บทที่ 9
การคำนวณงานสามเหลี่ยม

1. การเตรียมข้อมูล

ปกติกองสนามจำเป็นต้องทำการคำนวณงานสนามซึ่งยังมิได้ปรับค่าให้เสร็จสิ้น การคำนวณเริ่มแต่ได้ผลการรังวัดจากสมุดสนาม ตรวจสอบสมุดสนาม การคำนวณหาอวัยวะของสามเหลี่ยมไปจนกระทั่งการคำนวณค่าพิกัดภูมิศาสตร์ของโครงข่ายสามเหลี่ยมหลักนั้น รวมทั้งการคำนวณระดับเชิงตรีโกณมิติจากรายการย่อ หรือรายการตรอกย่อระยะเซนิธ

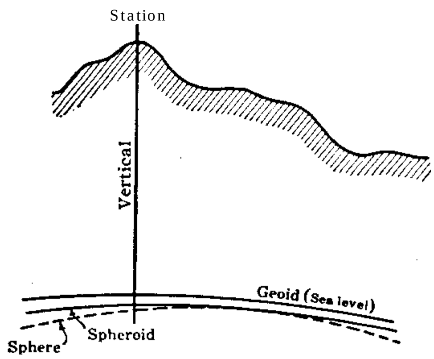
จากสมุดสนามงานสามเหลี่ยม เราได้รับค่าของมุมทุกมุม ซึ่งสมมุติว่าไม่มีความเคลื่อนคลาดจากเครื่องมือ การไม่ได้ตั้งกล้องที่หมุด การเห็นภาพไม่ชัด ระดับของที่หมายเล็ง ฯลฯ ก่อนที่มุมเหล่านี้นำไปใช้เพื่อคำนวณหาสามเหลี่ยม ควรได้ตรวจสอบดูเพื่อแน่ใจว่ามุมเหล่านี้สมนัยกับเงื่อนไขเชิงเรขาคณิตที่ปรากฏอยู่ในระหว่างมุมเหล่านี้ หากที่สถานีใด ๆ มีมุม 2 มุม หรือมากกว่า และผลรวมของมุมเหล่านี้ได้ทำการรังวัดแล้ว ต่อไปต้องแก้มุมให้ถูกต้องเพื่อว่าจะได้ค่าเท่ากับผลบวกของมันอย่างแท้จริง หากบวกมุมที่รังวัดรอบจุด และเมื่อทำการปรับค่าแล้วจะต้องรวมกันได้เท่ากับ 360° ในกรณีที่การรังวัดมุมมีความละเอียดไม่เหมือนกัน เช่น เครื่องมือรังวัด และจำนวนชุด หรือจำนวนมุมที่ได้ต่างกัน เป็นต้น มุมต่าง ๆ ควรมีน้ำหนักที่เหมาะสมอันหนึ่ง และถ้าหากมีความต้องการค่าที่ดีที่สุดอันควรทำได้ มุมเหล่านั้นต้องทำการปรับค่าโดยใช้อนุจัตุรัสวิธี

เมื่อการคำนวณปรับค่ามุม ณ ตำบลรังวัดแล้ว ต้องตรวจสอบรูปสามเหลี่ยมต่าง ๆ ว่าผลรวมของมุมทั้งสามแต่ละรูปเป็นไปตามจุดประสงค์ คือว่า ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมจะต้องได้เท่ากับ 180° บวกด้วยเศษทรงกลมของรูปสามเหลี่ยม เนื่องจากพื้นผิวพิภพโค้งเส้นดิ่ง ณ จุดยอดมุมของสามเหลี่ยมทั้ง 3 จุดจะไม่ขนานกัน จากเหตุอันนี้เองผลรวมของ

มุมทั้งสามจะเกิน 180° ไปจำนวนหนึ่งซึ่งจะได้ปฏิภาคอันแท้จริงกับบนพื้นผิวทรงกลม และถ้าพิจารณาบนพื้นผิวสเฟียรอยด์ก็เกือบจะได้ปฏิภาคกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

เพราะว่าพื้นผิวพิภพเป็นโค้งรีมิใช่โค้งวงกลม ความเคลื่อนคลาดในทิศทางส่องที่หมายจึงเกิดขึ้น แต่มีขนาดเล็กมากแม้ว่าวัตถุที่ส่องนั้นจะอยู่เหนือพื้นระดับน้ำทะเลหลาย ๆ พันเมตรก็ตาม ฉะนั้นจึงปรากฏว่าถ้ายอดมุมของรูปสามเหลี่ยมบนผิวทรงรีฉายลงไปในแนวดิ่งลงไปไว้บนพื้นผิวทรงกลมที่สัมผัส ณ ศูนย์กลางของแนวดึงดูดพิภพที่มีต่อสามเหลี่ยมนั้น ความเคลื่อนคลาดที่เกิดขึ้นเช่นนั้นในทางมุมราบของสามเหลี่ยมจะมีขนาดเล็กกว่าความเคลื่อนคลาดในการรังวัดมุมเสียอีก เพราะจุดต่าง ๆ บนพื้นผิวทรงกลม และจุดเหล่านั้นที่อยู่บนพื้นผิวทรงรีจะเฉ หรือแยกจากกันเป็นระยะสั้นมากเมื่อเทียบเคียงกันดี ความจริงอันนี้จึงทำให้เราสามารถคำนวณหาสามเหลี่ยมทรงรีให้เป็นอย่างเดียวกันกับสามเหลี่ยมทรงกลม และช่วยให้การคำนวณง่ายขึ้นอย่างมาก ระยะของด้านรูปสามเหลี่ยมบนพื้นผิว 2 พื้นผิวนี้เท่ากันได้ในเชิงปฏิบัติ

ในเรื่องนี้จึงยึดถือได้อย่างดีว่าถ้าหากจะจำลองภาพภูมิประเทศบนพื้นผิวพิภพลงไปไว้บนพื้นผิวลูกโลกซึ่งมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 18 นิ้วแล้วไซร้ กำหนดสูงต่าง ๆ ทั้งหมดก็จะไม่โตไปกว่าความหนาของรอยเคลือบ หรือสีทาทับของน้ำมันชักเงาบนพื้นผิวลูกโลก กำหนดสูงของพื้นยีออยด์จากพื้นผิวสเฟียรอยด์จะมีขนาดเล็กกว่านี้เสียอีก จากที่กล่าวมานี้ย่อมจะให้แนวความคิดบางประการถึงความเล็กน้อยของความเคลื่อนคลาดระหว่างสามเหลี่ยมบนพื้นผิวทรงกลมเปรียบกับบนพื้นผิวสเฟียรอยด์ (ดูรูป)



รูป 9.1

ควรจดจำไว้ว่าเนื่องจากสถานีสามเหลี่ยมเองอยู่สูงกว่าระดับน้ำทะเลด้วยขนาดต่างกัน จุดเหล่านี้ทั้งหมดสมมุติได้ฉายลงไปในแนวดิ่งสู่พื้นผิวสเฟียรอยด์ก่อนเริ่มการคำนวณสามเหลี่ยม จุดต่าง ๆ ดังกล่าวจะได้นำไปกล่าวในเรื่องการหาค่ารูปสามเหลี่ยม ตำแหน่งพิกัดภูมิศาสตร์ของสถานีก็คือ จุดต่าง ๆ อันเป็นจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมนั้น ซึ่งจุดเหล่านี้สถิตอยู่บนพื้นผิวสเฟียรอยด์ และมิได้สถิตอยู่บนพื้นผิวพิภพจริงตามที่ปรากฏอยู่จริง ๆ ในภูมิประเทศ

ในการคำนวณรูปสามเหลี่ยมซึ่งจะได้กล่าวต่อไป การคำนวณต่อไปนี้ใช้ประมาณเท่านั้น และสมมุติเอาว่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณนั้นเราไม่คำนึงถึงอาจตัดทิ้งเสียได้

1) การทอนลงหาพื้นระดับน้ำทะเลปานกลาง เป็นการทอนทิศทางที่รังวัดลงยังพื้นที่ตรงกัน คือ พื้นยีออยด์ (หรือพื้นจริง) มิใช่ทอนลงพื้นสเฟียรอยด์ที่ใช้เป็นพื้นแทนพิภพจริง

2) ผลเกิดจากการความเฉของเส้นดิ่งเฉพาะท้องถิ่น ปกติเรามิได้นำมาพิจารณาอย่างไรก็ดีในบางกรณีค่านี้มีมากพอให้เห็นได้

3) ผลเกิดจากสภาพของดินฟ้าอากาศในทิศทางเล็ง (องค์ประกอบทางระดับของการหักเหของแสง) ถือเป็นสิ่งเล็กน้อยอาจตัดทิ้งเสียได้

4) การทอนทิศทางที่ส่อง (พื้นแบนโค้ง) ลงเป็นเส้นยีออเดติค หรือเส้นที่สั้นที่สุดเราไม่คำนึงถึง มีความจริงอยู่อันหนึ่งสามเหลี่ยม 8 รูปที่ประกอบตัวเองขึ้นด้วยโค้งแบน (Plane Curve) ซึ่งถือประหนึ่งว่าสามเหลี่ยมเหล่านั้นมีลักษณะอย่างเดียวกัน

2. คำนวณสามเหลี่ยมทรงกลมโดยอาศัยสามเหลี่ยมพื้นราบช่วย

การคำนวณหารูปสามเหลี่ยมทรงกลมในโครงข่ายโดยตรงนั้นไม่มีอะไรยุ่งยากนัก วิธีนี้อาจหาทางหลีกเลี่ยงได้โดยการใช้หลักการของทฤษฎีเลอยองเดรอะ คือ

"ถ้าเรามีรูปสามเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง ซึ่งระยะของด้านสั้นมากเมื่อเปรียบกับความยาวของรัศมีของทรงกลม และในทำนองเดียวกันสามเหลี่ยมพื้นราบมีด้านเท่ากันกับด้านของรูปสามเหลี่ยมทรงกลมที่ตรงกันแล้ว มุมที่จุดยอดของรูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่ตรงกันนี้จะต่างกันด้วยจำนวนอย่างเดียวกันโดยประมาณ นั่นคือ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{3}$ ของเศษทรงกลมของรูปสามเหลี่ยมนั้น"

3. เศษทรงกลม

เศษทรงกลมของรูปสามเหลี่ยมย่อมเป็นปฏิภาคตรงกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนั้น ตามที่ทราบจากเรขาคณิตทรงกลม

ฉะนั้นถ้า A' เป็นพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

R คือ รัศมีทรงกลม

S พื้นที่ผิวของทรงกลม

e คือ เศษทรงกลมของรูปสามเหลี่ยม

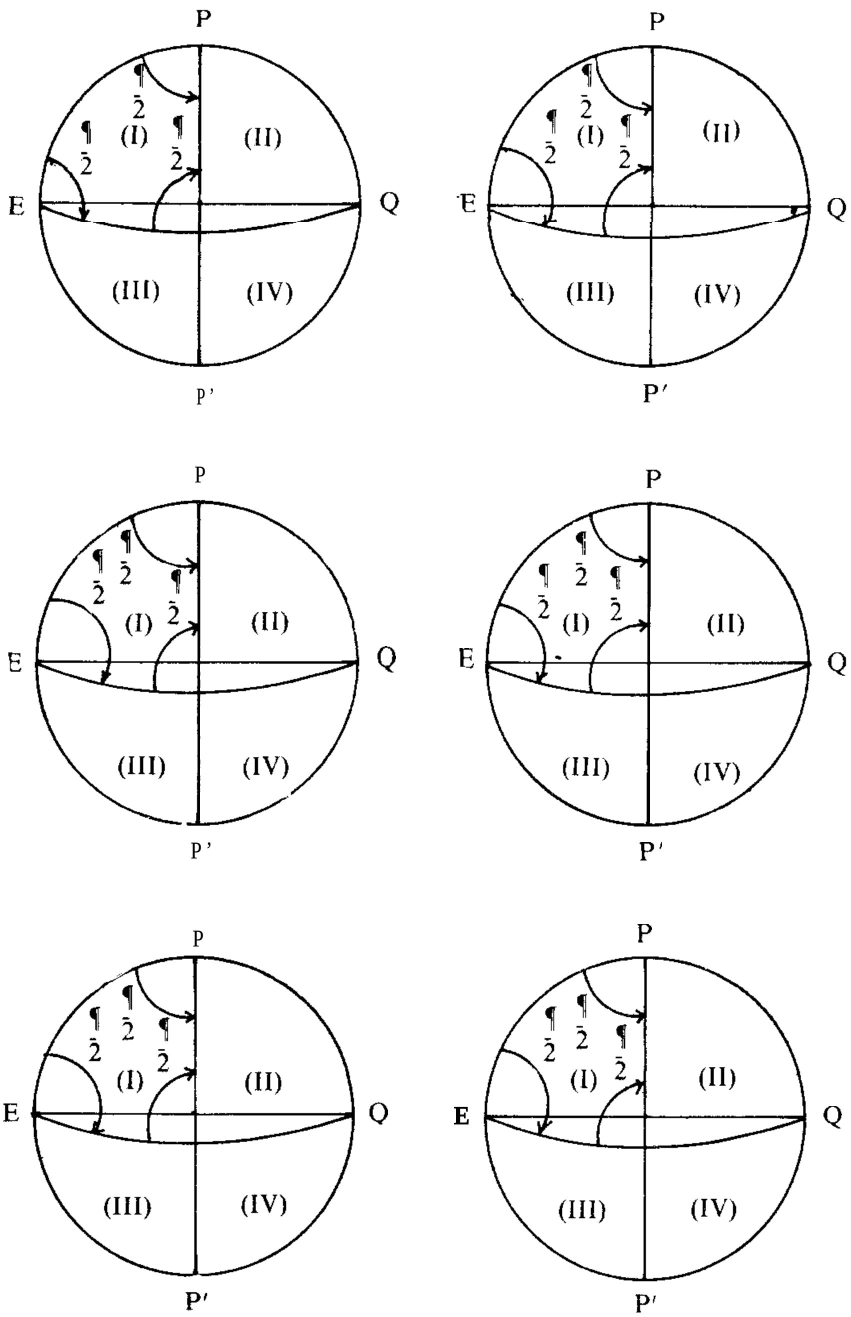
เนื่องจากเศษทรงกลมของ Tri-rectangular Triangle เป็น $\frac{\P}{2}$ จึงเขียนได้ว่า

$$\frac{e}{A'} = \frac{\frac{\P}{2}}{\frac{1}{8}S}$$

เนื่องจากพื้นที่ของพื้นผิวทรงกลม $= 4\P R^2 = s$

$$\frac{2e}{\P} = \frac{8A'}{4\P R^2}$$

$$e = \frac{A'}{R^2}$$



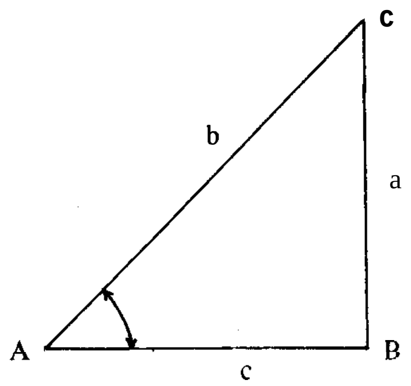
รูป 9.2

เพือนิพจน์ e เป็นพิลิบดา หารด้วย arc 1″ จึงได้

$$e'' \quad \frac{A'}{R^2 \text{arc } 1''}$$

ในรูปพื้นที่รูปสามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2}c.a = \frac{1}{2}b.c.\sin A$

$$e'' = \frac{bc \sin A}{2R^2 \text{arc } 1''} \quad \ldots\ldots\ldots (56)$$



รูป 9.3

ถ้า bc เป็นด้าน 2 ด้าน และ A เป็นมุมในระหว่างของพื้นสามเหลี่ยมพื้นราบ b และ c จึงเป็นหน่วยเชิงเส้นตรง

รูปทรงกลมซึ่งสัมผัสมีสเฟียรอยด์ที่ศูนย์กลางแรงดึงดูดของสามเหลี่ยม ซึ่งมีความโค้งเฉลี่ยอย่างเดียวกัน จึงได้รัศมีของทรงกลมเป็น $\sqrt{R_m N}$

เพราะฉะนั้น
$$e'' = \frac{bc \sin A}{2R_m N \text{ arc } 1''} = mbc \sin A \quad \ldots\ldots\ldots (57)$$

ซึ่งค่าของ log จำนวน $\frac{1}{2R_m N \text{ arc } 1''} = m$ นั้นจะคำนวณหาไว้ ณ ละติจูดต่าง ๆ ทำเป็นตารางไว้

ละติจูดที่ใช้หาค่า m คือ ละติจูดปานกลางของจุดยอดมุมทั้ง 3 ของรูปสามเหลี่ยม

ปัญหา สามเหลี่ยมพื้นราบช่วยนี้ คือ การเชื่อมชายของสามเหลี่ยมทรงกลม โดยลากเส้นมาจากจุดถึงจุดด้วยเส้นตรงใช่หรือไม่ รูปสามเหลี่ยม 2 รูปนี้เหมือนกันหรือเปล่า ?

สูตร e″ ที่ได้จากสมการข้างต้น (56) และ (57) มีความละเอียดอย่างพอเพียงสำหรับสามเหลี่ยมทั้งหมด ยกเว้นรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดใหญ่ที่สุด 2-3 รูป เช่น รูปสามเหลี่ยมที่ปรากฏในรูปเหลี่ยมของโครงข่าย Davidson ในรัฐแคลิฟอร์เนีย และในรัฐเนวาดา เมื่อด้านของรูปสามเหลี่ยมยาว 100 ไมล์ อาจต้องใช้สูตรต่อไปนี้ซึ่งมีความละเอียดมากกว่า

$$e'' = \frac{\text{พื้นที่}}{R^2 \sin 1''}\left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24R^2}\right) \quad \ldots\ldots(58)$$

หรือ

$$e_1'' = e'' + e' \times \frac{a'' + b^2 + c^2}{24R^2}$$

สูตร (58) หาได้ดังนี้

จากตรีโกณมิติเราอาจเริ่มด้วย $\tan \frac{e''}{4}$ คือ

$$\tan \frac{e}{4} = \frac{\sin\frac{1}{4}(A + B + C - 180) \cdot \cos\frac{1}{4}(A + B - C + 180)}{\cos\frac{1}{4}(A + B + C - 180)\cos\frac{1}{4}(A + B - C + 180)}$$

โดยใช้สูตร cos x sin y กับ cos x cos y ในเทอมของผลบวกครึ่งมุมกับผลต่างครึ่งมุม จึงได้

$$\tan \frac{e}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A + B) - \sin\frac{1}{2}(180 - C)}{\cos\frac{1}{2}(A + B) - \cos\frac{1}{2}(180 - C)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A + B) - \frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A + B) + \sin\frac{1}{2}C}$$

นำค่านี้แทนลงในสมการเดอะลองเบรอ (Delambre's Equations)

$$\tan \frac{e}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a - b) - \cos\frac{1}{2}C. \quad \frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(a + b) + \cos\frac{1}{2}C. \sin\frac{1}{2}C}$$

ใช้สูตร cos x + cos y และ cos x − cos y จะได้

$\frac{1}{2}$ $- b).\tan\frac{1}{2}(s - c)$

ซึ่งอันนี้เป็น Lhuillier's Theorem

(คือ $\frac{s}{R} = x$ และ $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots\ldots\ldots$)

tan

$$\left(\frac{s - c}{2R} + \frac{(s - c)^3}{24R^3}\right)$$

$$(A) = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

ฉะนั้น $A^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$

$$\tan^2\frac{e}{4} = \frac{A^2}{16R^4} + \frac{A^2}{192R^6}\left((s - a)' + (s - b)^2 + (s \quad c)^2 + s^2\right)$$

$$= \frac{A^2}{16R^4} + \frac{A^2}{192R^6}(a^2 + b^2 + c^2)$$