บทที่ 8
คุณสมบัติของสเฟียรอยด์หรือทรงรี

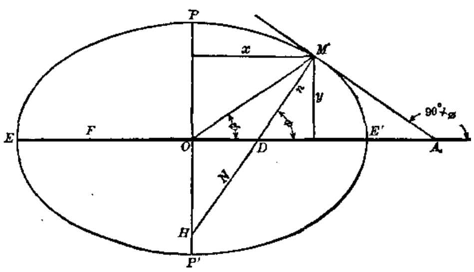
1. รูปร่างของพิภพเชิงคำนวณ

ในการคำนวณหาตำแหน่งของจุดที่ทำการสำรวจมาบนพื้นผิวพิภพนั้น จำเป็นต้องพิจารณาจุดเหล่านี้คล้ายสถิตย์อยู่บนพื้นผิวเชิงคำนวณอันหนึ่ง เช่น พื้นผิวของทรงกลมหรือทรงรี ซึ่งพื้นเหล่านี้ถือเป็นตัวแทน หรือตัวนิรูปรูปร่างของพิภพ ในการนี้จะทำให้สำเร็จได้ก็โดยการฉายตำแหน่งของสถานี หรือจุดสำรวจลงไปในแนวดิ่งจนถึงพื้นผิวตัวแทนนั้น รูปร่างอันแท้จริงของพื้นผิวพิภพนั้นหยาบขรุขระไม่ราบเรียบเลย จากภาวะธรรมชาติที่เป็นจริงเช่นนี้ รูปร่างอันแท้จริงของพิภพจึงอาจกำหนดหาได้อย่างประมาณเท่านั้น แต่ถึงแม้จะหาหรือกำหนดรูปร่างของพิภพได้อย่างถูกต้องแม่นตรงก็ตาม ก็ไม่อาจจะดัดแปลงเพื่อจุดประสงค์ในการคำนวณได้ โดยเหตุผลอันนี้จึงจำเป็นต้องกำหนดรูปร่างพิภพขึ้นใช้ การใช้รูปร่างของพิภพที่กำหนดขึ้นมานี้จะทำให้การคำนวณง่ายขึ้น นอกจากนี้รูปร่างที่กำหนดขึ้นจะไม่มีส่วนใดบิดเบี้ยว หรือเฉออกไปจากรูปจริงจนมีนัยสำคัญถึงขั้นทำให้มีความคลาดเคลื่อนอย่างรุนแรงในผลงานนั้น รูปร่างของพิภพซึ่งได้รับการปรับปรุงดัดแปลงขึ้นโดยทั่วไป คือ "รูปทรงรีมีส่วนยุบที่ขั้ว" หรือ "รูปทรงรีหมุน" รูปทรงรีชนิดนี้หมุนรูปวงรี รอบแกนหมุนหรือแกนสั้นของพิภพ รูปทรงรีหมุนมีส่วนใกล้เคียงกับรูปจริงของพิภพมากกว่ารูปทรงกลม นอกจากนี้บางทีก็ไม่ใกล้เคียงกับรูปทรงรีที่มีแกน หรือขนาดทั้งสามไม่เท่ากัน อย่างไรก็ดี รูปทรงรีขนาดทั้งสามไม่เท่ากันย่อมไม่สะดวกที่จะนำไปใช้ในการคำนวณ และความละเอียดถูกต้องควรได้รับก็มีน้อยมาก

รูปทรงรีมีส่วนยุบที่ขั้วนั้นเป็นพื้นผิวของทรงรีอันมีแกนทั้งสองเท่ากัน นอกจากแกนที่ o ที่ใช้เป็นแกนหมุนมีความยาวสั้นกว่าแกนทั้ง 2 ดังกล่าวแล้ว พื้นรอยตัดทั้งหมดของพื้น

ผิวชนิดนี้จะเป็นรูปวงรี ยกเว้นพื้นรอยตัดโดยพื้นราบที่ตั้งได้ฉากกับแกนหมุน ซึ่งรอยตัดจะเป็นโค้งวงกลม รอยตัดทั้งหลายผ่านตลอดตามแนวแกนหมุน หรือตามแนวขั้ว จะได้รอยตัดเป็นวงรีซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลางในพื้นศูนย์สูตรเป็นแกนยาวกับมีเส้นผ่าศูนย์กลางที่ผ่านขั้วเป็นแกนสั้นของทรงรี หากเราได้มีการศึกษาพิจารณาถึงคุณสมบัติต่าง ๆ ของวงรีซึ่งหมุนรอบแกนหมุนทำให้เกิดเป็นรูปทรงรีขึ้น ก็จะทำให้เราทราบ และเข้าใจถึงธรรมชาติของพื้นผิวทรงรีได้ดีที่สุด

2. คุณสมบัติของวงรี



รูป 8.1

ในรูปถ้า	EE′	เป็นแกนยาวอันหนึ่งที่อยู่ในพื้นศูนย์สูตร
	PP′	เป็นแกนสั้น หรือแกนที่ผ่านขั้วของรูปวงรี
	F	เป็นจุดโฟคัสจุดหนึ่งของวงรี
ที่จุด	M	เป็นจุดใด ๆ บนโค้งซึ่งมีเส้น MA ลากผ่าน และสัมผัสโค้งที่จุด M
	MH	เป็นเส้นตั้งได้ฉากกับเส้น MA ที่จุด M นั่นคือ เส้น MH ตั้งฉากกับโค้งวงรีที่สุด M ซึ่ง MH ก็คือ ทิศทางของแนวเส้นดิ่ง

ณ จุด M ที่สมมติเอาว่าไม่มีความเฉของเส้นดิ่งอันเกิดจากการก่อกวนของมวลสารในบริเวณใกล้ ๆ นั้น เช่น การแปรเปลี่ยนเกี่ยวกับความแน่นของมวลสารเป็นต้น

ระยะ MH (=N) ที่ไปตัดแกนสั้นที่สุด H นั้นเราเรียกว่า "เส้นนอร์มาล" หรือ "เส้นตั้งฉากพื้นผิววงรี"

ระยะ MD (= n) เป็นเส้นนอร์มาลที่ตัดแกนยาวในพื้นศูนย์สูตรตรงจุด D มุมที่เส้นนี้ทำกับเส้น OE′ ในพื้นศูนย์สูตรของพิภพเราเรียกว่า "ละติจูดเชิงยีออเดติค" หรือ "ละติจูดพิภพ" (Geodetic Latitude) ส่วนมุมที่ MO กระทำกับ OE′ คือ "ละติจูดเชิงยีออเซนตริค" หรือ "ละติจูด ณ ตรงจุดศูนย์กลางพิภพ" (Geocentric Latitude) ซึ่งในที่นี้จะให้สัญลักษณ์เป็น $\varnothing$ และ φ ตามลำดับ

มีมุมอีกอันหนึ่งซึ่งมีความสำคัญในทางเรขาคณิตของวงรี คือ "มุมเยื้องจากศูนย์กลาง" (Eccentric Angle) หรือ "ละติจูดตัดทอน" (Θ) นั่นคือ มุม E' Om ซึ่ง M เป็นจุดใด ๆ บนวงรี

MN ตั้งฉากกับ OE' และ m เป็นจุดซึ่งเส้นตั้งฉาก MN ต่อออกไปตัดโค้งวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 และรัศมี OE′

สมการวงรีซึ่งกึ่งแกนยาว และกึ่งแกนสั้นเป็น a, b นั้น ถ้าจุดบนโค้งวงรีมีพิกัดอ้างอิงจากแกนยาว และแกนสั้นของวงรี คงได้สมการดังนี้

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad \text{......................(1)}$$

การหาค่าพิกัดของจุด ซึ่งคิดในเทอมของละติจูด ให้ทำการหาอนุพันธ์ (Differentiate) ใน (1)

$$2b^2x + 2a^2y\frac{dy}{dx} = 0$$

หรือ

$$\frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{dx}{dy} \qquad \text{...............(2)}$$

เนื่องจากเส้นสัมผัสโค้งวงรีกระทำกับแกน x ซึ่งมีลาด (Slope) เป็น $\frac{dy}{dx}$ หรือ

$$\frac{dy}{dx} = \tan (90^\circ + 0)$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = -\tan \varnothing$$

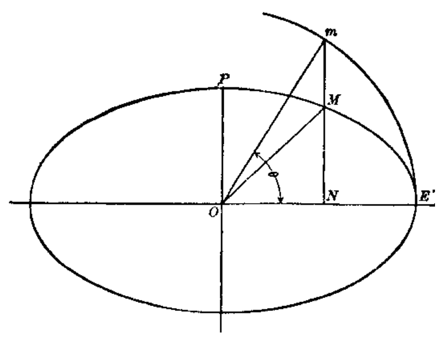
อัตราเยื้องจากศูนย์กลาง e คือ $\frac{OF}{OE} = \frac{OF}{a}$ ฉะนั้นถ้าพิจารณาดูในรูปสามเหลี่ยม OFP จะได้

$$\overline{OF} = \overline{PF}^2 - \overline{PO}^2$$

$$OF = a' - b^2$$

นำ a^2 หารตลอด

$$\frac{\overline{OF}^3}{a^2} = \frac{a' - b^2}{a^2}$$



รูป 8.2

$$\frac{OF}{a} = \frac{1}{a}(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} = e$$

หรือ $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

หรือ $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$

ฉะนั้น ใน (1) อาจเขียนได้

$$\frac{y}{x} = (1 - e') \frac{dx}{dy} = (1 - e^2) \tan 0 \; . \; . \; . \; . \; ...(3)$$

จากสมการวงรี (1) เราได้

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - e^2)a^2} = 1$$

$$x^2 + \frac{y^2}{1 \quad e^2} = a \qquad \text{..........(4)}$$

$(3)^2$ แล้วนำแทน (4) ได้

$$y^2 = (I - e^2)^2 . \tan^* 0 \; .x^2$$

$$\frac{x^2}{a''} + \frac{(1 - e^2)^2 \tan' 0 \; .x^2}{(1 - e^2)a^2} = ,$$

$$x^2 \left\{ 1 + (1 - e^2). \frac{\sin^2 \varnothing}{\cos^2 \varnothing} \right\} = a^2$$

$$x^2 \left\{ \frac{\cos^2 0 \; (1 - e^2)\sin^2 0}{\cos^2 0} \right\} = a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2 \cos^2 0}{1 \quad e^2 \quad \sin^2 \quad 0} \qquad \text{..........(5)}$$

$$x = \frac{a \cos \psi}{1 - e^2 \sin' 0} \; . \; . \qquad . (6)$$

นำค่า (5) แทน (4) ได้

$$\frac{a^2\cos^2 \varnothing}{1 - e^2\sin^2 \varnothing} + \frac{y^2}{1 - e^2} = a^2$$

$$y^2 = \frac{a^2(1 - \cos^2 0) \; (1 \quad e^2)}{1 - e^2\sin^2 0}$$

$$= \frac{(\sin'' 0 - e^2\sin^2\varnothing)a^2}{1 \quad e^2\sin^2\varnothing}$$

$$y = \frac{a(1 - e^2) \sin 0}{1 - e^2\sin^2\varnothing} \qquad \text{.........(7)}$$

3. รัศมีความโค้งของเมริเดียน

การหาความโค้งของเมริเดียน (R_m) ซึ่งอาการโค้งของเมริเดียนนิพจน์ได้ดังนี้

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

จาก (2) เราได้อนุพันธ์ครั้งที่ 1 (First derivative) คือ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{b^2}{a^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

โดยการหาอนุพันธ์ (Differentiating) : (สูตรของผลหาร)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{y\frac{dx}{dx} - x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right)$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right)$$

$$= -\frac{b^2}{a^2y^2}\left(y + x.\frac{x}{y}.\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$= -\frac{b^2}{a^2y^2}\left(y + \frac{x^2}{y}.\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$= -\frac{b^2}{a^2y^2}\left(\frac{b^2x^2 \text{ t } a^2y^2}{a^2y}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx'} = -\frac{a^2b^4}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

นำค่าแทนที่ได้นี้กับเอาค่าใน (8) แทน (D)

$$R_m = - \frac{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\frac{b^4}{a^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^2}{a^2y^3}}$$

$$= - \frac{\left(\frac{a^4y^2 + x^2b^4}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2y^3}}$$

$$- \frac{\frac{1}{a^6y^3}(a^4y^2 + x^2b^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2y^3}}$$

$$\frac{(a^4y^2 + x^2b^4)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$\frac{\left[\frac{a^2(1 - e^2)^2\sin^2\phi + a^2b^4.\cos^2\phi}{1 - e^2\sin^2\phi}\right]^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

เนื่องจาก $b^2 = a^2(1 - e^2)$ นำค่านี้แทนข้างบนได้

$$R_m = - \frac{\left[\frac{a^6(1 - e^2)^2\sin^2\phi + a^6(1 - e^2)^2\cos^2\phi}{1 - e^2\sin^2\phi}\right]^{\frac{3}{2}}}{a^8(1 - e^2)^2}$$

$$\frac{\left[\frac{a^2\{1 - e^2\}^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi)}{1 - e^2\sin^2\phi}\right]^{\frac{3}{2}}}{a^8(1 - e^2)^2}$$

$$\frac{a^9(1 - e^2)^3}{a^8(1 - e^2)^2(1 - e^2\sin^2\phi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore R_m = - \frac{a(1 - e^2)}{[1 - e^2\sin^2\phi]^{\frac{3}{2}}} \quad ....(10)$$

เครื่องหมาย **ลบ** แสดงเพียงทิศทางความโค้งของโค้งวงรี โดยปกติเราถือค่ามีค่าเป็น**บวก**

$$R_m = \frac{a(1 - e^2)}{[1 - e^2\sin^2 \varnothing]^{\frac{3}{2}}} \quad \text{...........(11)}$$

ค่าของ R_m เป็น log จะหาได้จากตารางเลขสำเร็จข้างท้าย ณ ละติจูด 0°, 45° และ 90° คือ

ละติจูด	log R_m	R_m	ความต่าง
0°	6.801 7489	6335 033 ม	
45°	6.803 9574	6367 331 ม	32.298 เมตร 20.07 ไมล์
90°	6.806 1733	6399 901 ม	32.570 เมตร 20.24 "

เป็นค่าของ Clarke spheroid ส่วนของ Everest spheroid ณ ละติจูด 0°, 15° และ 30" คือ

ละติจูด	log R_m	R_m	ความต่าง
0"	7.317 7301 49	207 84048.6 ฟุต	
15"	7.318 0198 78	207 97918.8 ฟุต	13870.2 ฟุต
30"	7.318 8120 90	208 35891.6 ฟุต	31912.8 "

4. รัศมีความโค้งในไพรม์เวอรติกอล หรือวงกลมดิ่งต้น

รัศมีความโค้งของพื้นผิวสเฟียรอยด์ในพื้นบรรจุจุดเส้นตั้งฉากกับพื้นผิว และตั้งได้ฉากกับเมริเดียนนั้น อาจพิสูจน์ได้ว่ามีค่าเท่ากับระยะของเส้นนอร์มาล (N) ที่ไปตัดแกนสั้นของสเฟียรอยด์นั้น

หากรอยตัดที่พิจารณานั้นผ่านตลอดเส้นผ่าศูนย์กลางของวงรีในพื้นซึ่งตั้งได้ฉากกับเมริเดียนซึ่งกึ่งแกนยาว = a (ดูรูป) และ OM = x sec∅

$$\therefore \text{OM} = \frac{a.\cos\varnothing.\sec\psi}{1 - e^2\sin^2\varnothing} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

และรัศมีตามโค้งของพื้นวงรีที่ปลายแกนสั้นของวงรีนั้น คือ $\frac{a^2}{b}$ (และตรงแนวศูนย์สูตรรัศมีมีค่าน้อยที่สุด คือ $\frac{b^2}{a}$)

$$\text{ฉะนั้น OM} = \frac{a^2}{b} \text{ คือ } \frac{a^2}{b} = \frac{a.\cos 0 \sec\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varnothing}} \quad \ldots\ldots\ldots(15)$$

$$\text{หรือ } b = \frac{a\sqrt{1 - e^2\sin^2\varnothing}}{\cos\varnothing\ \text{sew}\psi} = \varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

นี่คือรัศมีของรอยตัดในแนวกึ่งกลางทรงรี หมายถึงรอยตัดผ่านจุด P นั่นคือ จุด M มาอยู่ที่ P นั่นเอง

จากทฤษฎีของ "เมอนิเย" (Meunier's Theorem) ว่า รัศมีของความโค้งของรอยตัดที่ตั้งได้ฉากกับเมริเดียน (Normal Section) คือ p นั้นย่อมเท่ากับรัศมีของความโค้งรอยตัดในแนวกึ่งกลางวงรี (ϱ) หารเสียด้วย cosine ของมุมระหว่างพื้น 2 พื้น ซึ่งในรูปคือ มุม $\varnothing - \psi$

$$\cdot\ \varrho \cdot = \frac{a\ \overline{1 - e^2\sin^2 0}}{\cos 0\ \sec\psi\cos(0 - \psi)}$$

$$= \frac{a\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}}{(\cos 0\cos\psi + \sin 0\sin\psi)\cos 0\ \text{sex}\ \psi}$$

$$= \frac{a\sqrt{1 - e^2\sin^2\varnothing}}{\cos^2 0 + \cos 0\sin 0\ \text{ran}\ \psi}$$

$$\because \tan\psi = \frac{y}{x} = (1 - e^2)\tan\varnothing$$

$$\therefore \varrho' = \frac{a\sqrt{1 - e^2\sin^2\phi}}{\cos^2\phi + \cos\phi\sin\phi\,(1 - e^2)\tan\phi}$$

$$= \frac{a\sqrt{1 - e^2\sin^2\phi}}{\cos^2\phi + \sin^2\phi - e^2\sin^2\phi}$$

$$= \frac{a\sqrt{1 - e^2\sin^2\phi}}{1 - e^2\sin^2\phi}$$

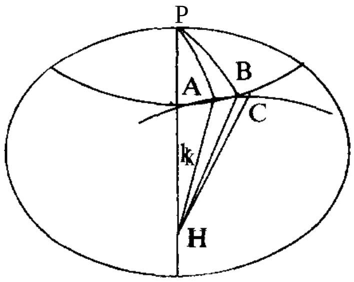
$$\varrho = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\phi}} = N \quad \ldots\ldots\ldots(15)$$

การหาค่า N อาจแสดงให้เห็นได้ง่าย ๆ เชิงเรขาคณิต ให้ A กับ B เป็นจุด 2 จุด อยู่ในแนวเส้นขนานซึ่งมีค่าละติจูดเดียวกัน เส้นดิ่งที่กระทำต่อพื้นผิว ณ จุด A และจุด B จะต้องตัดกันที่ H เสมอในแนวแกนสั้น

ให้ C เป็นจุดสถิตอยู่ในรอยตัดของไพรม์เวอร์ติกอลที่ผ่านจุด A และผ่านเมริเดียนของจุด B เส้นตั้งฉากกับโค้งนี้ที่ A และ C จะตัดซึ่งกันและกันที่จุด K เหนือ ดังนั้น K จึงเป็นศูนย์กลางของความโค้งโดยประมาณของส่วนโค้ง AC

จึงสังเกตดูว่า CK มิได้ตั้งฉากกับพื้นผิว เมื่อเส้นเมริเดียน PBC ขยับเข้าใกล้จุด A-จุด A กับจุด C จะขยับเข้าใกล้กันด้วย จุดตัดของเส้นตั้งได้ฉาก (Normals) โค้ง จะขยับเข้าหาศูนย์กลางของอาการโค้งจริง ๆ เข้าไปทุกที และระยะ CK ก็ขยับเข้าใกล้ระยะรัศมีจริงแห่งความโค้งด้วย นอกจากนั้น C ขยับเข้าหา A ได้มากเท่าไร C ก็ขยับเข้าหา B ใกล้ยิ่งขึ้นเช่นกัน และโดยทำนองเดียวกัน CK ก็ยิ่งขยับเข้าใกล้ และกลายเป็นเส้นตั้งได้ฉากกับพื้นผิวไป

เพราะฉะนั้นในที่สุด CK ต้องทับกับ AH ; นั่นคือ H เป็นจุดในทิศทางที่ศูนย์กลางของความโค้งเคลื่อนตัวไปสู่ และเส้นตั้งฉาก N ก็เป็นรัศมีความโค้งของรอยตัดไพรม์เวอร์ติกอลที่ A จงสังเกตว่า BH และ CK จะไม่ตัดกันอย่างแท้จริงในที่ว่างเปล่า (นอกเหนือจากในแนวแกนสั้น) แม้ว่าดูเหมือนจะปรากฏในรูปคล้ายกับตัดกันนอกแนวแกน



รูป 8.3

ในรูปปรากฏว่า

$$N = \frac{x}{\cos 0}$$

จาก (B) จะได้

$$N = \frac{a.\cos 0}{(\sqrt{1 - e^2\sin^2 Ø})\cos Ø}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 0}}$$

ค่าของ log N จะพบอยู่ในตารางท้ายเล่ม (Clarke Spheroid)

ละติจูด	ค่าในแนวเส้นขนาด 1”	log N
0”	111,321 เมตร	6.804 6985
10”	109,641”	6.804 1428
20”	104,649”	6.804 8705

Everest Spheroid :

ละติจูด	N	log N
0"	209 22931.8 ฟุต	7.321 6225,40
10°	209 25026.0 "	7.320 6660,07
20"	209 31059.7 "	7.320 7912,16

จะเห็นว่าความแตกต่างระหว่าง N กับ R_m มีมากที่สุดที่ศูนย์สูตร (ประมาณ 26 ไมล์) ที่ขั้ว N กับ R_m มีค่าเท่ากัน

เส้น "นอร์มาล" ที่ไปตัดแกนยาว ถ้าให้มีความยาวเป็น n แล้ว (ในรูป MD) จะได้

$$\frac{y}{i\ i} = \sin 0$$

หรือ $$n = \frac{y}{\sin 0} = \frac{a(1 - e^2)\sin 0}{(\sqrt{1 - e^2\sin^2\varnothing})\ \sin 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

$$= N.(1 - e^2)$$

รัศมีของเส้นขนานที่มีค่าละติจูด $\varnothing$ (= x) เราให้มีค่า

$$R_p = x = N.\cos\varnothing \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

5. รัศมีความโค้งของรอยตัดนอร์มาลหรือรอยตัดปกติ **(Normal Section)** ณ ทิศทางอื่น ๆ **(Any Azimuth)**

จากที่กล่าวมาแล้ว เราคงทราบการหาค่ารัศมีของความโค้งในแนวตัดหลัก 2 แนว ต่อไปนี้ยังเหลือเรื่องการแสดง หรือการนิพจน์ทั่ว ๆ ไปสำหรับรัศมีของความโค้งของรอยตัดในทิศทางอื่น ๆ นอกจากแนวหลักดังกล่าวแล้วดูบ้าง และในเรื่องที่จะแสดงต่อไปนี้ ก็อาจนิพจน์ออกมาในเทอมของรัศมีทั้ง 2 ที่กล่าวมาแล้วนั้น

สมการรูปทรงรี $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2} = 1$ ....(19)

หรือ $b^2x_1^2 + b^2y^2 + a^2z_1^2 = a^2b^2$ ....(20)

ในรูปแกน Z_1 ทับกับแกนสั้นของทรงรี หาก M เป็นจุดใด ๆ ที่พิจารณาอยู่บนเมริเดียน Z_1M และ MY เป็นรอยตัดใด ๆ เกิดจากใช้พื้นราบตัดผ่าน MH (เส้นตั้งฉาก) ทำมุมกับเมริเดียนเป็น α ครั้นแล้วสมการของทรงรีก็อาจหาได้เพื่ออ้างอิงถึงจุดศูนย์กำเนิด C แกน Z คือ CM และแกน Y ซึ่งตั้งได้ฉากกับ CM

ให้พิกัดของจุดใด ๆ เช่น P′ เป็น X_1, Y_1, Z_1 และให้พิกัดใหม่เป็น X, Y, Z

ฉะนั้นความสัมพันธ์ของพิกัดใหม่ที่มีต่อพิกัดเก่าจะได้

$X_1 = OG = OC + X + CB + BE$

$= OC + X + Z.\cos 0 + AN$

$= C + X + Z.\cos 0 + Y.\cos \alpha.\sin 0$ ....(21)

$\because$ $CH = HM - MC = N - n = N - N(1 - e^2) = Ne^2$

$\therefore$ $OC = CH.\cos 0 = Ne^2.\cos 0$ นำค่านี้แทนได้

$X_1 = Ne^2.\cos 0 + X + Z \cos 0 + Y \cos a \sin 0$ . . . . . (22)

$Y_1 = Y \sin a$ . . . .(23)

$Z_1 = BQ - QA = Z \sin - Y \cos \alpha \cos 0$ . . . . .(24)

นำค่า (22), (23) และ (24) ในแทนลงใน (20) จะได้

$b^2 (Ne^2. \cos 0 + X + Z \cos 0 \ Yo\cos a \sin \varnothing)^2 + b^2y^2. \sin^2 \alpha +$

$a' (Z \sin 0 \quad Y \cos \alpha \cos \varnothing)^2 = a^2b^2$

สมการที่ได้นี้ คือ สมการทรงรีที่อ้างอิงแทนพิกัดใหม่ ถ้าให้ X = O แล้ว P จะอยู่บนโค้ง MY และสมการที่ได้จะกลายเป็นสมการของรอยตัดที่เกิดจากพื้นราบอันนี้ คือ

$b^2(Ne^2.\cos 0 + X + Z \cos 0 + Y \cos \alpha \sin 0)' + b^2y^2.\sin^2\alpha + a^2(Z \sin 0 -$
$Y \cos a \cos 0)' = a^2b^2$ ....(25)

สมการข้างบนเป็นสมการวงรี MY

เพื่อหาค่ารัศมีของความโค้งที่จุด M จำเป็นต้องหา $\frac{dZ}{dY}$ และ $\frac{d^2Z}{dY^2}$ และใส่ค่าที่ได้นี้ลงในสูตรทั่วไปสำหรับรัศมีของความโค้ง ในการกระจายสมการข้างบนนี้มีวิธีกระทำ คือ กระจายเทอมต่าง ๆ ใน (25) รวมเทอมที่เหมือนกัน และหารเสียด้วย a^2 ได้

$$Y^2 [1 - e^2 (1 - \cos^2\alpha . \cos^2 \varnothing] + Z^2 (1 - e^2.\cos^2 0) - YZ (2e^2\cos\alpha.\sin 0 \cos 0) + 2Y(1 - e^2)N.e^2\cos\alpha.\sin \varnothing.\cos 0 + 2Ze^2(1 - e^2)N.\cos^2\varnothing = (a^2 - Ne^4.\cos^2 0)(1 - e^2) \ldots\ldots (26)$$

จากสมการ (26) แบบย่อของสมการทั่วไปเขียนได้ดังนี้

$$Y^2A + Z^2B - YZC + YD + ZE = F$$

โดยถือ Y เป็นตัวเปลี่ยนอิสระ หาค่าอนุพันธ์ครั้งที่ 1 ได้

$$2Y.A + 2Z \frac{dZ}{dY}.B - [Y \frac{dZ}{dY} + Z] C + D + \frac{dZ}{dY}.E = 0$$

$$2Y.A + 2Z \frac{dZ}{dY}.B - CY \frac{dZ}{dY} - CZ + D + E \frac{dZ}{dY} = o$$

โดยการหาอนุพันธ์ที่ 2 ได้

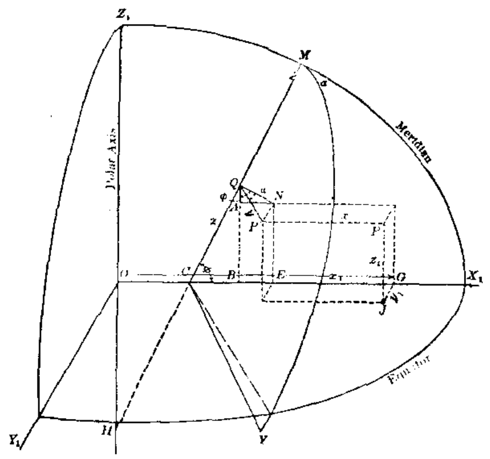
$$2A + 2B(Z \frac{d^2Z}{dY^2} + \frac{dZ}{dY} . \frac{dZ}{dY}) - C(Y\frac{d^2Z}{dY^2} + \frac{dZ}{dY}) - C \frac{dZ}{dY} + E \frac{d^2Z}{dY^2} = 0$$

$$2A + 2BZ\frac{d^2Z}{dY^2} + 2B(\frac{dZ}{dY})^2 - CY\frac{d^2Z}{dY^2} - C \frac{dZ}{dY} - C \frac{dZ}{dY} + E\frac{d^2Z}{dY^2} = 0$$

$$\frac{d^2Z}{dY^2} (2BZ - CY + E) = -[2A + 2B(\frac{dZ}{dY})^2 - 2C \frac{dZ}{dY}]$$

$$\frac{2A + 2B(\frac{dZ}{\cdots}) - 2C\frac{dZ}{\cdots}}{2BZ - CY + E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

เนื่องจากจุด M, $Y = 0$ และ $Z = n = N(1 - e^2)$



รูป 8.4

ฉะนั้น

$$\frac{dZ}{dY} = \frac{N(1 - e^2)(2e^2\cos\alpha.\sin\varphi\cos(\mathrm{I}) - 2(1 - e^2)Ne^2\cos\alpha.\sin\varphi.\cos\varphi}{2BZ - CY + E} = 0$$

นำแทนในสมการ (27) จะได้

$$\frac{d^2Z}{dY^2} = -\frac{2[- - e(1 - \cos^2\alpha.\cos\varphi)]}{2N(1 - e^2)(1 - e^2\cos^2\varphi) + 2e^2(1 - e^2)\cos^2\varphi.N} -$$

$$= -\frac{1 - e^2 + e^2\cos^2\alpha.\cos^2\varphi}{N(1 - e^2)[(1 - e^2\cos^2\varphi) + e^2\cos^2\varphi]}$$

$$= -\frac{1 - e^2 + e^2\cos^2 \alpha.\cos^2\varphi}{(N(1 - e^2)}$$

$$= -\frac{(1 - e^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + e^2\cos^2\alpha(1 - \sin^2\varphi)}{,\ N(1 - e^2)}$$

$$= -\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - e^2\sin^2\alpha - e^2\cos^2\alpha + e^2\cos^2\alpha - e^2\cos^2\alpha.\sin^2\varphi}{N(1 - e^2)}$$

$$= -\frac{(1 - e^2)\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - e^2\cos^2\alpha.\sin\varphi}{N(1 - e^2)} \neq \frac{P_m}{R_m}$$

$$\frac{R_m\sin^2\alpha + \frac{R_m}{1 - e^2}.\cos^2\alpha(1 - e^2\sin^2\varphi)}{N.R_m}$$

$$= -\frac{R_m\sin^2\alpha + \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}(1 - e^2)}.\cos^2\alpha(1 - e^2\sin^2\varphi}{NR_m}$$

$$= -\frac{R_m\sin^2\alpha + N.\cos^2\alpha}{NR_m} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

นำค่าที่ได้ของ $\frac{dZ}{dY}$ กับ $\frac{d^2Z}{dY^2}$ แทนในสูตร

$$R\alpha = \frac{[1 + (\frac{dZ}{dy})^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2Z}{dy^2}}$$

จะได้

$$R\alpha = \frac{\left\{ , + \left[\frac{N(1 - e^2)(2e^2\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi) - 2(1 - e^2)Ne^2\cos\alpha\sin\varphi\sin\varphi}{2BZ - CY + E}\right]^{\frac{3}{2}} \right\}}{\frac{R_m\sin^2\alpha + N.\cos^2\alpha}{NR_m}}$$

$$= \frac{NR_m}{N.\cos^2\alpha + R_m\sin^2\alpha} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

ถ้า $\alpha = 0$

$$R\alpha = \frac{NR_m}{N} = R_m$$ นี่คือ รัศมีความโค้งของโค้งเมริเดียน และถ้า

$\alpha = 90°$

$$R\alpha = \frac{NR_m}{R_m} = N$$ นี่คือ รัศมีความโค้งของ Prime Vertical ค่าของ log $R\alpha$ สำหรับ Latitude และแอซิมัธต่าง ๆ นั้นจะหาไว้เป็นตารางสำเร็จ น่าสังเกตว่า ค่าของ $R_{\alpha = 0}$ สำหรับแอซิมัธ 0° นั้นจะเท่ากับ R_m และแอซิมัธ 90° $R_{\alpha = 90°} = N$

Lat.	log $R\alpha = 0$	log $R_{\alpha = 90}$
0	6.801 75	6.804 6985
10	6.801 88	6.804 7428
20	6.802 26	6.804 8705
30	6.802 85	6.805 0663
40	6.803 73	6.805 4067
50	6.804 34	6.805 5628
60	6.805 06	6.805 8037
70	6.805 65	6.805 0003

ฯลฯ

๖. ผลปานกลาง $R\alpha$

ผลปานกลางของ $R\alpha$ ณ จุดใด ๆ บนผิวสเฟียรอยด์ไม่ว่าอะซิมุธใด ๆ จาก 0° ถึง 360° อาจหาได้ดังนี้ คือ จากวิชาแคลคูลัส ค่าปานกลางของฟังก์ชั่นใด ๆ ของ x ระหว่างเขตจำกัด a และ b คือ

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dX$$

ให้ $a = 0°$ และ $b = 360°$ และ $f(x) = R\alpha$, $dX = d\alpha$

ฉะนั้นผลปานกลาง $Ra = \frac{1}{2¶ - 0}\int_0^{2¶} R\alpha.d\alpha$

$$\frac{NR_m 1}{} \int_0^{2¶} \frac{}{N.\cos^2\alpha + R_m\sin^2\alpha}.d\alpha$$

$$= \frac{2}{¶} \int_0^{2¶} \frac{NR_m}{N.\cos^2\alpha + R_m\sin^2\alpha}.d\alpha$$

นำ $N\cos^2\alpha$ หารทั้งเศษ และส่วน

ผลปานกลางของ $R\alpha = \frac{2}{¶} \int_0^{\frac{¶}{2}} \frac{R_m.\frac{1}{\cos^2\alpha}}{, + \frac{R_m\sin^2\alpha}{N.\cos^2\alpha}}.d\alpha$

$$= \frac{2}{¶} \sqrt{NR_m}\int_0^{\frac{¶}{2}} \frac{\frac{R_m}{N}.\frac{1}{\cos^2}.d\alpha}{1 + \frac{R_m}{N}.\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \quad ....(30)$$

ให้ $l = \sqrt{\frac{R_m}{N}}.\tan\alpha$, $\frac{dl}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}.\tan\alpha.\sqrt{\frac{R_m}{N}}$

หรือ $\frac{dl}{da} = \sqrt{\frac{R_m}{N}} .\mathrm{soc}^2\alpha$

นำค่าที่ได้แทนใน (30) จะได้

$$\text{ผลปานกลางของ } R\alpha = \frac{2}{\pi} \sqrt{NR_m} \int_0^\infty \frac{d\ell}{1 + \ell^2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \sqrt{NR_m} \left[\text{arc.tan}\,\ell\right]_0^\infty$$

$$= \frac{2}{\pi} \sqrt{NR_m} \left[\tan^{-1}\right]_0^\infty = \frac{2}{\pi} \sqrt{NR_m} \cdot \frac{\pi}{2}$$

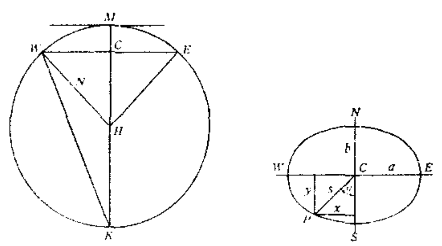
$$= \sqrt{NR_m} \quad . \qquad (31)$$

ฉะนั้น รัศมีปานกลางของความโค้ง ณ จุดใด ๆ บนผิวสเฟียรอยด์ก็คือ ผลปานกลางหรือมัชฌิมเชิงเรขาคณิตของรัศมีความโค้งของรอยตัดหลัก 2 แนว และพละคณิตผลปานกลางของรัศมีความโค้งก็คือ ผลปานกลางเชิงเรขาคณิตของ logs ของรัศมีทั้ง 2 นั้น คือ

$$\log R = \frac{1}{2} \log N + \log R_m$$

7. การพิสูจน์เชิงเรขาคณิตอาจหาสมการ (29)

การพิสูจน์เชิงเรขาคณิตอาจหาสมการ (29) ได้โดยง่าย การหา R เชิงเรขาคณิตนั้นให้นึกว่ามีพื้นราบสัมผัสวงกลมที่จุด M และให้พื้นขนาน EW ห่างจากพื้นสัมผัสเป็นจำนวนเล็กที่สุด (Infinitesimal Distance) พื้น EW จะตัดพื้นผิวเป็นรูปวงรีเล็กวงหนึ่ง จากที่กล่าวมาแล้วรัศมีความโค้งทางพื้นตั้งได้ฉากกับพื้นเมริเดียน (Prime Vertical Plane) คือ N



รูป 8.5

ในรูป W, M และ E คือจุด 3 จุดบนวงกลมความโค้งซึ่งมีรัศมี N และมีศูนย์กลางอยู่ที่ H อยู่บนแกน ในรูปสามเหลี่ยมคล้าย CMW กับ CKW

$$MC : CW = CW : CK$$

เนื่องจาก MC เป็นระยะเล็กมาก (Infinitesimal)

$$MC = \frac{CW^2}{CK} = \frac{a^2}{2N}$$

โดยทำนองเดียวกัน สำหรับจุด 3 จุดในพื้นเมริเดียนเราได้

$$MC = \frac{b^2}{2R_m}$$

และโดยทั่วไปสำหรับจุด 3 จุดในพื้นที่มีอะซิมุทต่าง ๆ จะได้

$$MC = \frac{S^2}{2R\alpha} \qquad \text{(ดังในรูป)}$$

พิกัดของจุด P คือ

$X = S.\sin a$ และ $Y = S.\cos a$

นำค่าแทนในสมการวงรีรูปทั่วไป คือในสมการ

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

จะได้ดังนี้

$$\frac{S^2 \ .\sin^2\alpha}{a'} + \frac{S^2 \ .\cos^2\alpha}{b^2} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

เนื่องจาก $\dfrac{a^2}{2N} = \dfrac{b^2}{2R_m} = \dfrac{S^2}{2R\alpha}$

หรือ $\dfrac{S^2}{a^2} = \dfrac{R\alpha}{N}$ และ $\dfrac{S^2}{b^2} = \dfrac{R\alpha}{R_m}$

นำค่านี้แทน (32)

$$\frac{R\alpha}{N}.\sin^2\alpha + \frac{R\alpha}{R_m}.\cos^2\alpha = 1$$

$$R\alpha \frac{R_m \sin^2\alpha + N.\cos^2\alpha}{NR_m} = \times$$

$$Ra = \frac{NR_m}{R_m \sin^2\alpha + N.\cos^2\alpha} \quad ......(33)$$

8. การพิสูจน์สมการ (31) เชิงเรขาคณิต

จากที่ทราบแล้วผลปานกลาง $R_a = \frac{1}{2¶} \int_0^{2¶} R_a.d\alpha$

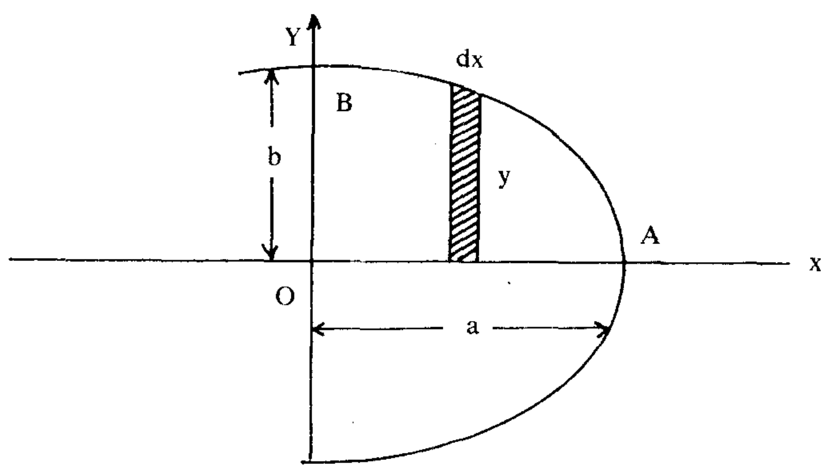
และเพราะว่า $R_a = R_m. \frac{S^2}{b^2}$

$\therefore$ ผลปานกลาง $R_a = \frac{1}{2¶} \int_0^{2¶} R,. \frac{S^2}{b^2}.d\alpha$ ....(34)

จากการหาพื้นที่ของรูปวงรีจากพิกัดโปลาร์ ในรูป คือ S เป็นระยะกับ $d\alpha$ เป็นทิศทางจะได้พื้นที่ดังนี้

พื้นที่ของวงรี $= \frac{1}{2}\int_0^{2¶} S^2.d\alpha$ หรือ $= \int_0^a Y.dx$

ซึ่ง $Ydx = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{1/2}.dx$ คือ อวัยวะ (Element) ของพื้นที่



รูป 8.6

$\therefore$ พื้นที่วงรี $= 4.\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}.dx$

$$= 4.\frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}.\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= 4.\frac{b}{\alpha}\left\{\left[\frac{1}{2}a\sqrt{a^2-a'} + \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}.\frac{a}{a}\right]\right.$$

$$\frac{b}{a}\quad\left.\left[\frac{1}{2}.0\sqrt{a^2-0}+\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}.0\right]\right\}$$

$$= 4.\frac{b}{a}.a.\frac{1}{2}.\frac{¶}{2} = ¶ab$$

$\therefore$ ผลปานกลาง R_a จาก (3 4) $= \frac{1}{¶} \times ¶.ab \times \frac{R_m}{b^2} = \frac{aR_m}{b}$ ....(35)

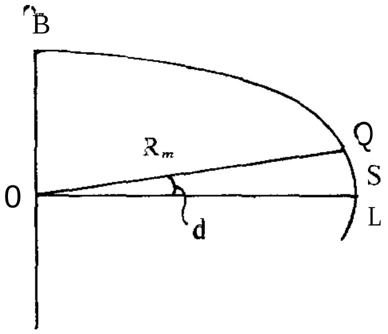
แต่ $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{N}{R_m}}$

.. (35) จึงได้ผลปานกลางR_a $= \sqrt{\frac{N}{R_m}}.R_m = NR,$ ....(36)

9. ความยาวของส่วนโค้งเมริเดียน

ส่วนโค้งขนาดเล็กใด ๆ ของเมริเดียนวงรีเราอาจถือเป็นโค้งวงกลมซึ่งมีรัศมีเป็น R_m ถ้าส่วนโค้งนั้นสั้นความเคลื่อนคลาดจะมีขนาดเล็กมาก

ในรูปให้ $QL = S$, $OQ = R_m$



รูป 8.7

$S = R_m.d\varphi$ ($d\varphi$ = เรเดียน)

หรือถ้า $d\varphi$ เป็นฟิลิบดาจะได้

$S = R_m.d\varphi''.\text{arc } 1''$

หากส่วนโค้งนี้ยาวค่า R_m จะแปรเปลี่ยนมากเห็นได้ชัด จึงจำเป็นที่จะต้องหา S โดยทำการอินติเกรต (Integrate) อวัยวะของความยาวโค้ง คือ

$dS = R_m.d\varphi$ จาก φ^1 ถึง φ^2

$$\int dS = \int_{\varphi^1}^{\varphi^2} R_m.d\,\varphi = \int_{\varphi^1}^{\varphi^2} \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.d\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots$$

หากเรากระจายส่วนออกตามทฤษฎีขบวนเทอมคู่ (Binomial Theorem) จะทำให้ง่ายขึ้น

$$(1 \quad e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}.e^2\sin^2\varphi + \frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-1)}{2!}.e^4\sin^4\varphi +$$

$$\frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-1(-\frac{3}{2}-2)}{3!}.e^6\sin^6\varphi + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{3}{2}.e^2\sin^2\varphi + \frac{15}{8}.e^4\sin^4\varphi + \frac{35}{16}.e^6\sin^6\varphi +$$

นำแทน (37) ได้

$$S = a(1-e^2)\int^{\varphi_1{}^1} (1 + \frac{3}{2}.e^2\sin^2\varphi + \frac{15}{8}.e^4\sin^4\varphi + \frac{35}{16}.e^6\sin^6\varphi + \ldots)d\varphi$$

เพื่ออินติเกรตเทอมต่าง ๆ ของอนุกรมในวงเล็บ เราอาจทำให้ง่ายขึ้นโดยอาศัยความสัมพันธ์ต่อไปนี้

จากตรีโกณมิติเราพบว่า

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\cos 2\varphi \qquad = A$$

$$\sin^4\varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}.\cos 2\varphi + \frac{1}{8}.\cos 4\varphi \qquad = B$$

$$\sin^6\varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}.\cos 2\varphi + \frac{3}{16}.\cos 4\varphi - \frac{1}{32}.\cos 6\varphi = C$$

ซึ่ง A ได้จาก

$$\cos(\varphi+\varphi) = \cos\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\sin\varphi$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi \quad \ldots\ldots.(D)$$

จาก D เมื่อนำ 2 หารตลอดจะได้ A

จาก (D) จะได้

$$\cos 4\varphi = 1 - 2\sin^2 2\varphi = 1 - 2(2\sin\varphi\cos\varphi)^2$$

$$= 1 - 8\sin^2\varphi.\cos^2\varphi$$

$$= 1 - 8\sin^2\varphi(1 - \sin^2\varphi)$$

$$= 1 - 8\sin^2\varphi + 8\sin^4\varphi$$

นำ 8 หารตลอด และนำ A แทน $\sin^2\varphi$ จะได้

จาก D นำ 3 คูณโค้งได้

$$\cos 6\varphi = 1 - 2\sin^3 3\varphi = 1 - 2(3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi)^2$$

$$= 1 - 2(9\sin^2\varphi - 24\sin^4\varphi + 16\sin^6\varphi)$$

$$= 1 - 18\sin^2\varphi + 48\sin^4\varphi - 32\sin^6\varphi$$

$$= 1 - 18(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi) + 48(\frac{1}{8}\cos 4\varphi - \frac{1}{8} + \sin^2\varphi) - 32\sin^2\varphi$$

$$= 1 - 9 + 9\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi - 6 + 48(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi) - 32\sin^6\varphi$$

$$= -14 + 9\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi + 24 - 24\cos 2\varphi \quad 32\sin^6\varphi$$

$$= 10 - 15\cos 241 + 6\cos 4\varphi - 32\sin^6\varphi$$

$$\therefore \sin^6\varphi \qquad \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2\varphi + \frac{3}{16}\cos 4\varphi - \frac{1}{32}\cos 6\varphi = C$$

$$\therefore S = a(- e^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi_1}(1 + \frac{3}{2}.e^2A + \frac{15}{8}.e \; .B + \frac{35}{16}.e^6.C + \ldots\ldots)d\varphi$$

$$= a(1-e^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi}[1 + \frac{3}{2}e^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi) +$$

$$\frac{15}{8}e(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi)$$

$$= \frac{35}{16}e^6(\frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2\varphi + \frac{3}{16}\cos 4\varphi - \frac{1}{32}\cos 6\varphi)]d\varphi$$

$$= a(1-e^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi^2}(1 + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}e^2\cos 2\varphi + \frac{45}{64}e^4$$

$$\frac{15}{64}\cos 2\varphi + \frac{15}{-}\cos 4\varphi$$

$$+ \frac{175}{254}e^6 - \frac{525}{512}e^6\cos 2\varphi + \frac{105}{256}e^6\cos 4\varphi - \frac{35}{512}e^6\cos 6\varphi)d\varphi$$

$$= a(1-e^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi^2}(1 + \frac{3e^2}{4} + \frac{45e^4}{64} + \frac{175e^6}{256})$$

$$-(\frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6)\cos 2\varphi$$

$$+ (\frac{15}{64}e + \frac{105}{256}e^6)\cos 4\varphi - \frac{35}{512}e^6\cos 6\varphi)d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (38)$$

ให้

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6$$

$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{512}{512}e^6$$

$$C = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6$$

" $$D = \frac{35}{512}e$$

e^3 = 0.006 676 86579 97291 0991438 นำค่าใส่แทนข้างบน ซึ่งค่า e^2 นี้เป็นของ Clarke 1866 จะได้

$$A = 1 + \frac{3}{4}(0.0067686580) + \frac{45}{64}(0.00676865480)'' + \frac{175}{256}(0.0067686580)^3$$

$= 1 + 0.0050764935 + 0.7031250 \times 0.0000458 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 1.0051093$ หรือ $\log A = 0.002133$

$B = 0.0051202$ หรือ $\log B = 7.709287$

$C = 0.0000108$ หรือ $\log C = 5.03342$

$D = 0.0000000$ หรือ $\log D = 2.326$

จาก (38) เราได้

$$S = a(1 - e^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (A - B.\cos 2\varphi + C.\cos 4\varphi - D.\cos 6\varphi)\, d\varphi \ \ldots\ldots (39)$$

การ Integrate เราอาจ Integrate ทีละอัน โดยสมมุติให้ $V = \varphi$, $v = 2$, $v = 4\varphi$, $v = 6\varphi$, $dv = d\varphi$, $\frac{dv}{2} = d\varphi$, $\frac{dv}{4} = d\varphi$, และ $\frac{dv}{6} = d\varphi$ แล้วนำแทนใน (39)

$$S = a(1 - e^2) \left[\int_{1}^{V^2} A.dv - \int_{\frac{v_1}{2}}^{\frac{v_2}{2}} B.\cos v.\frac{dv}{2} + \int_{\frac{v_1}{a}}^{\frac{v_2}{4}} C.\cos v \frac{dv}{4} - \right.$$

$$\int_{\frac{v_1}{6}}^{6} D.\cos v \frac{dv}{6}$$

$$= a(1 - e^2) \left[(Av)_{v_1}^{v_2} - (B.\sin v)_{\frac{v_1}{2}}^{\frac{v_2}{2}} + (C.\sin v)_{\frac{v_1}{4}}^{\frac{v_2}{4}} - (D.\sin v)_{\frac{v_1}{6}}^{6} \right]$$

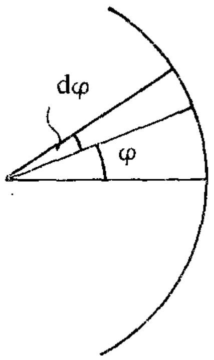
หรือถ้าเปลี่ยนใน Term ของ φ จะได้

$$S = a(1 \quad e^2)\left[A(\varphi_2 \quad \varphi_1) - \frac{1}{2}B(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)\right.$$

$$+ \frac{1}{4}C(\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) - \frac{1}{6}D(\sin 6\varphi_2 - \sin 6\varphi_2 - \sin 6\varphi_1) \quad ....(40)$$

10. พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมบนสเฟียรอยด์

เส้นขนาน 2 เส้นนั้นถูกแยกออกจากกัน และระยะระหว่างเส้นขนานแนวเมริเดียน ใน $dS = R_m d\varphi$ และเส้นขนาน 2 เส้นนี้จะสถิตอยู่บนพื้นผิวกรวยที่มีสัมผัสพิภพ ณ Latitudes ที่พิจารณา ซึ่งเส้นขนานทั้ง 2 นั้น อาจหาความยาวของเส้นรอบวงได้ดังนี้

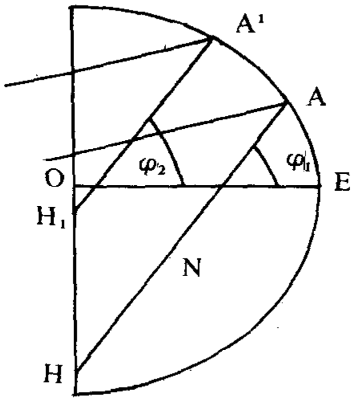


รูป 8.8

1) วงขนานที่มี Latitude φ_2 มีเส้นรอบวง = $2\P\, N \cos\varphi_2$

2) วงกลมขนานที่มี Latitude φ_1 มีเส้นรอบวง = $2\P\, N \cos \varphi_1$

ถ้าให้ dA คือ พื้นที่แถบที่เกิดจากวงกลมขนานทั้ง 2 ล้อมอยู่จะได้



รูป 8.9

$$dA = \text{กว้าง} \times \text{ยาว}$$

$$= R_m d\varphi \times 2\P\, N \cos \varphi$$

(พิจารณาแถบวงขนานนั้นเป็นจำนวนเล็กที่สุด φ_1 กับ φ_2 ทับกันเป็น φ)

$$= 2\P \cos\varphi \, d\varphi \times \frac{a(1 \quad e^2)}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{a}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2\P \cos\varphi d\varphi . a^2(1 - e^2)(1 - e^2\sin^2\varphi)^{-2}$$

$$= 2\P \cos\varphi d\varphi . b^2(1 - e^2\sin^2\varphi)^{-2}$$

กระจาย $(1 - e^2\sin^2\varphi)^{-2}$ ออกตามสูตร Binomial คือ

$$(1 - x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{3i}x^2 - \frac{n(n-1)(n \quad 2)}{3i}x^3 + \ldots (x^2 < 1)$$

$$(I - e^2\sin^2\varphi)^{-2} = 1 + 2e^2\sin^2\varphi + \frac{-2(-2-1)}{2}e^4\sin^4\varphi$$

$$- \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{1 \times 2 \times 3}e^6\sin^6\varphi + \frac{-2(-2-1)(-2-2)(-2-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$e^8\sin^8$.)

$$= 1 + 2e^2\sin^2\varphi + 3e^4\sin^4\varphi + 4e^6\sin^6\varphi + 5e^8\sin^8\varphi + ...$$

เราได้

$$dA = 2\pi b^2\cos\varphi(1 + 2e^2\sin^2\varphi + 3e^4\sin^4\varphi + 4e^6\sin^6\varphi +$$

$$5e^8\sin^8\varphi + ...)d\varphi \qquad ....(41)$$

หากจะ Integrate (41) จะพบว่าเมื่อนำค่า $\cos\varphi$ คูณเข้าไปในวงเล็บ รูป lntergration จึงเข้าหลักรูป Intergration ทั่วไปจากสูตร

$$\int \cos\varphi.\sin^n\varphi d\varphi = \frac{1}{n+1} . \sin^{n+1}\varphi\, d\varphi$$

ฉะนั้น

$$\int dA = A \Big[_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 2\P b^2 \Big[\sin\varphi + \frac{2}{3} e^2\sin^3\varphi + \frac{3}{5} e^4\sin^5\varphi + \frac{4}{7} e^6$$

$$\sin^7\varphi + \frac{5}{9} e^8\sin^9\varphi + ... \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \qquad ....(42)$$

$$= 2\P b^2 (\sin\varphi_2 \quad \sin\varphi_1) + \frac{2}{3} e^2(\sin^3\varphi_2 + \sin^3\varphi_1)$$

$$+ \frac{4}{7} e^6 (\sin^7\varphi_2 - \sin_2\varphi_1) + ... \quad ....(43)$$

จากตรีโกณมิติเราทราบ

$$\sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi \qquad ....(A)$$

$$\sin^5\varphi = \frac{5}{8}\sin\varphi - \frac{5}{16}\sin 3\varphi + \frac{1}{16}\sin 5\varphi ....(B)$$

$$\sin^7\varphi = \frac{35}{64}\sin\varphi - \frac{21}{64}\sin 3\varphi + \frac{7}{64}\sin 5\varphi - \frac{1}{64}\sin 7\varphi ...(C)$$

(B) และ (C) หาจาก (A) ดูข้อ 3.9

จาก (42) อาจหาได้ดังนี้

$$A\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 2\pi b^2 \sin\varphi + \frac{2}{3} e^2 \left(\frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi\right)$$

$$+ \frac{3}{5} e^2 \left(\frac{5}{8}\sin\varphi - \frac{5}{16}\sin 3\varphi + \frac{1}{16}\sin 5\varphi\right)$$

$$+ \frac{4}{5} e^6 \left(\frac{35}{64}\sin\varphi - \frac{21}{64}\sin 3\varphi + \frac{7}{64}\sin 5\varphi - \frac{1}{64}\sin 7\varphi\right) + \ldots\ldots\ldots \Big|_{\varphi_1}$$

$$= 2\pi b^2 . \Big[\sin\varphi + \frac{e^2}{2}\sin\varphi - \frac{1}{6} e^2 \sin 3\varphi + \frac{3}{8} e^4 \sin\varphi + \frac{3}{16} e^4 \sin 3\varphi + \frac{2}{80} e^4 \sin 5\varphi + \frac{5}{16} e^6 \sin\varphi - \frac{3}{16} e^6 \sin 3\varphi + \frac{1}{16} e^6 \sin 5\varphi - \frac{1}{112} e^6 \sin 7\varphi + \ldots\ldots\ldots \Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

$$= 2\pi b^2 . \Big[\left(1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6 + \frac{35}{128} e^8\right)\sin\varphi - \left(\frac{1}{6} e^2 + \frac{3}{16} e^4 + \frac{3}{16} e^6 + \frac{35}{192} e^8\right)\sin 3\varphi + \left(\frac{3}{80} e^4 + \frac{1}{16} e^6 + \frac{5}{64} e^8\right)\sin 5\varphi - \left(\frac{1}{112} e^6 + \frac{5}{256} e^8\right)\sin 7\varphi \Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \quad \ldots\ldots\ldots (44)$$

$A = 1 + \frac{e^2}{2} + \frac{3}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6 + \frac{35}{128} e^8 = 1.003\ 4016$ (หรือ $\log A = 0.001\ 4748$

$B = \frac{e^2}{6} + \frac{3}{16} e^4 + \frac{3}{16} e^6 + \frac{35}{192} e^8 = 0.001\ 1368$ (หรือ $\log B = 7.05568$)

$C = \frac{3}{80} e^4 + \frac{1}{16} e^6 + \frac{5}{64} e^8 = 0.000\ 0017$ (หรือ $\log C = 4.2304$)

$D = \frac{1}{112} e^6 + \frac{5}{256} e^8 = 0.000\ 0000$

ฉะนั้นใน (44) จึงได้

$$A\Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 2¶b^2 \Big[2.A \sin \frac{1}{2}(\varphi_2 \quad \varphi_1) \cos\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$2B \sin \frac{3}{2}(\varphi_2 \quad \varphi_1)\cos \frac{3}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + 2C \sin \frac{5}{2}(_2 - \varphi_1).$$

$$\cos \frac{5}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \quad 2D \sin \frac{7}{2}(\varphi_2 -- \varphi_1) \cos \frac{7}{2}(\varphi_1 + \varphi_2\Big]$$

$$= 4¶b^2 \Big[A.\sin (\frac{\Delta\varphi}{2}) \cos\varphi_m - B \sin 3 (\frac{\Delta \varphi}{2}) \cos 3\varphi_m$$

$$+ C \sin 5 (\frac{\Delta \varphi}{2}) \cos 5\varphi_m \quad D \sin 7 (\frac{\Delta \varphi}{2}).$$

$$\cos 7.\varphi_m + P \ldots\Big] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(45)$$

สำหรับรูปเหลี่ยมที่มีด้านกว้างขนาดย่าน 1° แต่ละด้าน คือ $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi =$ 1° เช่นนี้ หากให้ A_1 เป็นพื้นที่ที่พิจารณาในย่านด้านกว้าง 1° เราจะได้

$$A\Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2} + 360" = A,$$

จาก (43) จึงได้

$$A_1 = \frac{3¶b^2}{360} \Big[A.\sin 30 \cos\varphi_m - B\sin(1° 30') \cos 3\varphi_m + C.\sin 2° 30' \cos 5\varphi_m -$$

$$D.\sin 3° 30' \cos 7\varphi_m + \ldots\ldots\Big] \qquad \ldots\ldots\ldots(46)$$

จากสูตร (46) นี้ ถ้าค่า A B C และ D หาจาก e ของสเฟียรอยด์ที่ใช้ เราก็สามารถจะหาพื้นที่สามเหลี่ยมบนผิวสเฟียรอยด์ขนาดที่มีแถบกว้าง 10′, 15′, 20′, 25′ .... ได้ แล้วสร้างเป็นตารางไว้

11. สูตรคละ

สูตรต่อไปนี้เกี่ยวข้องกับรูปวงรีที่จะกล่าวต่อไปนี้เพื่อสะดวกในการใช้อ้างอิง

จากที่ทราบแล้วยืออเซ็นตริคละติจูด หรือ ละติจูดที่คิดมุมตรงจุดศูนย์กลางพิภพนั้น อาจหาได้จากรูปข้อ 3.1 คือ

$$\frac{y}{x} = \tan\psi$$ ซึ่ง x และ y ทราบค่าอยู่แล้วเมื่อนำแทนจะได้

ได้ $$\tan\psi = \frac{a(1 - e^2)\sin\varphi}{1 - e^2\sin^2\varphi} \times \frac{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}{a\cos\varphi}$$

ความต่างที่ Equator และที่ขั้วจะมีค่า = 0 คือ

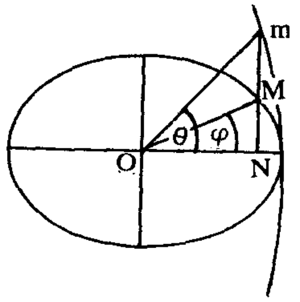
$\tan\psi = (1 - e^2)\tan 0° = 0$ ที่ Equator และที่ขั้ว φ จะทับ ψ ความต่างจึงเป็น 0 เช่นกัน ตรงละติจูด 45° จะได้

$$\tan\psi = (1 - e^2)\tan 45''$$

$$e^2 = 0.006\ 637\ 847 \text{ (Everest)}$$

$$\tan\psi = 0.993\ 362\ 153$$

ความต่างระหว่าง $\tan\psi$ กับ $\tan\varphi$ ตรง 45° = 1 - 0.99336153 = 0.006637047 ซึ่งมีค่ามากที่สุดประมาณ 0° 11′ 40″



รูป 8.10

ละติจูดตัดทอน Θ อาจหาได้จากละติจูดบนสเฟียรอยด์ คือ อาศัยความสัมพันธ์ ดังนี้

$a \tan \Theta = b \tan \varphi$ ....(A)

ความสัมพันธ์นี้หาได้ดังต่อไปนี้

$MN = y$ และ $MN = Y$

สมการวงรี $\quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ ....(1)

สมการวงกลม $\quad \frac{Y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ ....(2)

จาก (1) $\quad 1 - \frac{x^2}{a'} = \frac{y^2}{b^2}$ และจาก (2) $\quad 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{Y^2}{a^2}$

.. $\quad \frac{Y^2}{a'} \quad \frac{y^2}{b^2}$ หรือ $\frac{b}{a} = \frac{y}{Y}$

หรือ $\quad \frac{mN}{MN} = \frac{a}{b}$

$\because \tan \Theta = \frac{mN}{ON}$ และ $\tan \psi = \frac{MN}{ON}$

$$\frac{\tan\Theta}{\tan \psi} = \frac{mN}{ON} \quad \frac{ON}{MN} = \frac{a}{b}$$

หรือ $\tan \psi = \frac{b}{a} \tan\Theta = \frac{b^2}{a^2} \tan \varphi$. จาก (47)

หรือ $\quad a \tan \Theta = b \tan \psi$ ตรงกับ (A)

จำนวนยุบของขั้วเรานิพจน์ในรูป

$\frac{a - b}{a} = f$ (Flattening)

ระยะของส่วนโค้งในแนวเมริเดียนในจตุรางคดลหนึ่ง ๆ เราได้ $= q$

$q = \frac{a\P}{2} (1 - \frac{e^3}{4} - \frac{3}{64} e^4$ ....) ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

จากที่กล่าวมาแล้วในข้อ 3.9

$$S = q\,4q\varphi_1\varphi_2 = a(1 - e^2)\int_{\varphi_2}^{\varphi_2}\Big[1 + \frac{3}{2}e^2\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\big)$$

$$+ \ ^{15}\ e^4\big(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi\big]\,d\varphi$$

$$q = a(1 - e^2)\int_0^{\frac{¶}{2}} \Big[1 + \frac{3}{4}e^2(1 - \cos 2\varphi) + \frac{15}{64}e^4(3 - 4\cos 2\varphi +$$

$$\cos 4\varphi)\Big]\,d\varphi$$

$$= a(1 - e^2)\int_0^{\frac{¶}{2}}\Big[1 + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}e^2\cos 2\varphi + \frac{45}{64}e^4$$

$$- \frac{15}{16}e'\cos 2\varphi + \frac{15}{64}\cos 4\varphi\Big]\,d\varphi$$

$$= a(1 - e^2)\int_0^{\frac{¶}{2}}\Big[\big(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^2\big) - \big(\frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{15}e^4\big)\cos 2\varphi$$

$$+ \frac{15}{64}\cos 4\varphi)\Big]\,d\varphi$$

$$= a(1 - e^2)\Big[\varphi\big(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4\big) - \frac{1}{2}\big(\frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4\big)\sin 2\varphi$$

$$+ \frac{15}{256}\sin 4\varphi\Big]_0^{\frac{¶}{2}}$$

$$= a(1 - e^2)\Big[\frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}e^2¶ + \frac{45}{128}e^4¶ - \big(\frac{3}{8}e^2 + \frac{15}{32}e^4\big)\sin ¶$$

$$+ \frac{15}{256}\sin 2¶\Big] - 0$$

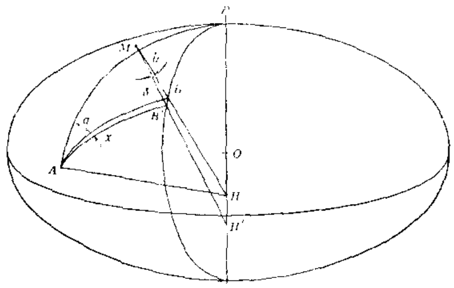
$$= a(1 - e^2)\Big[\frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}e^2¶ + \frac{45}{128}e^4¶\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{a\P}{2} + \frac{a\P e^2}{2} - \frac{3ac^2\P}{8} - \frac{3ae^4\P}{8} - \frac{45ae^4\P}{128} - \frac{45ae^6\P}{128} \;,\ldots,\ldots\ldots$$

$$= \frac{a\pi}{2} \; (1 - \frac{e^2}{4} \quad \frac{3e^4}{64} \quad \frac{45e^6}{64} \;\ldots\ldots\ldots) \qquad \ldots\ldots\ldots\ (48)$$

12. ผลเกิดจากความสูงของสถานีในแนวแอซิมัธ

ในการรังวัดมุมในแนวราบของสถานีหนึ่งนั้น มักมีความเคลื่อนคลาดแฝงอยู่ ทั้งนี้เนื่องจากเส้นนอร์มาลที่ลากจาก 2 จุดบนพื้นผิวพิภพมิได้อยู่พื้นเดียวกัน เพราะความสูงของจุดนั้นอยู่เหนือพื้นผิวสเฟียรอยด์



รูป 8.11

ความเคลื่อนคลาดอันนี้อาจมีลักษณะคล้ายกันกับความเคลื่อนคลาดในการส่องเล็งไปยังหลักเล็งที่มิได้อยู่ในแนวดิ่ง ที่หมายเล็งยิ่งสูง การวัดมุมราบก็ยังมีความคลาดเคลื่อนมากขึ้น

ในรูปสมมุติผู้รังวัดอยู่ที่ A ส่องเล็งไปยังจุด M ที่มีความสูงเป็น h เหนือระดับทะเล พื้นดิ่งเครื่องมือบรรจุจุด M ลองฉายลงไปยังพื้นระดับน้ำทะเลที่จุด B ในแนว MH

H เป็นจุดปลายเส้นนอร์มาลที่จุด A

จุดซึ่งอยู่ในแนวดิ่งใต้จุด M คือ B′ ซึ่งแสดงได้โดยเส้นนอร์มาล MH′ มุม δ คือมุม HMH′ หรืออาจกล่าวว่าเป็นมุมใกล้เคียงกับมุม HBH′

มุม x อยู่ตรงข้ามกับ BB′ ที่จุด A (คือตำบลของผู้ทำการ) เป็นมุม **จำนวนแก้ที่ต้องการ** ละติจูดของจุด A = φ และละติจูดที่ M = φ

ในรูป Δ HMH′

$$\frac{HH'}{\sin d} = \frac{BM + BH}{\sin \hat{MH'H}}$$

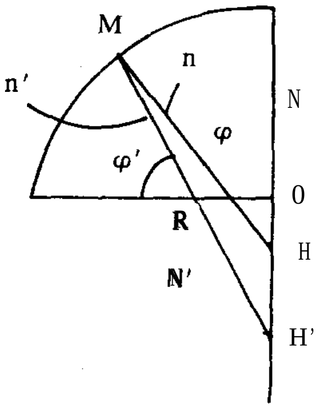
หรือ $$\frac{\sin d}{\sin \hat{MH'H}} = \frac{HH'}{BM + BH} = \frac{HH'}{HB} \text{ (โดยประมาณ)}$$

หรือ $$\sin \delta = \frac{HH''}{HB} \cdot \sin \hat{MH'H}$$

MH H = 90 − φ' โดยประมาณ และ δ เป็นมุมขนาดเล็ก และ φ' = ละติจูดจุด B

$$\therefore \quad d = \frac{HH'}{HB} . \cos\varphi' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

$$\because \quad HH' = OH' - OH \quad \text{-------} (1)$$



รูป 8.12

ในรูปจะเห็นว่า

$$\frac{OH'}{RH'} = \sin\varphi' \text{ หรือ } OH' = RH'\sin\varphi' = (N' - n)\sin\varphi'$$

$$\frac{OH}{OQ} = \sin\varphi \text{ หรือ } OH = HQ\sin\varphi = (N - n)\sin\varphi$$

นำแทน (1) จะได้

$$
\begin{aligned}
HH' &= (N' - n')\sin\varphi' \quad (N - n)\sin\varphi \\
&= N'\sin\varphi' - N'(1 - e^2)\sin\varphi' - N\sin\varphi + N(1 - e^2)\sin\varphi \\
&= N'\sin\varphi' - N'\sin\varphi + N'e^2\sin\varphi' - N\sin\varphi + N\sin\varphi - N e^2 \\
&\quad \sin\varphi \\
&= N' e^2\sin\varphi' - N e^2\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (50)
\end{aligned}
$$

ฉะนั้น (47) จึงเป็น

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{\cos\varphi'}{N}(N'e'\sin\varphi' \quad Ne^2\sin\varphi) \\
&= \frac{\cos\varphi'}{N}\left(\frac{ae^2\sin\varphi'}{(1 - e^2\sin^2\varphi')^{\frac{1}{2}}} - \frac{ae^2\sin\varphi}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&= \frac{ae\cos\varphi'}{N}\left(\frac{\sin\varphi'}{(1 - e^2\sin^2\varphi')^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sin\varphi}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&= \frac{ae^2\cos\varphi'}{N}\left(\frac{\sin\varphi'(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} \quad \sin\varphi(I - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}{1 - e^2\sin^2\frac{\varphi + \varphi}{2}}\right),
\end{aligned}
$$

โดยกระจายแบบ Binomial เศษจะได้

$$e = \frac{ae^2\cos\varphi'}{N}\left(\frac{\sin\varphi'(1 - \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi + \ldots) - \sin\varphi(1 - \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi + \ldots)}{1 - e^2\sin^2\varphi_m}\right)$$

$$= \frac{ae^2\cos\varphi'}{N}\left(\frac{\sin\varphi' - \frac{e^2}{2}\sin\varphi'\sin^2\varphi - \sin\varphi + \frac{e^2}{2}\sin\varphi\sin^2\varphi'}{1 - e\sin^2\varphi_m}\right)$$

$$= \frac{ae^4\cos\varphi'}{N}\left(\frac{(\sin\varphi' - \sin\varphi) + \frac{e^2}{2}\sin\varphi'\sin\varphi(\sin\varphi' - \sin\varphi)}{1 - e^2\sin^2\varphi_m}\right)$$

$$= \frac{ae^2\cos\varphi'}{N}\left(\frac{\sin\varphi' - \sin\varphi)(1 + \frac{e^2}{2}\sin\varphi'\sin\varphi)}{1 - e^2\sin^2\varphi_m}\right)$$

$$= \frac{ae^2\cos\varphi'}{N}\left(\frac{2\cos\varphi_m\sin\frac{\Delta\varphi}{2}(1 + \frac{e^2}{2}\sin\varphi'\sin\varphi)}{1 - e^2\sin^2\varphi_m}\right)$$

เนื่องจาก $\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$ มีขนาดเล็กมากจึงยอมใช้ $\frac{\Delta\varphi}{2}$ แทนได้ ฉะนั้น

$$\varrho = \frac{ae^2\cos\varphi'}{N}\left(\frac{\cos\varphi_m.\frac{\Delta\varphi}{2}.2(1 + \frac{e^2}{2}\sin\varphi'\sin\varphi)}{1 - e^2\sin^2\varphi_m}\right)$$

$$= \frac{ae^2\cos\varphi'}{N}.\cos\varphi_m.\frac{s\cos\alpha}{R_m}\left(\frac{1 + \frac{e^2}{2}\sin\varphi'\sin\varphi}{1 - e^2\sin^2\varphi_m}\right) \text{ ซึ่ง } \Delta\varphi = \frac{s\cos\alpha}{R_m}$$

ดูจาก Difference in Latitude

$$= \frac{ae^2\cos\varphi}{a(1 - e^2)N}.\cos\varphi^m.s\cos\alpha\,(1 - e^2\sin^2\varphi)^{3/2}\left(\frac{1 + \frac{e^2}{2}\sin\varphi'\sin\varphi}{1 - e^2\sin^2\varphi^m}\right)$$

$$= \frac{e^2\cos^2\varphi'.s\cos\alpha}{N(1 - e^2)}(1 - e^2\sin^2\varphi)^{1/2}(1 + \frac{e^2}{2}\sin\varphi'\sin\varphi)$$

$$= \frac{e^2\cos^2\varphi'.s\cos\alpha}{N(1 - e^2)} + e^4\text{term (ตัดทิ้ง)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(51)$$

ระยะในแนวตรง BB′ = hδ และจำนวนแก้แก่แอซิมัธ (x) ที่จุด A อาจหาได้ดังนี้

$$\frac{BB'}{\sin x} = \frac{s}{\sin\alpha}$$

$$x = \frac{n\ \delta .\sin\alpha}{s}$$

หรือ $$x'' = \frac{h\ d\ .\sin\alpha}{s\ \text{arc}\ 1'}$$

$$= \frac{he^2\cos^2\varphi\ .s\ \text{cosasina}}{s.N(1-e^2)\text{arc}\ 1''}$$

ให้ $$k = \frac{e^2}{2(1-e^2)\text{arc}\ 1''}$$

$$x'' = k\frac{h}{N}.\cos^2\varphi'\sin 2\alpha \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..(53)$$

Logarithm ของ k สำหรับ Latitude 45° = 2.84685 เมื่อที่หมายเล็งอยู่ทางตะวันออกเฉียงเหนือ หรือตะวันตกเฉียงใต้ของผู้ทำการ แอซิมัธต้องเพิ่มขึ้นเพื่อได้รับแอซิมัธที่ถูก ณ ที่พื้นระดับทะเล ถ้าที่หมายเล็งอยู่ตะวันตกเฉียงเหนือ หรือตะวันออกเฉียงใต้ มุมแอซิมัธที่รังวัดจะต้องลดลง

สำหรับ φ = 45°, α = 45° และ h = 1,000 เมตร ค่า X″ = 0.″055 ค่านี้น้อยกว่าความเคลื่อนคลาดคาดคะเนการรังวัดอยู่มาก ฉะนั้นจึงตัดทิ้งเสียได้ นอกจากจะมีความสูงมาก ๆ

จำนวนแก้นี้แก้ให้กับมุมที่รังวัดในโครงข่ายสามเหลี่ยมสำคัญ ๆ เช่น ในเท็กซัส (Texas) และแคลิฟอเนีย (California) และส่วนโค้งที่วอชิงตัน (Washington arc) รู้สึกว่ากระทบกระเทือนต่อโครงข่ายสามเหลี่ยมทางกึ่งตะวันออกของ U.S.A. เพียงเล็กน้อย

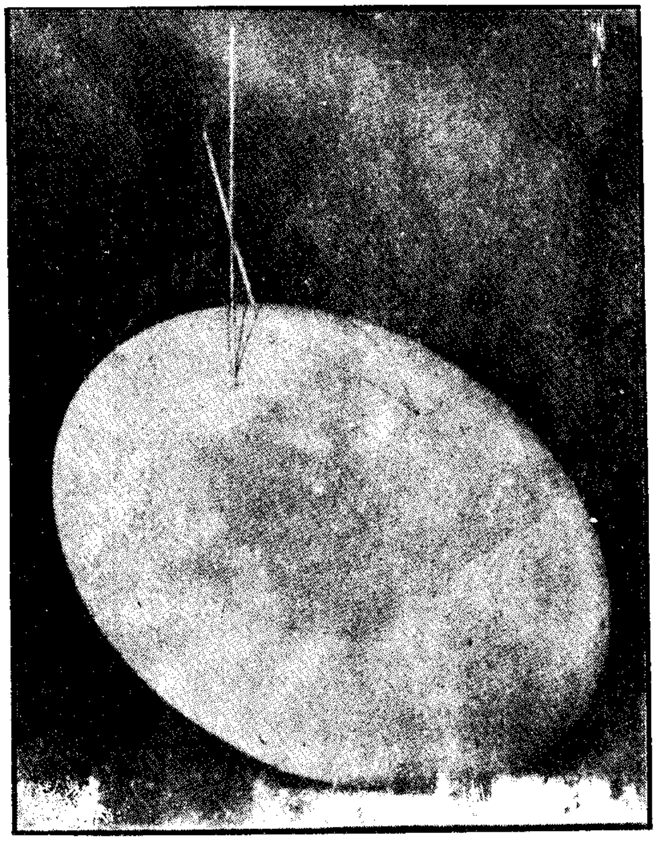
13. การหักเหของแสง

เนื่องจากการหักเหของแสงกระทำต่อวัตถุที่สองในพื้นดิ่ง และทำให้เห็นวัตถุนั้นเปลี่ยนทิศทางไปในพื้นดิ่งนั้น ปรากฏชัดอีกว่าวัตถุที่หมายส่องไปนั้นมีการเปลี่ยนทิศทางในทางระดับ หรือทางราบอีกด้วย จากผลการตรวจสอบพิจารณาแล้วแสดงให้เห็นว่าความเคลื่อนคลาดในการเปลี่ยนทิศทางระดับนั้นมีน้อยมากสำหรับแนวเล็งทั้งหมดที่อาจเล็งรังวัดได้จริง ๆ นอกเสียจากแนวเล็งนั้นจะผ่านเข้าไปทางด้านข้างของภูเขา

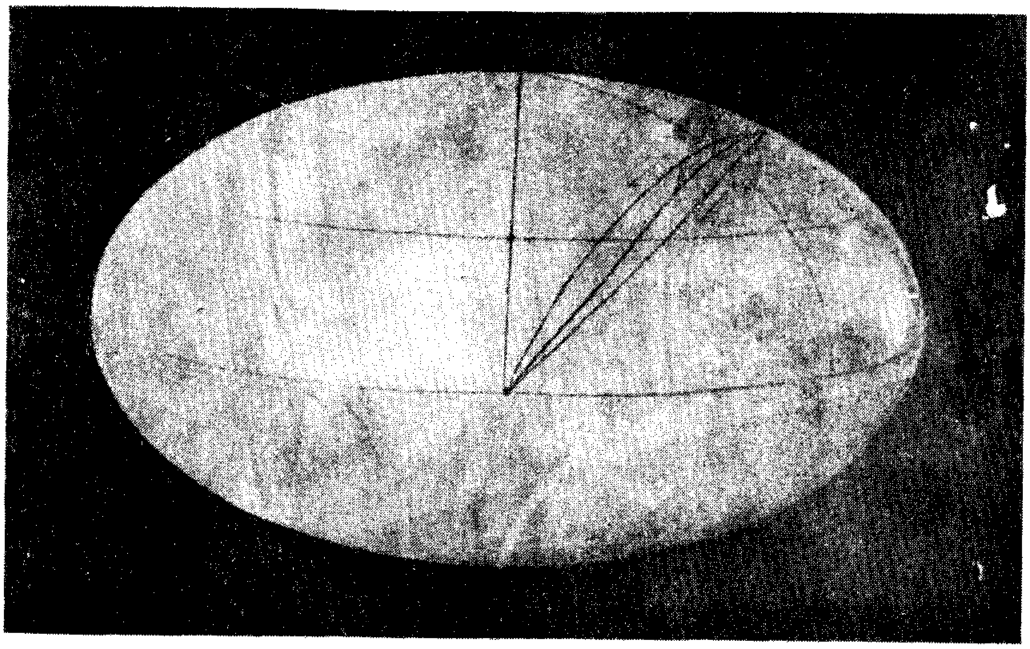
14. โค้งบนพื้นผิวสเฟียรอยด์ (โค้งพื้นราบ)

เมื่อตั้งกล้องที่จุดใด ๆ เช่น จุด A และทำการตั้งระดับ แกนดิ่งของกล้องตั้งให้ทับกับทิศทางของแรงดึงดูดพิภพที่จุด A หากไม่มีแรงรบกวนทำให้เกิดความเฉของเส้นดิ่งจากมวลสารบริเวณใกล้ ๆ นั้นแล้ว ทิศทางของแกนดิ่งจะทับกับทิศทางของเส้นนอร์มาลที่จุด Aหาก ตั้งกล้องขึ้นอีกเครื่องหนึ่งที่ B ซึ่งต่างละติจูด และลองจิจูดกับ A จะปรากฏชัดว่าแกนดิ่งของกล้องทั้ง 2 แห่งมิได้อยู่ในพื้นเดียวกัน เนื่องจากเส้นนอร์มาล (เส้นดิ่ง) ของ 2 พื้นนั้นมิได้ตัดกัน ยิ่งละติจูดสูงมากขึ้นจุดตัดระหว่างแกนหมุนกับเส้นนอร์มาลก็จะยิ่งลดต่ำลง ปรากฏชัดว่าแนว (หรือที่ถูกควรเป็นพื้นราบ) เล็งของกล้องที่ตั้งอยู่ตำบล A จะมิใช่เป็นแนวเดียวกับแนวที่เกิดจากรอยตัดของพื้นดิ่งของกล้องที่ตั้งอยู่ตำบล B

หาก A อยู่ตะวันตกเฉียงใต้ของ B แล้ว โค้งที่ตัดด้วยพื้นของกล้อง ณ ตำบล A ก็จะอยู่ลงไปทางใต้ของโค้งที่ตัดด้วยพื้นแนวเล็งของกล้อง ณ ตำบล B ความจริงนี้อาจแลเห็นได้ว่าพื้น 2 พื้นบรรจุชยา AB และเนื่องจากเส้นนอร์มาลที่ A อยู่สูงกว่าที่แกนขั้ว (แกนหมุน) โค้งนั้นเองจะต้องอยู่ต่ำลงมา (ไกลออกไปทางใต้)



รูป 8.13



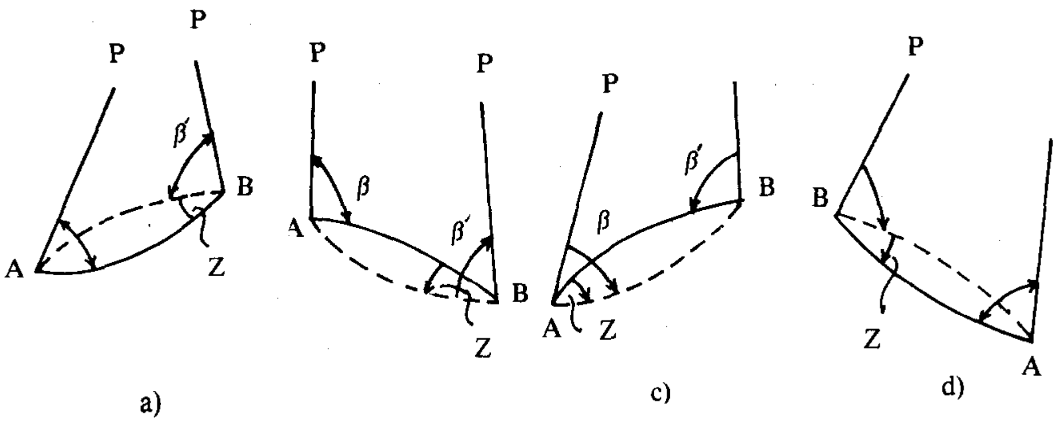
รูป 8.14

15. *เส้นยีออเดซี หรือเส้นบนพื้นผิวพิภพสมมุติ* **(Geodetic lines)**

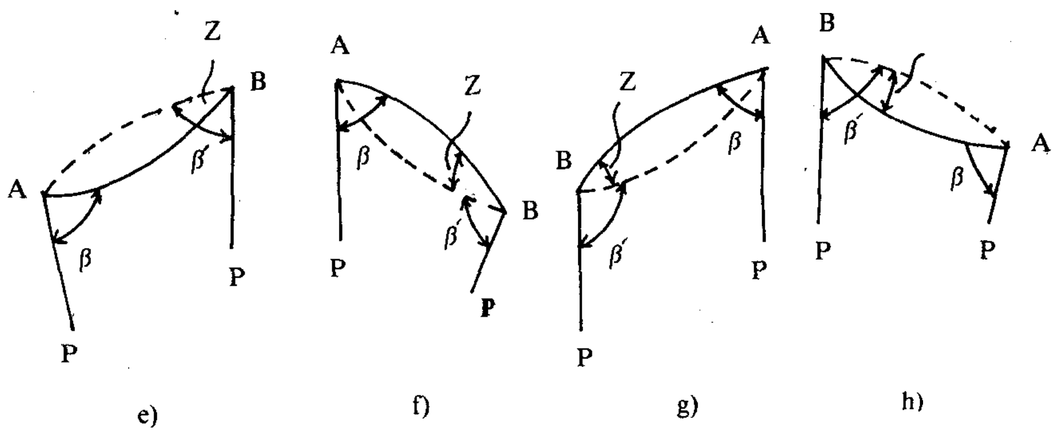
โค้งอีกอันหนึ่งซึ่งนับว่าสำคัญยิ่งในทฤษฎีของวิชายีออเดซี่ คือ “เส้นยีออเดติค” เป็นเส้นที่สั้นที่สุดที่สามารถจะลาดขึ้นบนพื้นผิวสเฟียรอยด์ระหว่างจุดที่กำหนดให้ 2 จุด มิใช่เป็นโค้งที่อยู่บนพื้นราบเดียวกัน (Plane Curve) แต่เป็นความโค้งแฝด (Double Gurvature) หรือโค้งบิดคู่ คุณสมบัติที่เด่นของโค้ง คือว่า “พื้นผ่านตลอดจุด 3 จุดบนโค้ง (Osculating Plane) ที่จุดใด ๆ บนโค้งบรรจุเส้นตั้งฉากพื้นผิวที่จุดนั้น” โดยมากเส้นยีออเดติคมักจะเกิดอยู่ในระหว่างพื้นโค้งที่มิได้อยู่บนพื้นเดียวกัน และเป็นโค้งกลับกันดังในรูป

รูปข้างบนเป็นหุ่นจำลองรูปทรงรี และเส้นยีออเดติค ซึ่งมีแกนยาว a = 6 นิ้ว และกึ่งแกนสั้น b = 3.5 นิ้ว พื้นโค้ง 2 พื้นได้ปรากฏอยู่บนหุ่นระหว่างพื้นทั้งสอง คือ เส้นยีออเดติคโดยมีความโค้งมากไปนิดหน่อย

เพื่อเข้าใจถึงธรรมชาติของเส้นยีออเดติคอย่างแจ่มแจ้ง ลองสร้างภาพจินตนาการสมมติตั้งกล้องที่จุด A ปรับตั้งฟองระดับให้ดี หันกล้องไปส่องที่จุด B แล้วยกกล้องไปตั้งที่ B ปรับ และตั้งระดับให้อีกเช่นกัน หันกล้องไปส่องที่จุด A ณ จุด C กำหนดได้โดยกลับกล้อง 180° หันไปส่อง เมื่อกระทำการส่องจุด A นั้น แนวเล็งจะปรากฏเป็นแนวอยู่ในพื้นโค้งตามแนว BbA และแนวเล็งไปยัง C จะปรากฏเป็นแนวในพื้นโค้งเช่นกันตาม BbC ยกกล้องไปตั้งที่ C แล้วดำเนินการดังกล่าวอีก ข้อควรสังเกตพื้นเล็งทางดิ่งของเครื่องมือจะทับกับเส้นตั้งได้ฉากกับพื้นผิว ณ ที่ทุกสถานีตั้งกล้อง หากจุด A, B, C, D สมมติขยับเข้าหากันใกล้เข้าไปทุกทีเพื่อว่า AB, BC ฯลฯ มีขนาดเป็นอวัยวะขนาดจิ๋วที่สุดของโค้งพื้นราบที่บรรจุจุด 3 จุดตามลำดับจากโค้งนั้นก็จะบรรจุเส้นตั้งฉากกับพื้นผิวด้วย



รูป 8.15 ซีกโลกเหนืออีเควเตอร์



รูป 8.16 ซีกโลกใต้อีเควเตอร์

พิจารณาดูในรูปทั้งที่อยู่เหนือ และอยู่ใต้อีเควเตอร์ สังเกตมุม z ที่เกิดขึ้นต่อเนื่องจากพิภพเป็นรูปทรงรี และ z จะสูญหายไปถ้าพิภพเป็นรูปทรงกลม ความจริงนั้นมุมที่จุด B ระหว่างแนวเล็งจาก A ไป B และมุมที่จุด A คือ มุมระหว่างแนวเล็งจาก B ไป A จะไม่ทับกันถ้าเป็นพื้นผิวสเฟียรอยด์

แนวเล็งจาก A ไป B เป็นโค้งซึ่งขีดเป็นแนวออกไปบนพื้นผิวสเฟียรอยด์ด้วยพื้นราบซึ่งผ่านตลอดจุด B และบรรจุเส้นตั้งฉากกับพื้นผิวสเฟียรอยด์ ณ จุด A พื้นนี้จะไม่บรรจุเส้นตั้งฉากกับพื้นผิวสเฟียรอยด์ ณ จุด B ในทำนองเดียวกันแนวเล็งจาก B ไปยัง A ก็เป็นโค้งที่ขีดเป็นแนวออกไปบนพื้นผิวสเฟียรอยด์ด้วยพื้นราบที่ผ่านตลอดจุด A และบรรจุเส้นตั้งได้ฉากกับพื้นผิวสเฟียรอยด์ที่จุด B พื้นนี้ไม่บรรจุเส้นตั้งได้ฉากพื้นผิวสเฟียรอยด์ที่จุด A ในรูปแนวเล็งจาก A ไป B แสดงด้วยเส้นทึบ และแนวเล็งจาก B ไป A แสดงด้วยเส้นประและมุมที่จุด B ระหว่าง 2 โค้งนั้นเป็นมุมขนาดเล็ก แสดงไว้ด้วย z ความสัมพันธ์ระหว่าง 2 โค้งกับมุม β' และ z แต่ละจุดรางคดลในซีกโลกเหนือ และใต้อีเควเตอร์ จะเข้าใจได้ดังแสดงรูปไว้ข้างต้นจาก (a) ถึง (h) P ในรูปแสดงตำแหน่งของขั้วพิภพ และมุม $\beta' \pm z$ ที่ B ที่ใช้เพื่อแก้หารูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นมุมระหว่าง BP และเส้นทึบ BA

จากที่กล่าวมาหากนึกภาพจินตนาการเลื่อนกล้องไปตามแนวเส้นยีออเดติคปรากฏว่าพื้นดิ่งของเครื่องมือจะบิดไปเรื่อย ๆ เพื่อว่าพื้นดิ่งจะได้บรรจุเส้นตั้งฉากกับพื้นผิวสเฟียรอยด์ตามแนวนั้นอยู่เสมอ

คุณสมบัติพิเศษของเส้นยีออเดติคแสดงได้จากสมการดังนี้

$R_P \sin\alpha = k$ (ตัวคงที่ตัวหนึ่ง)

Rp คือ รัศมีของเส้นขนาน และ α คือ แอซิมัธของเส้นยีออเดติคที่จุดใด ๆ จากสมการจะเห็นว่า เมื่อ α มีค่าสูงสุด (90°), $\sin\alpha = 1$ และ $R_p = k$ ฉะนั้นตัวคงที่ของสมการก็คือรัศมีของเส้นขนาน ซึ่งนอกไปจากเส้นขนานนี้เส้นยีออเดติคไม่ผ่าน เมื่อ α มีค่าสูงสุด Rp ก็มีค่าสูงสุด นั่นคือ $R_p = a$ คือ รัศมีของสเฟียรอยด์ในแนวอีเควเตอร์ นี่แสดงว่าโดยทั่วไปเส้นยีออเดติคซึ่งตัดอีเควเตอร์ที่มุม α ใด ๆ อาจพุ่งขึ้นไปทางเหนือไปจนถึงเส้นขนานบางเส้นอันเป็นเขตจำกัดที่มีละติจูด φ (ซึ่งตรงกับ $R_p = k$) แต่จะไม่ผ่านขึ้นไปเหนือเส้นขนานนี้ ในซีกโลกใต้อาจพุ่งขึ้นไปถึงเขตจำกัดอันหนึ่ง $(-\varphi°)$ ซึ่งมีค่าล้วน หรือค่าทางจำนวนอย่างเดียวกัน

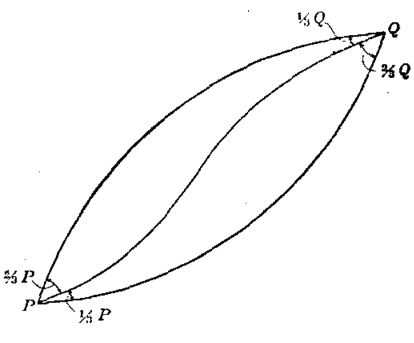
เส้นยีออเดติคชนิดนั้นโดยทั่วไปจะไม่กลับมาพบตัวมันเองอย่างแท้จริงเมื่อขีดขึ้นเวียนรอบสเฟียรอยด์อย่างสมบูรณ์ แต่จะผ่านจุดเริ่มในแนวอีเควเตอร์มีค่าลองจิจูดต่างกันเพียงเล็กน้อย แล้วก็จะเวียนต่อไปเพื่อประกอบตัวเป็นวงจรรอบสเฟียรอยด์

ยกเว้นสำหรับกรณีเฉพาะ 2-3 กรณี เส้นยีออเดติคจะอยู่ระหว่าง 2 พื้นราบโค้ง และแบ่งมุมระหว่างพื้นราบโค้งนั้นเป็นปฏิภาคกันประมาณ 2 ถึง 1 ดังในรูป

หากจุดปลายเส้นยีออเดติค P และ Q มีละติจูดใกล้เคียงกัน เส้นยีออเดติคอาจผ่านพื้นราบโค้ง

ควรระลึกอยู่เสมอว่าระยะของโค้งที่ต่างกันนี้บนสเฟียรอยด์ ต่างกันในเชิงจำนวนซึ่งในทางปฏิบัติแล้วไม่มีนัยสำคัญมากนัก ความต่างทางระยะย่อมน้อยกว่าระยะที่โค้งถูกแยกจากกันที่จุดกึ่งกลางเสียอีกและระยะที่ถูกแยกจากกันในทางปฏิบัติยังตัดทิ้งเสียได้ ทำนองเดียวกันมุมซึ่งแอซิมัธของเส้นยีออเดติคต่างจากแอซิมัธของรอยตัดพื้นราบยังมีขนาดเล็กกว่าที่จะวัดได้อีกด้วย

ควรสังเกตว่าเส้นยีออเดติคเองไม่อาจส่องได้โดยตรง เพราะมันมิใช่เป็นพื้นโค้งและสามเหลี่ยมยีออเดติคสามารถหาได้เพียงการคำนวณเท่านั้น



รูป 8.17

16. โค้งอยู่ระหว่าง 2 พื้นโค้ง (Alignment Curve)

โค้งอีกอันหนึ่งซึ่งอาจลากไปบนพื้นผิว อาจให้คำนิยามดังต่อไปนี้ คือ "ถ้าสมมติกล้องธีโอโดไลท์เคลื่อน หรือยกจากจุด A ไปยังจุด B โดยรักษาให้อยู่ในแนวระหว่างจุด 2 จุด (นั่นคือ แอซิมัธของ A และของ B ต่างเท่ากับ 180°) และเครื่องมือนั้นต้องได้ระดับอยู่เสมอทางที่กล้องเคลื่อนไปจะเป็นโค้งซึ่งเป็นแนวสถิตอยู่ใกล้กับแนวเส้นยืออเดติค และโดยปกติจะอยู่ระหว่าง 2 พื้นโค้ง เส้นนี้เรียกว่า **โค้งระหว่าง 2 พื้นโค้ง**"

อาจเป็นไปได้ที่จะให้คำนิยามโค้งอื่น ๆ ระหว่างจุด 2 จุดนี้ โค้งเหล่านี้เป็นเพียงค่าทางทฤษฎีเท่านั้น เนื่องจากระยะของเส้นทั้งหมดชนิดนี้บนพื้นผิวพิภพแตกต่างจากกันและกันในทางจำนวน ซึ่งมีขนาดเล็กมากต่อการวัด อย่างไรก็ดี 2 พื้นโค้งแยกออกจากกันด้วยระยะอันหนึ่ง ซึ่งบางทีก็มีขนาดที่แลเห็นได้

17. ระยะระหว่างโค้งแบน

การแยกจากกันของโค้งแบน 2 โค้งอาจคำนวณได้อย่างประมาณต่อไปนี้

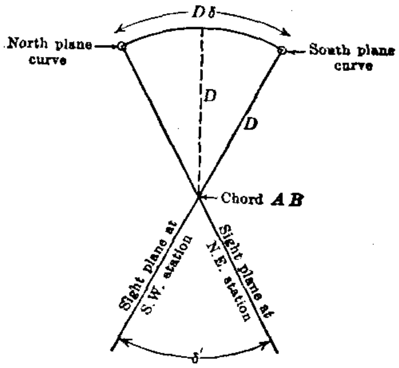
มุม δ' ระหว่าง 2 พื้นมีขนาดใกล้เคียงกับมุม δ คูณด้วย $\sin\alpha$ เนื่องจาก δ เป็นมุมที่วัดในพื้นเมริเดียน ส่วนมุมที่ต้องการ δ' คือ มุมตั้งได้ฉากกับพื้นของแนวเล็ง

ฉะนั้น $\delta' = \dfrac{se^2\cos^2\varphi\cos\alpha\sin\alpha}{N(1-e^2)}$ (ดูข้อ 3.12)

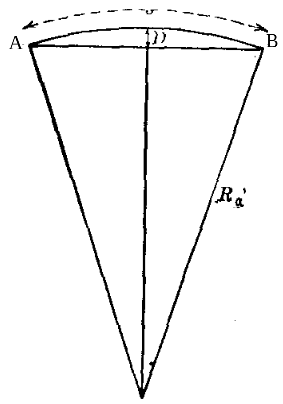
ระยะของชยา AB ซึ่งอยู่ล่างผิว D ตรงจุดกึ่งกลางหาได้ดังนี้

$$\frac{D}{\frac{s}{2}} = \frac{\frac{s}{2}}{2R}$$

$$D = \frac{s^2}{8N} \quad \text{(โดยประมาณ)}$$



รูป 8.18



รูป 8.19

โค้งต่าง ๆ แยกจากกันที่จุดกึ่งกลางโดยระยะทางราบ

$$Dd = \frac{s^2}{8N} \cdot \frac{se^2\cos^2\varphi\cos\alpha\sin\alpha}{N(1 - e^2)}$$

$$= \frac{s^2e^2\cos^2\varphi\cos\alpha\sin\alpha}{8N^2(1 - e^2)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

ความต่างในทางแอซิมัทอาจคำนวณหาได้โดยประมาณ คือ การหามุมระหว่างจุดสัมผัส 2 จุดที่ได้ ซึ่งลากจากสถานีหนึ่ง และแล้วต่อเป็นระยะอีกครึ่งหนึ่ง จุดปลายของเส้นสัมผัสจะมีระยะ D เหนือพื้น และจะถูกแยกออกโดยระยะ $2D\delta'$

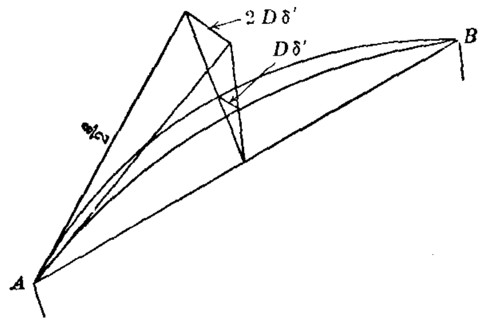
มุมระหว่างเส้น 2 เส้น คือ

$$= \frac{2Dd'}{\frac{1}{2}s \text{ arc } 1''} \qquad \text{(ใกล้เคียง)}$$

$$) = \frac{2s \quad e^2\cos^2\varphi\cos\alpha\sin\alpha}{8N^2(1-e^2)\frac{1}{2}s.\ \text{arc } 1''}$$

$$\frac{s^2 \quad e^2\cos^2\varphi\cos\alpha\sin\alpha}{2N^2\ (1-e^2)\text{arc } 1''} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(55)$$

สำหรับแนวขอบเขตทางเฉียงระหว่างแคลิฟอเนีย และเนวาดา $s = 650{,}000$ เมตร (400 ไมล์) $\varphi = 37°\ 00'$, $\alpha = 134°\ 33'$ จาก $D\delta'$ จะได้ = 1.8 เมตร และความต่าง - m ทางอะซีมุท = $2.''3$



รูป 8.20

สำหรับแนวเขตตะวันตกของรัฐแมสแซสซูเสทส์ $s = 80{,}930$ เมตร (50 ไมล์), $\varphi''' = 42°\ 24'$ $\alpha = 195°\ 12'$ จะให้ $D\delta' = 0.0015$ เมตร และ $\Delta\alpha = 0.''016$

ปัญหาโจทย์

1. จงหาระยะเป็นกิโลเมตรจากศูนย์กลางของสเฟียรอยด์ถึงจุดหนึ่งในกรมแผนที่ทหารพระนคร ณ จุดที่ละติจูด 13°

2. ถ้ารอยตัดของสเฟียรอยด์เกิดจากพื้นราบอันหนึ่งซึ่งขนานกับพื้นราบสัมผัสพื้นผิวที่ละติจูด 40° และอยู่ห่างจากพื้นนี้ลงไป 1 มิลลิเมตร จงหาความยาวของกึ่งแกนสเฟียรอยด์

3. อวัยวะลูกโลกสมมติ (Spheroid) ของคลาร์ค (Clarke) ปี 1866

$a = 6378\ 206.4$ เมตร

$b = 6356\ 583.8$ เมตร

จงคำนวณหาความยาวโค้งเมริเดียนในจตุรางคดลหนึ่ง ๆ

4. คำนวณหาความรี (Ellipticity) ของลูกโลกสมมติของคลาร์ค

5. ถ้ารูปทรงกลมมีรัศมีเป็น $\sqrt{R_m N}$ สัมผัสสเฟียรอยด์ในละติจูด 45° ผิวของทรงกลมจะอยู่ห่างจากผิวสเฟียรอยด์เท่าไร ณ ระยะห่าง 160 กม. จากจุดสัมผัส

a) ในพื้นเมริเดียน

b) ในพื้นออก-ตก (Prime Vertical Plane)

5. จงหาพื้นที่เป็น ตร.เมตร ระหว่างละติจูด 40° กับ 41° ซึ่งกั้นด้วยเส้นเมริเดียน 2 เส้นห่างกัน 1°

7. เกี่ยวกับผลอันเกิดจากความสูงของสถานีในแนวแอซิมัธ อะไรคือความคลาดเคลื่อนในทิศทางแนวเล็งที่เล็งไปยังยอดเขาไพค์ซึ่งสูง 14,108 ฟุต