บทที่ 9
การคำนวณงานสามเหลี่ยม

1. การเตรียมข้อมูล

ปกติกองสนามจำเป็นต้องทำการคำนวณงานสนามซึ่งยังมิได้ปรับค่าให้เสร็จสิ้น การคำนวณเริ่มแต่ได้ผลการรังวัดจากสมุดสนาม ตรวจสอบสมุดสนาม การคำนวณหาอวัยวะของสามเหลี่ยมไปจนกระทั่งการคำนวณค่าพิกัดภูมิศาสตร์ของโครงข่ายสามเหลี่ยมหลักนั้น รวมทั้งการคำนวณระดับเชิงตรีโกณมิติจากรายการย่อ หรือรายการตรอกย่อระยะเซนิธ

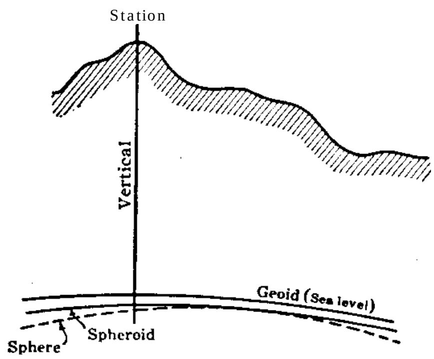
จากสมุดสนามงานสามเหลี่ยม เราได้รับค่าของมุมทุกมุม ซึ่งสมมุติว่าไม่มีความเคลื่อนคลาดจากเครื่องมือ การไม่ได้ตั้งกล้องที่หมุด การเห็นภาพไม่ชัด ระดับของที่หมายเล็ง ฯลฯ ก่อนที่มุมเหล่านี้นำไปใช้เพื่อคำนวณหาสามเหลี่ยม ควรได้ตรวจสอบดูเพื่อแน่ใจว่ามุมเหล่านี้สมนัยกับเงื่อนไขเชิงเรขาคณิตที่ปรากฏอยู่ในระหว่างมุมเหล่านี้ หากที่สถานีใด ๆ มีมุม 2 มุม หรือมากกว่า และผลรวมของมุมเหล่านี้ได้ทำการรังวัดแล้ว ต่อไปต้องแก้มุมให้ถูกต้องเพื่อว่าจะได้ค่าเท่ากับผลบวกของมันอย่างแท้จริง หากบวกมุมที่รังวัดรอบจุด และเมื่อทำการปรับค่าแล้วจะต้องรวมกันได้เท่ากับ 360° ในกรณีที่การรังวัดมุมมีความละเอียดไม่เหมือนกัน เช่น เครื่องมือรังวัด และจำนวนชุด หรือจำนวนมุมที่ได้ต่างกัน เป็นต้น มุมต่าง ๆ ควรมีน้ำหนักที่เหมาะสมอันหนึ่ง และถ้าหากมีความต้องการค่าที่ดีที่สุดอันควรทำได้ มุมเหล่านั้นต้องทำการปรับค่าโดยใช้อนุจัตุรัสวิธี

เมื่อการคำนวณปรับค่ามุม ณ ตำบลรังวัดแล้ว ต้องตรวจสอบรูปสามเหลี่ยมต่าง ๆ ว่าผลรวมของมุมทั้งสามแต่ละรูปเป็นไปตามจุดประสงค์ คือว่า ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมจะต้องได้เท่ากับ 180° บวกด้วยเศษทรงกลมของรูปสามเหลี่ยม เนื่องจากพื้นผิวพิภพโค้งเส้นดิ่ง ณ จุดยอดมุมของสามเหลี่ยมทั้ง 3 จุดจะไม่ขนานกัน จากเหตุอันนี้เองผลรวมของ

มุมทั้งสามจะเกิน 180° ไปจำนวนหนึ่งซึ่งจะได้ปฏิภาคอันแท้จริงกับบนพื้นผิวทรงกลม และถ้าพิจารณาบนพื้นผิวสเฟียรอยด์ก็เกือบจะได้ปฏิภาคกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

เพราะว่าพื้นผิวพิภพเป็นโค้งรีมิใช่โค้งวงกลม ความเคลื่อนคลาดในทิศทางส่องที่หมายจึงเกิดขึ้น แต่มีขนาดเล็กมากแม้ว่าวัตถุที่ส่องนั้นจะอยู่เหนือพื้นระดับน้ำทะเลหลาย ๆ พันเมตรก็ตาม ฉะนั้นจึงปรากฏว่าถ้ายอดมุมของรูปสามเหลี่ยมบนผิวทรงรีฉายลงไปในแนวดิ่งลงไปไว้บนพื้นผิวทรงกลมที่สัมผัส ณ ศูนย์กลางของแนวดึงดูดพิภพที่มีต่อสามเหลี่ยมนั้น ความเคลื่อนคลาดที่เกิดขึ้นเช่นนั้นในทางมุมราบของสามเหลี่ยมจะมีขนาดเล็กกว่าความเคลื่อนคลาดในการรังวัดมุมเสียอีก เพราะจุดต่าง ๆ บนพื้นผิวทรงกลม และจุดเหล่านั้นที่อยู่บนพื้นผิวทรงรีจะเฉ หรือแยกจากกันเป็นระยะสั้นมากเมื่อเทียบเคียงกันดี ความจริงอันนี้จึงทำให้เราสามารถคำนวณหาสามเหลี่ยมทรงรีให้เป็นอย่างเดียวกันกับสามเหลี่ยมทรงกลม และช่วยให้การคำนวณง่ายขึ้นอย่างมาก ระยะของด้านรูปสามเหลี่ยมบนพื้นผิว 2 พื้นผิวนี้เท่ากันได้ในเชิงปฏิบัติ

ในเรื่องนี้จึงยึดถือได้อย่างดีว่าถ้าหากจะจำลองภาพภูมิประเทศบนพื้นผิวพิภพลงไปไว้บนพื้นผิวลูกโลกซึ่งมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 18 นิ้วแล้วไซร้ กำหนดสูงต่าง ๆ ทั้งหมดก็จะไม่โตไปกว่าความหนาของรอยเคลือบ หรือสีทาทับของน้ำมันชักเงาบนพื้นผิวลูกโลก กำหนดสูงของพื้นยีออยด์จากพื้นผิวสเฟียรอยด์จะมีขนาดเล็กกว่านี้เสียอีก จากที่กล่าวมานี้ย่อมจะให้แนวความคิดบางประการถึงความเล็กน้อยของความเคลื่อนคลาดระหว่างสามเหลี่ยมบนพื้นผิวทรงกลมเปรียบกับบนพื้นผิวสเฟียรอยด์ (ดูรูป)



รูป 9.1

ควรจดจำไว้ว่าเนื่องจากสถานีสามเหลี่ยมเองอยู่สูงกว่าระดับน้ำทะเลด้วยขนาดต่างกัน จุดเหล่านี้ทั้งหมดสมมุติได้ฉายลงไปในแนวดิ่งสู่พื้นผิวสเฟียรอยด์ก่อนเริ่มการคำนวณสามเหลี่ยม จุดต่าง ๆ ดังกล่าวจะได้นำไปกล่าวในเรื่องการหาค่ารูปสามเหลี่ยม ตำแหน่งพิกัดภูมิศาสตร์ของสถานีก็คือ จุดต่าง ๆ อันเป็นจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมนั้น ซึ่งจุดเหล่านี้สถิตอยู่บนพื้นผิวสเฟียรอยด์ และมิได้สถิตอยู่บนพื้นผิวพิภพจริงตามที่ปรากฏอยู่จริง ๆ ในภูมิประเทศ

ในการคำนวณรูปสามเหลี่ยมซึ่งจะได้กล่าวต่อไป การคำนวณต่อไปนี้ใช้ประมาณเท่านั้น และสมมุติเอาว่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณนั้นเราไม่คำนึงถึงอาจตัดทิ้งเสียได้

1) การทอนลงหาพื้นระดับน้ำทะเลปานกลาง เป็นการทอนทิศทางที่รังวัดลงยังพื้นที่ตรงกัน คือ พื้นยีออยด์ (หรือพื้นจริง) มิใช่ทอนลงพื้นสเฟียรอยด์ที่ใช้เป็นพื้นแทนพิภพจริง

2) ผลเกิดจากการความเฉของเส้นดิ่งเฉพาะท้องถิ่น ปกติเรามิได้นำมาพิจารณาอย่างไรก็ดีในบางกรณีค่านี้มีมากพอให้เห็นได้

3) ผลเกิดจากสภาพของดินฟ้าอากาศในทิศทางเล็ง (องค์ประกอบทางระดับของการหักเหของแสง) ถือเป็นสิ่งเล็กน้อยอาจตัดทิ้งเสียได้

4) การทอนทิศทางที่ส่อง (พื้นแบนโค้ง) ลงเป็นเส้นยีออเดติค หรือเส้นที่สั้นที่สุดเราไม่คำนึงถึง มีความจริงอยู่อันหนึ่งสามเหลี่ยม 8 รูปที่ประกอบตัวเองขึ้นด้วยโค้งแบน (Plane Curve) ซึ่งถือประหนึ่งว่าสามเหลี่ยมเหล่านั้นมีลักษณะอย่างเดียวกัน

2. คำนวณสามเหลี่ยมทรงกลมโดยอาศัยสามเหลี่ยมพื้นราบช่วย

การคำนวณหารูปสามเหลี่ยมทรงกลมในโครงข่ายโดยตรงนั้นไม่มีอะไรยุ่งยากนัก วิธีนี้อาจหาทางหลีกเลี่ยงได้โดยการใช้หลักการของทฤษฎีเลอยองเดรอะ คือ

"ถ้าเรามีรูปสามเหลี่ยมทรงกลมรูปหนึ่ง ซึ่งระยะของด้านสั้นมากเมื่อเปรียบกับความยาวของรัศมีของทรงกลม และในทำนองเดียวกันสามเหลี่ยมพื้นราบมีด้านเท่ากันกับด้านของรูปสามเหลี่ยมทรงกลมที่ตรงกันแล้ว มุมที่จุดยอดของรูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่ตรงกันนี้จะต่างกันด้วยจำนวนอย่างเดียวกันโดยประมาณ นั่นคือ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{3}$ ของเศษทรงกลมของรูปสามเหลี่ยมนั้น"

3. เศษทรงกลม

เศษทรงกลมของรูปสามเหลี่ยมย่อมเป็นปฏิภาคตรงกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนั้น ตามที่ทราบจากเรขาคณิตทรงกลม

ฉะนั้นถ้า A' เป็นพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

R คือ รัศมีทรงกลม

S พื้นที่ผิวของทรงกลม

e คือ เศษทรงกลมของรูปสามเหลี่ยม

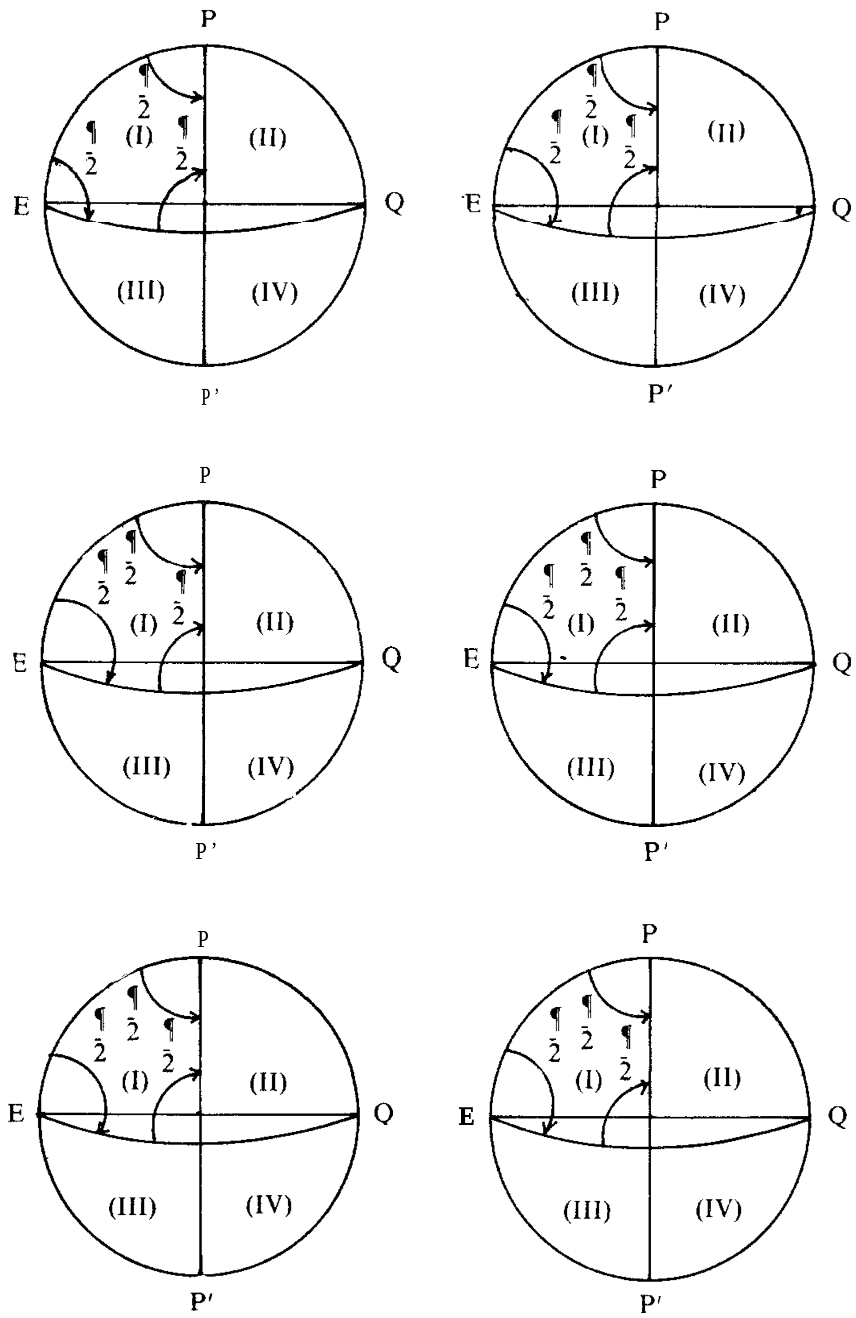
เนื่องจากเศษทรงกลมของ Tri-rectangular Triangle เป็น $\frac{\P}{2}$ จึงเขียนได้ว่า

$$\frac{e}{A'} = \frac{\frac{\P}{2}}{\frac{1}{8}S}$$

เนื่องจากพื้นที่ของพื้นผิวทรงกลม $= 4\P R^2 = s$

$$\frac{2e}{\P} = \frac{8A'}{4\P R^2}$$

$$e = \frac{A'}{R^2}$$



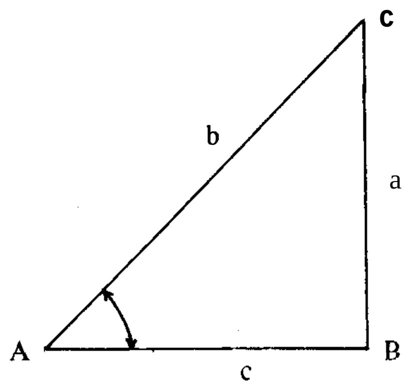
รูป 9.2

เพือนิพจน์ e เป็นพิลิบดา หารด้วย arc 1″ จึงได้

$$e'' \quad \frac{A'}{R^2 \text{arc } 1''}$$

ในรูปพื้นที่รูปสามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2}c.a = \frac{1}{2}b.c.\sin\ A$

$$e'' = \frac{bc \sin A}{2R^2 \text{arc } 1''} \quad \ldots\ldots\ldots (56)$$



รูป 9.3

ถ้า bc เป็นด้าน 2 ด้าน และ A เป็นมุมในระหว่างของพื้นสามเหลี่ยมพื้นราบ b และ c จึงเป็นหน่วยเชิงเส้นตรง

รูปทรงกลมซึ่งสัมผัสมีสเฟียรอยด์ที่ศูนย์กลางแรงดึงดูดของสามเหลี่ยม ซึ่งมีความโค้งเฉลี่ยอย่างเดียวกัน จึงได้รัศมีของทรงกลมเป็น $\sqrt{R_m N}$

เพราะฉะนั้น

$$e'' = \frac{bc \sin A}{2R_m N \text{ arc } 1''} = mbc \sin A \quad \ldots\ldots\ldots (57)$$

ซึ่งค่าของ log จำนวน $\frac{1}{2R_m N \text{ arc } 1''} = m$ นั้นจะคำนวณหาไว้ ณ ละติจูดต่าง ๆ ทำเป็นตารางไว้

ละติจูดที่ใช้หาค่า m คือ ละติจูดปานกลางของจุดยอดมุมทั้ง 3 ของรูปสามเหลี่ยม

ปัญหา สามเหลี่ยมพื้นราบช่วยนี้ คือ การเชื่อมชายของสามเหลี่ยมทรงกลม โดยลากเส้นมาจากจุดถึงจุดด้วยเส้นตรงใช่หรือไม่ รูปสามเหลี่ยม 2 รูปนี้เหมือนกันหรือเปล่า ?

สูตร e'' ที่ได้จากสมการข้างต้น (56) และ (57) มีความละเอียดอย่างพอเพียงสำหรับสามเหลี่ยมทั้งหมด ยกเว้นรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดใหญ่ที่สุด 2-3 รูป เช่น รูปสามเหลี่ยมที่ปรากฏในรูปเหลี่ยมของโครงข่าย Davidson ในรัฐแคลิฟอร์เนีย และในรัฐเนวาดา เมื่อด้านของรูปสามเหลี่ยมยาว 100 ไมล์ อาจต้องใช้สูตรต่อไปนี้ซึ่งมีความละเอียดมากกว่า

$$e'' = \frac{\text{พื้นที่}}{R^2 \sin 1''}\left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24R^2}\right) \quad \ldots (58)$$

หรือ

$$e_1'' = e'' + e' \times \frac{a'' + b^2 + c^2}{24R^2}$$

สูตร (58) หาได้ดังนี้

จากตรีโกณมิติเราอาจเริ่มด้วย $\tan \frac{e''}{4}$ คือ

$$\tan \frac{e}{4} = \frac{\sin \frac{1}{4}(A + B + C - 180) \cdot \cos \frac{1}{4}(A + B - C + 180)}{\cos \frac{1}{4}(A + B + C - 180) \cos \frac{1}{4}(A + B - C + 180)}$$

โดยใช้สูตร $\cos x \sin y$ กับ $\cos x \cos y$ ในเทอมของผลบวกครึ่งมุมกับผลต่างครึ่งมุม จึงได้

$$\tan \frac{e}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B) - \sin \frac{1}{2}(180 - C)}{\cos \frac{1}{2}(A + B) - \cos \frac{1}{2}(180 - C)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B) - \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}(A + B) + \sin \frac{1}{2}C}$$

นำค่านี้แทนลงในสมการเดอะลองเบรอ (Delambre's Equations)

$$\tan \frac{e}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a - b) - \cos \frac{1}{2}C. \quad \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}(a + b) + \cos \frac{1}{2}C. \sin \frac{1}{2}C}$$

ใช้สูตร $\cos x + \cos y$ และ $\cos x - \cos y$ จะได้

$$\tan\frac{e}{4} = \frac{\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\ \sin\frac{1}{4}(-a+b+c)}{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\ \cos\frac{1}{4}(a+b-c)}\cdot\cot\frac{C}{2}$$

สมมุติให้ $2s = a + b + c$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

และใส่ค่าสำหรับ $\cot\frac{C}{2}$ ให้เป็นเทอมของด้าน

$$\tan\frac{e}{4} = \sqrt{(\tan\frac{1}{2}s.\ \tan\frac{1}{2}(s-a).\tan\frac{1}{2}(s-b).\tan\frac{1}{2}(s-c)}$$

ซึ่งอันนี้เป็น Lhuillier's Theorem

นำค่าอนุกรมของ tangent ใช้เฉพาะ 2 เทอมแทนภาคขวา และแล้วยกกำลัง 2 จะได้

(คือ $\frac{s}{R} = x$ และ $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots\ldots\ldots$)

$$\tan^2\frac{e}{4} = (\frac{s}{2R} + \frac{s^3}{24R^3}(\frac{s-a}{2R} + \frac{(s-a)^3}{24R^3})(\frac{s-b}{2R} + \frac{(s-b)^3}{24R^3})$$

$$(\frac{s-c}{2R} + \frac{(s-c)^3}{24R^3})$$

ซึ่งบัดนี้ a, b และ c แทนด้านมีหน่วยเป็นเส้นตรง

จากตรีโกณมิติเบื้องต้นเราทราบว่าพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

$$(A) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ฉะนั้น $\quad A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$

$$\tan^2\frac{e}{4} = \frac{A^2}{16R^4} + \frac{A^2}{192R^6}((s-a)' + (s-b)^2 + (s\ \ c)^2 + s^2)$$

$$= \frac{A^2}{16R^4} + \frac{A^2}{192R^6}(a^2 + b^2 + c^2)$$

หรือ $$\tan^2 \frac{e}{4} = \frac{A'}{16R^4}\left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12R^2}\right)$$

$$\tan \frac{e}{4} = \frac{A}{4R^2}\left(1 + \frac{a' + b^2 + c^2}{12R^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

กระจายภาคขวาตามรูป Binomial

$$\tan \frac{e}{4} = \frac{A}{4R^2}\left(1 + \frac{a' + b^2 + c^2}{24R^2} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

ฉะนั้น $$\frac{e''}{4}\sin 1'' = \frac{A}{4R^2}\left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24R^2} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$e'' = \frac{A}{R^2 \sin 1''}\left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24R^2}\right) \quad . \; . \; . \quad \textbf{(59)}$$

4. การพิสูจน์ทฤษฎีของเลอยองเดรอะ (Proof of Legendre's Theorem)

การพิสูจน์ทฤษฎีของเลอยองเดรอะ สมมุติให้ A′, B′ และ C′ เป็นมุมสามเหลี่ยมทรงกลม กับ A, B และ C เป็นมุมของรูปสามเหลี่ยมพื้นราบ

ระยะด้านรูปสามเหลี่ยมพื้นราบเป็น a, b และ c และระยะด้านรูปสามเหลี่ยมทรงกลมเป็น aR, bR และ cR

ในรูปสามเหลี่ยมพื้นราบ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad . \; . \; . \; . \text{(a)}$$

หรือ $$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2} \quad . \; \ldots\text{(b)}$$

ในรูปสามเหลี่ยมทรงกลม

$$\cos A' = \frac{\cos a' - \cos b' \cos c'}{\sin b' \sin c'} \qquad \text{....(c)}$$

จาก (c) กระจายค่า sin และ cos ตามอนุกรม (Series) คือ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

และ $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \cos A' = \frac{1 - \frac{a'^2}{2} + \frac{a'^4}{24} - \left(1 - \frac{b'^2}{2} + \frac{b'^4}{24}\right)\left(1 - \frac{c'^2}{2} + \frac{c'^4}{24}\right)}{\left(b' - \frac{b'^3}{6}\right)\left(c' - \frac{c'^3}{6}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(-a'^2+b'^2+c'^2) - \frac{1}{24}(b'^4+c'^4-a'^4) - \frac{1}{4}b'^2c'^2}{b'c'\left[1 - \frac{1}{6}(b'^2+c'^2)\right]}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(-a'^2 + b'^2 + c'^2) - \frac{1}{24}(b'^4 + c'^4 - a'^4) - \frac{1}{4}b'^2c'^2\right] \frac{1 + \frac{1}{6}(b'^2 + c'^2)}{b'c'}$$

$$= \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'} - \frac{b'^4 + c'^4 - a'^4 + 6b'^2c'^2}{24b'c'} +$$

$$\frac{-a'^2b'^2 + b'^4 + 2b'^2c'^2 - a'^2c'^2 + c'^4}{12b'c'}$$

ดังนั้น

$$\cos A' = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2a'^2b'^2 + 2a'^2c'^2 + 2b'^2c'^2 - a'^4 - b'^4 - c'^4}{4b'c'} \qquad \text{...(d)}$$

ค่า $\cos A'$ โดยประมาณจะได้จาก (a), (b) เมื่อนำแทนใน (d) ดังนี้

$$\cos A' = \cos A - \frac{1}{6}.\, b'c'\sin^2 A \quad ....(e)$$

ให้ x เป็นความแตกต่างระหว่าง A กับ A′ เมื่อ x มีขนาดเล็กมาก จะได้

$\cos x = 1$ และ $\sin x = x'' \text{ arc } 1''$ (ประมาณ)

และ

$$\cos A' = \cos(A + x) = \cos A \cos x - \sin x \sin A$$

$$= \cos A - \sin A x'' \text{arc} 1'' \quad . \quad . \quad (f)$$

(e) = (f) คือ

$$\frac{1}{6}.b'c'\sin^2 a = \sin A\, x'' \text{ arc } 1''$$

$$\therefore \quad x'' = \frac{b'c'\sin A}{6 \text{ arc } 1''} \quad ....(g)$$

เนื่องจาก

$b' = \frac{b}{R}$ และ $c' = \frac{c}{R}$ (ซึ่ง b′ และ c′ เป็น Radians)นำค่านี้แทน (g) จะได้

$$x'' = \frac{bc \sin A}{6R^2 \text{ arc } 1''} \quad ....(60)$$

จาก (57)

$$\frac{x''}{e''} = \frac{bc \sin A}{6R^2 \text{arc } 1''} \cdot \frac{2R^2 \text{ arc } 1''}{bc \sin A} = \frac{1}{3} \quad ....(61)$$

หรือ $x'' = \frac{1}{3}e''$ ซึ่งหมายความว่าความต่างระหว่างมุมในรูปสามเหลี่ยมทรงกลมกับรูปสามเหลี่ยมพื้นราบมีค่าเป็น $\frac{1}{3}$ ของเศษทรงกลม โดยทำนองเดียวกัน มุม B และ C คงมีค่าเป็น $\frac{1}{3}$ เศษทรงกลม คือ $A = A' + \frac{1}{3}e''$ หรือ $A' = A - \frac{1}{3}e''$

5. ความเคลื่อนคลาดของทฤษฎีเลอยองเดรอะ

ความเคลื่อนคลาดในทฤษฎีของเลอยองเดรอะเมื่อนำไปประยุกต์ในรูปสามเหลี่ยมทรงกลม อาจต้องพิจารณาโดยทำให้อนุกรมดังกล่าวกระจายให้สำเร็จรูปเพื่อรวมเทอมต่าง ๆ ที่โตกว่ากำลัง 4 Jordan (Vermessungskunde) ให้ตัวอย่างทางจำนวนไว้ แสดงให้เห็นถึงความเคลื่อนคลาดในสามเหลี่ยมซึ่งด้าน AC มีความยาวประมาณ 65 ไมล์ มุมต่าง ๆ ได้แสดงไว้ข้างล่างนี้

A′	=	40°	39	30.″380
B′	=	86	13	58.840
C′	=	53	06	45.630
		180	00	14.850

จงพิจารณามุมรูปสามเหลี่ยมทรงกลม A′, B′ และ C′ กับมุมในรูปสามเหลี่ยมพื้นราบที่ตรงกัน คือ A, B และ C ความแตกต่างระหว่างของรูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 เมื่อเปรียบเทียบกัน ซึ่งแถวตั้งแรกคำนวณจากทฤษฎีของเลอยองเดรอะตามสูตรธรรมดาของเขา ส่วนแถวตั้งที่ 2 รวมเอาเทอมที่มีค่าเล็ก ๆ เข้าไปด้วยโดยปกติเรามักตัดทิ้ง

		ประมาณ (Approx.)	ถูกจริง (Exact.)
A′ − A	=	4.″950018	4.″950036
B′ − B	=	4.950018	4.949997
C′ − C	=	4.950018	4.950021

ค่าประมาณคำนวณจากสูตรง่าย ๆ ใช้เพียงเทอมเดียว ส่วนค่าถูกจริงคำนวณจาก (5) รวมเทอมที่ 2 เข้าไปด้วย

6. การคำนวณสามเหลี่ยมบนผิวสเฟียรอยด์บนสามเหลี่ยมทรงกลม

ปกติมักจะสมมุติว่าความต่างระหว่างสามเหลี่ยมบนพื้นผิวสเฟียรอยด์ กับสามเหลี่ยมทรงกลมตัดทิ้งเสียได้ เมื่อจุดต่าง ๆ ที่แท้จริงบนผิวสเฟียรอยด์ฉายลงไปไว้บนผิวทรงกลมที่นำ

มาสัมผัสมีรัศมี $(R_m N)^{\frac{1}{2}}$ ในหนังสือมีออเดซีของ Clarke ได้นำเอากรณีที่สามเหลี่ยมมีด้านหนึ่งยาวกว่า 200 ไมล์ และมีเศษทรงกลม 1′ 36.″426 ได้ค่าดังนี้

		บนผิวสเฟียรอยด์			บนผิวทรงกลม			ความต่าง
A	=	98°	44′	37.″0965	98°	44′	37.″1899	− 0.″0934
B	=	58	16	46.5994	58	16	46.4737	+ 0.1257
C	=	23	00	12.7303	23	00	12.7634	− 0.0331
∈	=		1	36.4262		1	36.4270	

ตัวอย่างข้างบนนี้แสดงว่าทฤษฎีนั้นมีความละเอียดอย่างพอเพียงในทุกกรณีที่จะนำไปใช้ในงานเชิงตรีโกณมิติภาคปฏิบัติธรรมดา ซึ่งขนาดของสามเหลี่ยมถูกจำกัดด้วยระยะต่าง ๆ ที่ระยะเหล่านี้สามารถแลเห็นกันได้ และนอกจากนั้นในเรื่องสูตรการหาเศษทรงกลมใช้เพียงเทอมแรกก็เป็นการเพียงพอแล้ว

น่าสังเกต ณ ที่นี้ว่า ในเรื่องสามเหลี่ยมธรรมดาเมื่อกำหนดมุมราบของสามเหลี่ยมและต้องการให้คงมุมสามเหลี่ยมทรงกลมไว้ ก็ให้บวก $\frac{1}{3}$ ของเศษทรงกลมของสามเหลี่ยมเข้าไปกับแต่ละมุมราบ

เมื่อมุมสามเหลี่ยมที่รังวัดได้ทอนลงเป็นมุมราบแล้วโดยตัดทอนลง $\frac{1}{3}$ ของเศษทรงกลมจากแต่ละมุมแล้วปรับโคลสเซอร์ให้ ระยะด้าน b และ c คำนวณหาได้จากด้าน a ที่ทราบแล้วโดยใช้กฎ sine ธรรมดา คือ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ใช้ค่าพละคณิตเลข 7 ตัวในการคำนวณระยะของด้านของสามเหลี่ยมชั้นที่ใหญ่ และ 6 ตัวสำหรับงานสามเหลี่ยมเล็ก หากมีตารางค่า sine ก็ใช้เครื่องคำนวณช่วยการคำนวณได้ หากระยะของด้านยาวกว่าประมาณ 60 ถึง 70 ไมล์ ใช้ค่าพละคณิตเลข 8 ตัว

7. การคำนวณสามเหลี่ยมพื้นราบ

สามเหลี่ยมทรงกลมนั้นเศษทรงกลมคำนวณหาได้ เมื่อทราบเศษทรงกลมก็สามารถหามุมต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมพื้นราบที่มีจุดยอดมุมอยู่แห่งเดียวกันนี้ได้โดยใช้สูตร หรือทฤษฎีเลอยองเดรอะ (Legendre's Theorem)

คือลดมุมทั้ง 3 แต่ละมุมลง $\frac{1}{3}$ ของเศษทรงกลมที่คำนวณได้ ความแตกต่างระหว่างผลบวกของมุมราบเหล่านี้กับ 180° คือ ความคลาดเคลื่อนการรังวัด และสามารถจะแจกแจงออกไปได้เท่า ๆ กันให้กับมุมทั้ง 3 นอกเสียจากจะได้มีการแจกแจงด้วยวิธีการปรับด้วยอนุจัตุรัสวิธี ในบางกรณีวิธีการแจกแจงความคลาดเคลื่อนอาจนำไปใช้เพื่อการกำหนดหาระยะในขั้นแรก ระยะของด้านรูปสามเหลี่ยมต่อไปก็หาได้โดยตรีโกณมิติพื้นราบ เนื่องจากมุมทั้ง 3 ของรูปสามเหลี่ยมโดยปกติจะต้องทราบ สูตรที่ใช้ คือ สูตรของ sine ดังกล่าวแล้ว นอกเสียจากบางกรณีซึ่งไม่ค่อยจะมีนัก

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

หรือ $\log a = \log b + \log \operatorname{ccsec} B + \log \sin A$

การจัดที่สะดวกของการคำนวณควรกระทำดังตารางต่อไปนี้ สมมุติเศษทรงกลม เป็น 0.″86 ซึ่งให้โคลสเซอร์ของสามเหลี่ยมเป็น 1.″24 ค่านี้หาได้โดยวิธีอนุจัตุรัส

8. การปรับแก้โครงข่ายสามเหลี่ยม

โครงข่ายสามเหลี่ยมเดี่ยวปรับแก้สองขั้นตอนคือ.-

1. การปรับแก้ ณ สถานี เพื่อทำให้ผลรวมของมุมรอบจุดเท่ากับ 360°
2. การปรับแก้รูป เพื่อทำให้ผลรวมของมุมสามมุมในแต่ละรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180°

ในงานสามเหลี่ยมที่มีความละเอียดเยี่ยม การปรับแก้ ณ สถานี และการปรับแก้รูปจะกระทำทีเดียว หรือพร้อมกันโดยใช้หลักวิธีอนุจัตุรัส แต่ที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นวิธีประมาณที่ยังผลให้ความละเอียดอย่างเพียงพอสำหรับงานสามเหลี่ยมที่ไม่ต้องการความละเอียดมากนัก

เงื่อนไข ณ สถานี (station condition) หมายถึง ความต่างระหว่าง 360° กับผลรวมของมุมที่รังวัดรอบจุดนั้น ความต่างที่ได้คือ ความเคลื่อนคลาด (error) ซึ่งแจกแจงให้แก่มุมต่าง ๆ โดยการหารความต่างด้วยจำนวนมุมที่รังวัดแล้วบวกเข้าไปด้วยมุมเหล่านั้นตามเครื่องหมายทางพีชคณิต

เงื่อนไขทางรูป (figure condition) หมายถึง ความต่างระหว่าง 180° กับผลรวมของมุมทั้งสามที่รังวัดภายในรูปสามเหลี่ยม ความต่างที่ได้คือความคลาดเคลื่อน (error) ซึ่งแจกแจงให้แก่มุมทั้งสามโดยหารความต่างด้วย 3 แล้วบวกเข้าไปกับมุมทั้งสามตามเครื่องหมายทางพีชคณิต

วิธีการปรับแก้เช่นนี้สมมติว่า มุมทั้งหมดที่รังวัดมานั้นกระทำด้วยวิธี เครื่องมือ และความละเอียดอย่างเดียวกันและใช้ได้เฉพาะกรณีดังกล่าวนี้เท่านั้น ถ้าบางมุมวัดมาด้วยความละเอียดมากกว่ามุมอื่น จะต้องดัดแปลงโดยการใช้ถ่วงน้ำหนักให้แก่มุมที่ทำการรังวัดต่าง ๆ เหล่านั้น

9. การปรับแก้รูปสามเหลี่ยม

จากที่กล่าวมาแล้ว ผลรวมมุมที่รังวัดรอบจุดใด ๆ จะถูกปรับแก้จนได้ผลรวมของมุมต่าง ๆ นั้นเท่ากับ 360° ก่อนจะทำการปรับแก้รูปต่อไป

ในการปรับแก้รูปมีเงื่อนไขต้องพิจารณาอยู่ 2 ประการ คือ

1. เงื่อนไขเชิงเรขาคณิต นั่นคือผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมของสามเหลี่ยมพื้นราบเท่ากับ (n–1) 180° ซึ่ง n เป็นจำนวนด้านของรูป
2. เงื่อนไขเชิงตรีโกณมิติ คือในรูปสามเหลี่ยม sine ของมุมย่อมได้ส่วนสัมพันธ์กับระยะของด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมนั้น ๆ

ประการแรกให้ทำการปรับแก้ ณ สถานี จนเงื่อนไขเชิงเรขาคณิตสอดคล้องกับทฤษฎี แล้วปรับแก้ต่อไปจนเงื่อนไขเชิงตรีโกณมิติสอดคล้องกับทฤษฎีเช่นกัน

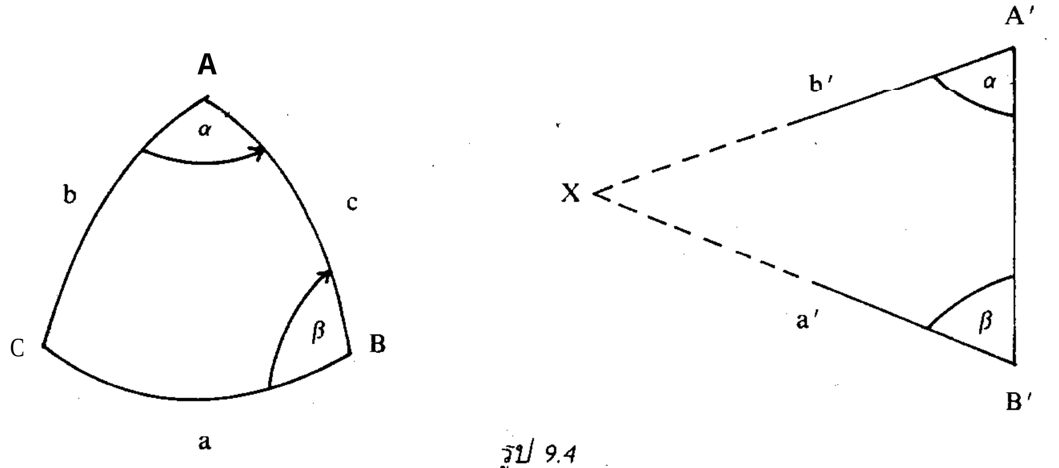
ตาราง 9.1

สถานี	มุมที่รังวัด	จำนวนแก้	มุมทรงกลม	ศษทรงกลม	มุมราบและระยะ	พลคณิต
จาก A → B					22723".08	4.3564673
C	61" 47' 18".80	0."41	18".39	0."29	61" 47' 18".10	0.0549218
A	35 45 15.40	0.41	14.99	0.29	35 45 14.70	9.7666415
B	82 27 27.90	− 0.42	27.48	0.28	82 27 27.20	9.9962261
	180 00 02.10	− 1.24	00.86	0.86	180 00 00.00	
C → B					15067.13m	4.1780306
C → A					25563".20	4.4076152

10. การคำนวณสามเหลี่ยมวิธีที่ 2 โดยอาศัยสามเหลี่ยมพื้นราบช่วย

การคำนวณสามเหลี่ยมอีกวิธีหนึ่งซึ่งใช้กันมากในยุโรป ดังต่อไปนี้

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมทรงกลม และ A′B′X เป็นสามเหลี่ยมพื้นราบช่วยมีมุม 2 มุม คือ α กับ β เท่ากับมุมของสามเหลี่ยมทรงกลมที่ตรงกัน ปรากฏชัดว่ามุมที่ 3 ไม่เท่ากัน



รูป 9.4

ให้ a′ และ b′ ในสามเหลี่ยมพื้นราบเป็นด้านอยู่ตรงข้ามกันกับด้าน a และ b ในรูปสามเหลี่ยมทรงกลม เราได้

$\frac{a}{R}$ = มุม (Radians) และ $\frac{b}{R}$ = มุม (Radians)

$$\therefore \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{a}{R}} = \frac{\sin\beta}{\sin\frac{b}{R}}$$

หรือ $$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\frac{b}{R}}$$

และในสามเหลี่ยมพื้นราบ

$$\frac{a'}{\sin\alpha} = \frac{b'}{\sin\beta}$$

หรือ $$\frac{\sin a}{\sin\beta} = \frac{a'}{b'}$$

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\frac{b}{R}} = \frac{a'}{b'} = \frac{\frac{a'}{R}}{\frac{b'}{R}}$$

สมการนี้จะสมนัยกันถ้าเราเขียนดังนี้

$$\sin\frac{a}{R} = \frac{a'}{R}$$

และ $$\sin\frac{b}{R} = \frac{b'}{R}$$

หากให้ S′ เป็นด้านของรูปสามเหลี่ยมพื้นราบช่วยซึ่งตรงกับด้าน S ของรูปสามเหลี่ยมทรงกลม การนิพจน์ทั่ว ๆ ไปคงเป็น

$$\frac{S'}{R} = \sin\frac{S}{R}$$

หรือ $$\log\frac{S'}{R} = \log\sin\frac{S}{R} = \log\left(\frac{S}{R} - \frac{S^3}{6R^3} + \frac{S^5}{120R^5} + \ldots\ldots\right)$$

$$= \log \frac{S}{R} + \log \left(1 - \frac{S^2}{6R^2} + \frac{S^4}{120R^4}\right) \quad ....(62)$$

เนื่องจาก

$$\log(1 - x) = -M(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots\ldots\ldots)$$

ซึ่ง $M = \log_{10}e = 0.4342945$ คือ ตัวมอดูลัส (Modulus) ของ Common logarithm

$$\log \frac{S'}{R} = \log \sin \frac{S}{R} = \log \frac{S}{R}$$

$$\log \frac{S'}{R} = \log \frac{S}{R} + M\left(-\frac{S^2}{6R^2} + \frac{S^4}{120R^4} \ldots\right) - \frac{M}{2}\left(-\frac{S^2}{6R^2}\right) \ldots\ldots$$

$$= \log \frac{S}{R} - \frac{MS^2}{6R^2} + M\frac{S^4}{120R^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \log \frac{S'}{R} = \log \frac{S}{R} - \frac{MS^2}{6R^2}$$

หรือ $$\log S' - \log R = \log S - \log R - \frac{MS^2}{6R^2}$$

$$\therefore \log S - \log S' = \frac{MS^2}{6R^2} \quad ....(63)$$

ค่าที่ได้ใน (63) เป็นจำนวนแก้ที่ให้แก่ log ของด้านรูปสามเหลี่ยม ในการคำนวณจำนวนแก้อันนี้สำหรับค่า R^2 ควรนำค่า $R_m N$ แทน จำนวนแก้ที่ได้จะคำนวณไว้เป็นตารางสำเร็จ เพื่อสะดวกในการนำไปใช้ และตารางนั้นใช้ ค่าของ logs เป็น Argument

จงสังเกตว่าเมื่อเส้นฐานของรูปสามเหลี่ยมรูปแรกนั้น ได้มีการตัดทอนด้วยการหักลบจำนวนแก้อันนี้แล้ว ต่อไปก็คงดำเนินการคำนวณสามเหลี่ยมในโครงข่ายนั้นได้ตลอด ใช้เพียงมุมทรงกลมเท่านั้น และก็ไม่จำเป็นต้องบอกจำนวนแก้ให้แก่พละคณิตของด้านที่คำนวณอีก จนกว่าจะพบค่าที่แท้จริง ดังตัวอย่างในตารางข้างล่าง

ตาราง 9.2

สถานี	มุมทรงกลม	ระยะ (เมตร)	พละคณิต
A → B................	° ′ ″	22,723.08	4.356 4673
จำนวนแก้			9
S			4.356 4664
C	61 47 18.39		0.054 9215
A......................	35 45 14.99		
B	82 27 27.48		9.766 2262
S ‘.......................			4.178 0302
จำนวนแก้			4
C → B................		15,067.13	4.178 0306
S ‘......................			4.407 6141
จำนวนแก้			11
C → A		25.563.20	4.407 6152

ปัญหาโจทย์

1) จงคำนวณพื้นที่รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งบนผิวพิภพเป็นตารางไมล์ เศษทรงกลมของรูปสามเหลี่ยมกำหนดให้มีค่า 1″ และสมมุติพิภพเป็นรูปทรงกลมมีรัศมี 3,960 ไมล์

2) จงคำนวณหาระยะด้านรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้

จาก A ไป B แอซิมัธ 333° 01′ 08″.65 และแอซิมัธกลับ 153° 25′ 05″.00 ระยะจาก A ไป B 123,556.70 เมตร พละคณิต 5.091 8663 ละติจูด (φ) ของจุด A เป็น 39° 06′ 54″.362 ลองจิจูด 111° 27′ 11″.915 C อยู่ทางตะวันตกเฉียงใต้ของ A และมีข้อรายการที่กำหนดให้ดังนี้

	สถานี	จำนวนแก้มุมจากการปรับรูปสามเหลี่ยม	ความเคลื่อนคลาดจากทฤษฎีของสามเหลี่ยม	มุมทรงกลมที่แก้แล้ว	เศษทรงกลม
a)	B	+ 0″.70	+ 0″.22	49° 36′ 36″.88	34″.33
	C	− 0.98		55 56 26.70	
	A	+ 0.06		74 27 30.75	

จาก A ไป B แอซิมัธ 298° 01′ 25″.71 แอซิมัธกลับ 109° 07′ 06″.11 ระยะจาก A ไป B 162,928.01 เมตร พละคณิต 5.211 9958 ละติจูด (φ) ของ A 38° 32′ 21″.444 ลองจิจูด (λ) 109° 13′ 38″.302 A อยู่ทางตะวันตกเฉียงใต้ของ C

	สถานี	จำนวนแก้มุมจากการปรับรูปสามเหลี่ยม	ความเคลื่อนคลาดจากทฤษฎีของสามเหลี่ยม	มุมทรงกลมที่แก้แล้ว	เศษทรงกลม
b)	B	+ 0″.17	+ 0.65	31° 54′ 61″.57	46″.15
	A	− 0.10		98 16 41.16	
	C	+ 0.58		49 48 63.42	

3) ตำแหน่งของจุด B { ละติจูด 39" 13' 26."686
ลองจิจูด 98 32 30.506

ตำแหน่งของจุด c { ละติจูด 38" 51' 50."913
ลองจิจูด 98 29 15.508

แอซิมัธจาก B ไป C 353" 17' 21."81 ระยะจาก B ไป C 40232.35 เมตร (log = 4.604 5754) แอซิมัธกลับ 173" 19' 24.64

มุมทรงกลมเป็น

A = 57" 53' 14."39 (A อยู่ตะวันออกของ BC)

B = 62 23 31.40

c = 59 43 17.93

จงคำนวณหาเศษทรงกลม และแก้หาอวัยวะของรูปสามเหลี่ยม

4) ละติจูดตำบล L 42° 26′ 13."276 ลองจิจูด 70° 55′ 52."088 ระยะ L ไป N เป็น 3012.0 เมตร (log = 3.478 8600) แอซิมัธ L ไป N 314° 34′ 00″ แอซิมัธกลับ 134° 35′ 03″

ตำบล N ละติจูด 42° 25′ 0."764 ลองจิจูด 70° 54′ 18."232 มุมที่ L 36° 15′ 07″, ที่ N 63° 44′ 59″, ที่ E 79° 59′ 57″ (E อยู่ตะวันออกของ LN) จงคำนวณหาเศษทรงกลม และแก้รูปสามเหลี่ยม

5) มุมที่รังวัดของรูปสามเหลี่ยม และจำนวนแก้ต่าง ๆ จากการปรับแก้ดังนี้

	มุม	จำนวนแก้
A	40° 57′ 28."13	– 0."35
B	54 22 59.51	– 0.61
C	84 39 35.03	– 0.44

ตำแหน่งของจุด B ละติจูด 37° 08′ 57."928 เหนือ, ลองจิจูด 97° 55′ 43."908 ตะวันตก แอซิมัธจาก C ไป B 127° 28′ 17."95 แอซิมัธกลับ 307° 47."30 ระยะจาก B ไป C 20139.64 เมตร (log = 4.304 0518) จงหาอวัยวะรูปสามเหลี่ยม

6) จงแสดงให้เห็นถึงการแทนสมการใน (59) และ (b) ข้อ 4.4 ลงใน (d)

7) มุม และด้านของสามเหลี่ยม ABC ดังนี้

A	28° 49′ 07.″900	107 728.96 เมตร
B	73 06 32.504	213 873.23 "
C	78 05 16.803	218 704.43 "

จงคำนวณหาเทอมที่ 2 ของเศษทรงกลม ละติจูดปานกลางเป็น 30° 40′ เหนือ

8) ด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC ประมาณดังนี้ 133, 167, 190 ไมล์ ตามลำดับ ค่าเศษทรงกลม (∈) เป็น 142.″696 จงคำนวณหาเทอมที่ 2 ของเศษทรงกลม