5 X1 + 4 X2 + 3 X3 <=   960
        3)   0.75 X1 +   X2 + X3 <=   400
        4)   0.25 X1 + X2 + 0.75 X3 <=   160
        5)   X3 <=   10
END
```

ส่วนที่ 1 ตัวแบบ

```
: go
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)      22400.000
```

ค่าของฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์

```
 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1       320.000000          .000000
       X2        80.000000          .000000
       X3          .000000        10.000000
```

ตัวแปร

```
      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)       480.000000          .000000
       3)          .000000        40.000000
       4)          .000000        40.000000
       5)        10.000000          .000000

NO. ITERATIONS=        2
```

เงื่อนไขบังคับ

ส่วนที่ 2 คำตอบของปัญหา

```
DO RANGE(SENSITIVITY) ANALYSIS?
? y

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                              OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE          DECREASE
      X1       40.000000        5.000000         10.000000
      X2      120.000000       40.000000          8.000000
      X3       60.000000       10.000000          INFINITY

                              RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                   RHS          INCREASE          DECREASE
       2      960.000000        INFINITY        480.000000
       3      400.000000       80.000000         80.000000
       4      160.000000       40.000000         26.666670
       5       10.000000        INFINITY         10.000000
```

ส่วนที่ 3 ข้อมูลเพื่อการวิเคราะห์ความไวต่อการเปลี่ยนแปลง

รูปที่ 27 ผลลัพธ์จากโปรแกรม LINDO ตามตัวอย่างที่ 18