บทที่ 4
ยีออเดซีทางทฤษฎี

1. คำนำ

วิชายีออเดซี (Geodesy) คือ ศาสตร์ที่กล่าวถึงการศึกษาค้นคว้ารูปทรงสัณฐานและขนาดของพื้นผิวโลก วิธีที่นำไปใช้ในการกำหนดหารูปทรงสัณฐานของโลกนั้นที่สำคัญก็มี

1) ทำการรังวัดระยะส่วนโค้ง อาจเป็นระยะส่วนโค้งในแนวเมริเดียน, ในแนวเส้นขนาน หรือระยะในแนวเฉียงอื่น ๆ บนพื้นผิว ผสมผสานกับการหาตำแหน่งของจุดทางดาราศาสตร์บนส่วนโค้งเหล่านั้น

2) การรังวัดระยะในโครงข่ายสามเหลี่ยมที่ขยายครอบคลุมพื้นที่หนึ่ง ผสมผสานกับการกำหนดหาตำแหน่งทางดาราศาสตร์ และ

3) การรังวัดความแปรเปลี่ยนพลังโน้มถ่วงตามส่วนต่าง ๆ ของพื้นผิว

เรามีส่วนเกี่ยวข้องกับยีออเดซีทั้งใน **ทางทฤษฎี** และ**ทางปฏิบัติ** ในทางทฤษฎีคือการกำหนดหาขนาด และรูปร่างของโลก และทั้งยังเกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์ของโลกด้านอื่น ๆ อีก เพื่อศึกษาค้นคว้าถึงโครงสร้างของเปลือกโลก และศึกษาชั้นหินอยู่ภายใต้พื้นผิวลึกลดหลั่นลงไปตามลำดับ หน้าที่ในทางปฏิบัติก็คือ การรังวัด และการคำนวณเพื่อหาพิกัดของจุดควบคุม หรือหมุดหลักฐานที่เลือกไว้บนพื้นผิว ทั้งนี้ เพื่อกำหนดที่อยู่ของจุดต่าง ๆ บนพื้นผิวโลกนั่นเอง

ระบบหมุดหลักฐานที่ดี และเชื่อถือไว้ใจได้เป็นสิ่งพึงปรารถนาในขั้นแรก เพื่อใช้ทำแผนที่ที่ดี ถ้าจะเปรียบเทียบหมุดหลักฐานดังกล่าวก็คล้ายกับโครงกระดูกอันห่อหุ้มด้วยเนื้อ และเส้นโลหิต ซึ่งเนื้อ และเส้นโลหิตในที่นี้เปรียบเหมือน "รายละเอียด" (Details) ของแผนที่ ซึ่งเราจะต้องไปทำการรังวัดเก็บรวบรวมมาจากภูมิประเทศ การทำแผนที่ที่ดีจะขาดหมุดหลักฐานที่ดีหาได้ไม่ แม้จะได้ทำการรังวัดรวบรวมรายละเอียดมาอย่างรอบคอบและเขียนแผนที่อย่างประณีตถูกต้องแล้วก็ตาม แต่การจัดเตรียมระบบหมุดหลักฐานที่ดีโดยอาศัยการรังวัดอย่างประณีตมีความละเอียดถูกต้องมาก การใช้สูตรคำนวณยืดยาวและการต้องสิ้นเปลืองเวลา การคำนวณในขั้นประมวลผลนั้นนับว่ามีความยุ่งยากมากที่สุดและนับเป็นส่วนสำคัญที่สุดของวิชายีออเดซี

หมุดหลักฐาน หมายถึงผลปานกลางของจุดทั้งหลายบนโลกอันมีค่าละติจูดและลองจิจูด (มักจะคำนึงถึงกำหนดสูงที่คิดจากพื้นระดับน้ำทะเลปานกลางด้วย) ที่กำหนดให้อย่างถูกต้องแม่นตรงมาก อย่างไรก็ดี ในการทำแผนที่จะง่ายยิ่งขึ้นถ้าใช้พิกัดราบ X และ Y แทนการใช้ค่าละติจูดกับลองจิจูด แน่ละที่ค่าเหล่านี้เราสามารถคำนวณหาได้ตามเส้นโครงแผนที่แต่ละชนิดจากพิกัดภูมิศาสตร์

การจะใช้พื้นราบ, พื้นทรงกลม, พื้นทรงรีหมุน, พื้นทรงรีสามมิติ หรือใช้พื้นยีออยด์ (Geoid) แทนพื้นผิวพิภพจริงย่อมขึ้นอยู่กับความละเอียดที่ต้องการ และความมุ่งหมายความละเอียด และความมุ่งหมายย่อมเป็นไปตามผลการคำนวณทางยีออเดติคที่ตั้งความมุ่งหมายไว้เดิม พื้นราบไม่ต้องการตัวแปรเปลี่ยนใด ๆ ส่วนทรงกลมต้องการค่ารัศมี R ทรงรีหมุนต้องการ 2 ตัวเปลี่ยน คือ รัศมีพิภพในแนวอีเควเตอร์ a และอัตราการยุบตัวของขั้วตามแนวเมริเดียน α ทรงรีสามมิติ หรือทรงรีสามแกนต้องการถึงสื่อวัยวะ คือ a และ α อัตรายุบตามแนวอีเควเตอร์ α และลองจิจูด λ ของแกนในพื้นอีเควเตอร์ ส่วนยีออยด์มิใช่เป็นพื้นผิวเชิงคำนวณ แต่ขึ้นอยู่กับการแจกแจงอย่างไม่เป็นระเบียบของมวลสารทั้งที่เห็นได้ และที่ไม่สามารถเห็นได้ใกล้พื้นผิวโลก ต้องกำหนดหาเป็นตำบล ๆ ไป

2. ความหมายของระบบทางยีออเดติค

ในการทำแผนที่อาณาบริเวณแคบยอมให้ใช้พื้นราบเป็นพื้นผิวโลกจริงได้ และนับว่ามีความละเอียดอย่างเพียงพอ ส่วนการคำนวณค่าหมุดหลักฐานของพื้นที่มีอาณาบริเวณกว้างขวาง ความโค้งของพื้นธรณีกลับมีขนาดโตจนปรากฏชัด ในกรณีนี้ต้องใช้พื้นผิวทรงกลม หรือทรงรีหมุนแทนพื้นผิวโลกในส่วนที่ต้องการทำแผนที่ ในวิชายีออเดซีไม่ค่อยนิยมใช้ทรงรีสามมิติยิ่งขึ้น แต่ความจำเป็นในการใช้ทรงรีสามมิติกลับมีความสำคัญในงานทางฟิสิกส์โลกอย่างกว้างขวาง หากว่าโลกมีลักษณะเป็นรูปทรงรีสามมิติจริงแล้ว พื้นยีออยด์จะกลายเป็นพื้นอันมีบทบาทสำคัญในยีออเดซีสมัยใหม่

ระบบหมุดหลักฐานอาจแบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม คือ

1) ระบบหมุดหลักฐานเฉพาะถิ่น
2) ระบบหมุดหลักฐานแผ่ทั่วทั้งประเทศ
3) ระบบยีออเดติคโลก

และยังมีการแบ่งระบบเป็นอย่างอื่นอีกด้วย เช่น ระบบ**คุมทางแนวนอน** กับ**แนวยืน**

หากเรามีโครงการทำแผนที่เฉพาะถิ่น กล่าวคือ การทำแผนที่ผังเมืองปกติ เราไม่คำนึงถึงความโค้งของพื้นธรณี และสมมติเอาว่าการรังวัดระยะกระทำกันบนพื้นระนาบ

หรือพื้นราบ แต่ถ้าคำนึงถึงความโค้งของพื้นผิวโลกแล้วให้ใช้พื้นผิวทรงรีแทนพื้นผิวโลกจริงได้อย่างดีพอเพียงทีเดียว สำหรับการทำแผนที่เฉพาะถิ่นเราวางโครงข่ายสามเหลี่ยมคลุมบริเวณขึ้น และหรือทำวงรอบรูปหลายเหลี่ยมซึ่งคลุมพื้นที่หรือส่วนสำคัญที่จะทำแผนที่ ทั้งงานชนิดที่ทำด้วยวิธีการสามเหลี่ยม หรือวงรอบวัดไปตามถนน และทางหลวง และก็แน่ทีเดียวที่เราจะต้องทำการปรับแก้สามเหลี่ยมและวงรอบ เพื่อให้ได้ระบบเฉพาะท้องถิ่นที่ไม่ขัดแย้งกัน

เราสามารถคำนวณพิกัดของจุดจากระบบเฉพาะถิ่นนี้ได้โดยมิต้องอาศัยหมุดหลักฐานของรัฐ หรือจากการรังวัดทางดาราศาสตร์ เพียงแต่กำหนดจุดใดขึ้นเป็นจุดพิกัดกำเนิดตามใจชอบ และในทำนองเดียวกันเราก็สามารถจะเลือกทิศทางใดที่ไม่ไกลไปจากทิศเหนือกำหนดให้เป็นทิศทางเริ่มแรก และจากทิศทางหลักนี้เราจะใช้เป็นมูลฐานคำนวณแอซิมัธกริด และพิกัด

อย่างไรก็ดี วิธีนี้เป็นวิธีที่เขาไม่ยอมรับกัน ทางที่ดีควรจะทำโยงยึดการสำรวจเฉพาะถิ่นเข้ากับระบบงานสามเหลี่ยมของประเทศ หรือบรรจบกับจุดเริ่มออกที่มีการรังวัดละติจูด, ลองจิจูด และแอซิมัธทางดาราศาสตร์ ซึ่งวิธีนี้ปกตินิยมใช้ทำกัน ในกรณีแรกเรามีพิกัด และแอซิมัธทางยีออเดติค (ซึ่งอ้างอิงถึงทรงรี) ส่วนกรณีที่ 2 พิกัด และแอซิมัธทางดาราศาสตร์ของจุดเริ่มออกอ้างอิงถึงพื้น**ยีออยด์**

เมื่อเราต้องทำการสำรวจกำหนดหมุดหลักฐานให้ทั่วทั้งประเทศ หรือกระทำในบริเวณกว้างขวางมาก ความต้องการดังกล่าวนั้นยังไม่เพียงพอ นอกจากการสามเหลี่ยมและวงรอบที่มีชั้นต่างกันแล้ว เรายังมีความจำเป็นต้องมีพื้นผิวที่ใช้อ้างอิงซึ่งพื้นผิวนั้นมีลักษณะใกล้เคียงกับผิวโลกจริงมากที่สุดที่จะมากได้ และเป็นพื้นผิวที่สามารถนำมาใช้ในการคำนวณพิกัดของหมุดหลักฐานได้

เพื่อให้คำนิยามถึงระบบหมุดหลักฐานเชิงยีออเดติคแห่งชาติอย่างสมบูรณ์ เราต้องการจำนวนทั้งหมดอยู่ 5 รายการ คือ

1) ละติจูด ϕ_0 ของจุดเริ่มของยีออเดติคเดตัม
2) ลองจิจูด λ_0 ของจุดเริ่มของยีออเดติคเดตัม
3) แอซิมัธ A จากจุดนี้ไปยังหมุดหลักฐานนั้น
4) รัศมี ณ พื้นอีเควเตอร์ a และ
5) อัตรายุบของขั้วทรงรีที่ใช้อ้างอิง

อนึ่ง เราต้องการจุดเริ่มที่ทราบพิกัด และทิศทางไปยังอีกจุดหนึ่งเพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการคำนวณ พร้อมกับพื้นผิวทรงรีซึ่งเราจะได้ใช้อวัยวะมาคำนวณ ถ้าจำนวนหลักเหล่านี้เปลี่ยนไประบบยีออเดติคทั้งหมดที่พิจารณาจะแปรเปลี่ยนไปด้วย

เรากำหนดระบบยีออเดติคแห่งชาติขึ้นโดยเลือกจุดใดจุดหนึ่งของสามเหลี่ยมเป็นจุดเริ่ม ใช้ต่างศูนย์กำเนิดทางยีออเดติค ณ จุดเริ่มนี้เรารังวัดละติจูด φ_0 ลองจิจูด φ'_0 และแอซิมัธ V'_0 ทางดาราศาสตร์ขึ้นด้วยความละเอียดเท่าที่จะวัดได้ โดยอาศัยจุดเริ่มนั้น เราจึงคำนวณหาค่าพิกัดของจุดยอดมุมสามเหลี่ยมทอนลงสู่พื้นผิวทรงรีอ้างอิงที่นำมาใช้เป็นพื้นฐานการคำนวณ หากมีเหตุผลพอให้เชื่อได้ว่าที่จุดเริ่มแรกมีความเฉของเส้นดิ่งปรากฏอยู่มาก เราลบผลความเฉนั้นออกจาก φ'_0 , λ'_0 และ A'_0 อย่างไรก็ดีวิธีนี้จนกระทั่งบัดนี้ก็ไม่ค่อยมีกระทำกัน

หากประเทศที่จะทำแผนที่ไม่ใหญ่โตมากเราสามารถใช้ทรงรีที่พอเหมาะพอควรหรือสมเหตุสมผลต่อประเทศนั้นเป็นพื้นผิวแทนโลกจริงได้ ทั้งนี้ เนื่องจากผลการใช้ทรงรีที่ใช้อ้างอิงเช่นนี้แทนโลกจริงจะมีความเคลื่อนคลาดไม่มากนักจนกระทั่งไม่ทำให้เป็นผลร้ายต่อการทำแผนที่ ข้อมูลที่ไว้ใจได้ในงานดาราศาสตร์ สามเหลี่ยม และวงรอบขึ้นอยู่กับความละเอียดจากการรังวัด มีความจริงอยู่ว่าเราสามารถจะปรับปรุงการสามเหลี่ยมและวงรอบตามวิธีการคำนวณปรับค่าได้ อย่างไรก็ตาม การปรับค่าใด ๆ ไม่อาจให้ค่าหมุดหลักฐานที่ดีได้เสมอ ถ้าผลการรังวัดมาหยาบความสำคัญของการคำนวณปรับค่าอยู่ที่การกำจัดความแตกต่างภายในระบบยีออเดติคนั้นเป็นสำคัญ โดยวิธีเดียวนี้เท่านั้นที่เราจะได้รับค่าพิกัดของจุดต่าง ๆ มาในแบบเดียวกันเพื่อใช้เป็นหมุดหลักฐาน โดยไม่คำนึงถึงว่าค่าพิกัดนั้นคำนวณมาจากแนวไหนจากหมุดหลักฐาน อย่างไรก็ตาม การรังวัดที่มีความละเอียดถูกต้องเท่านั้นเป็นสิ่งพึงปรารถนาขั้นแรกของระบบหมุดหลักฐานที่ดี

การปรับค่าสามเหลี่ยมต้องกระทำด้วยความรอบคอบ หากจะต้องมีการปรับค่าสามเหลี่ยมอันคลุมบริเวณกว้าง เราต้องเชื่อใจว่าคุณภาพของการสามเหลี่ยมไม่ต่างกัน ณ ส่วนต่าง ๆ ของพื้นที่นั้นจนมีนัยสำคัญ กับต้องเชื่อใจอีกเช่นกันว่าการรังวัดทางดาราศาสตร์เป็นผลที่ไว้ใจได้ และเส้นฐานทั้งหมดที่ใช้ต้องมีความละเอียดอยู่ในชั้น หรือระดับเดียวกัน หากเราละเลยขาดความระมัดระวังเรื่องดังกล่าวเหล่านี้ หรือถ้าเราปรับค่าเฉพาะในเรื่องที่แตกต่างออกไปนั้นให้เป็นระบบอันหนึ่งโดยใช้น้ำหนักอย่างเดียวกันทุกแห่ง โดยมิคำนึงถึงความแตกต่างในผลการรังวัดแล้วก็เท่ากับเราทำให้ค่าของสามเหลี่ยมนั้นเสียหายเป็นอันตรายมากกว่าเป็นผลดี

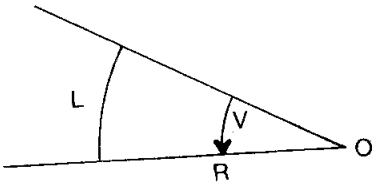
3. ประวัติความวิวัฒนาการของวิชายีออเดซี

เพื่อกำหนดหาขนาดของลูกทรงรีแทนโลกจริงมีปัญหาอยู่ 2 ประการที่ต้องพิจารณา

1) ปัญหาทางยีออเดติค
2) ปัญหาทางดาราศาสตร์

ปัญหาทางยีออเดติคประกอบขึ้นด้วยการรังวัดระยะส่วนโค้ง L บนผิวโลกในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง ในอดีตโน้นส่วนโค้งที่วัดโดยทั่วไปกระทำในแนวทิศทางตามเส้นเมริเดียน หรือไม่ก็ใช้แนวที่ใกล้กับแนวเมริเดียน บัดนี้ ทิศทางการรังวัดจะกระทำไปในแนวใดก็ได้ เพราะพิกัดภูมิศาสตร์ทางลองจิจูดขณะนี้อาจกำหนดหาได้อย่างละเอียดเกือบเท่ากับละติจูด ปัญหาเรื่องทางดาราศาสตร์เกิดจากการรังวัดมุม ณ จุดศูนย์กลาง V ที่ตรงกันข้ามกับส่วนโค้งนั้น โดยอาศัยค่า L และ V ค่าความยาวรัศมีพิภพ R สามารถกำหนดหาได้จากสูตร

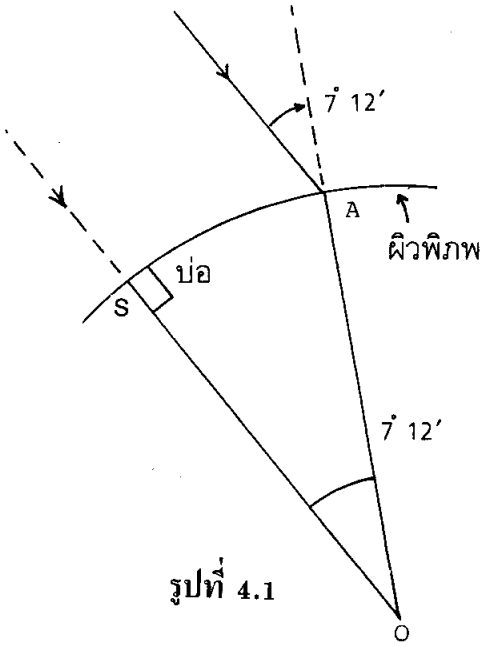
$$R = \frac{L}{V}$$



ซึ่ง V มีค่าเป็นเรเดียนส์ (Radians)

สมัย Homer (ประมาณก่อน ค.ศ. 900–800) โลกได้รับคำอธิบายว่าเป็นพื้นแบบซึ่งล้อมรอบด้วยมหาสมุทร ตามนักปราชญ์กรีกอื่น ๆ ในระยะนั้นถือว่าโลกนี้มีช้าง 4 ตัว ยืนอยู่บนหลังเต่าตัวมหึมา แต่อะไรที่คานรับเต่าให้คงอยู่ได้มิได้กล่าวไว้ Pythagoras (เกิดประมาณก่อน ค.ศ. 582) เชื่อว่าโลกเป็นทรงกลม และ Aristotle ผู้มีชื่อเสียงสมัยโบราณ (ประมาณก่อน ค.ศ. 384–322) ลงข้อยุติเช่นเดียวกันกับ Pythagoras อย่างไรก็ดี คำว่า **"บิดาของวิชายีออเดซี"** น่าจะยกให้กับนักปราชญ์ที่ชื่อ Eratosthenes (ประมาณก่อน ค.ศ. 276–194) เป็นบุคคลแรกได้กำหนดหาขนาดของโลก ที่จริงเขาสมมติว่าโลกเป็นทรงกลม วิธีการของเขาง่ายมาก และหลักการของเขาก็ยังนำมาใช้กันอยู่จนถึงปัจจุบัน

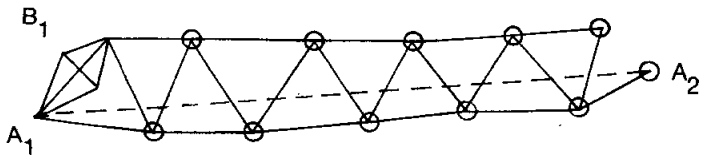
เขาวัดระยะตามแนวส่วนโค้งเมริเดียนระหว่างเมืองอเลกซานเดรีย (Alexandria) กับเมืองซีเอเน (Syene) ในประเทศอียิปต์ (Egypt) โดยอาศัยกองขบวนอูฐที่ใช้เดินทางจาก 2 เมืองนี้ มุมที่ศูนย์กลางตรงข้ามกับส่วนโค้งนั้นใช้วัดโดยอาศัยบ่อแห่งหนึ่ง เขาสังเกตเห็นว่าขณะที่พระอาทิตย์เยื้องขึ้นไปหยุดอยู่สูงสุดในฤดูร้อนใน 21 มิถุนายน ตอนเที่ยงแสงอาทิตย์จะส่องเป็นแนวดิ่งตรงลงมายังก้นบ่อที่ซีเอเน เขาวัดทิศทางของลำแสงอาทิตย์ในปีหนึ่ง ๆ ขณะเวลาเดียวกันตอนเที่ยงที่เมืองอเลกซานเดรีย และเขาทราบว่าวัดมุมได้ 360/50 หรือ 7° 12′ เป็นมุมคิดจากแนวดิ่ง ดังนั้น เขาลงข้อยุติว่ามุมที่ศูนย์กลางระหว่าง



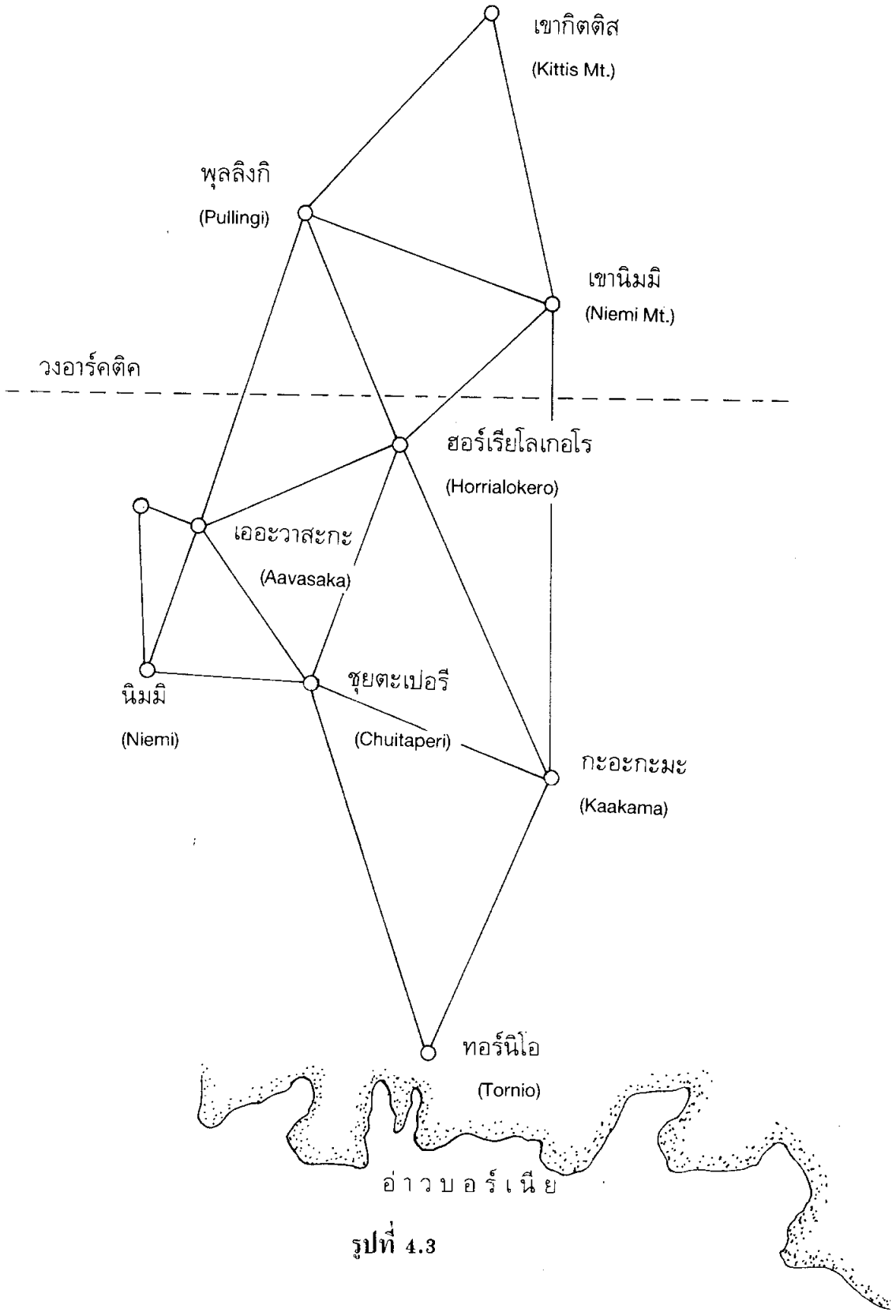
รูปที่ 4.1

ส่วนโค้งจากเมืองซีเอเนกับเมืองอเลกซานเดรียเป็น 7° 12′ ตามวิธีของ Eratosthenes ขบวนอูฐสามารถเดินทางจากอเลกซานเดรียถึงซีเอเนใน 50 วัน โดยสมมติว่าความเร็วคงที่ปานกลางของอูฐนั้นเป็น 100 สตาเดีย (Stadia) แน่ละวงกลมเมริเดียนทั้งหมดยาวกว่าโค้งนั้น 50 เท่า ดังนั้น เขาจึงได้ความยาวของวงกลมทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 250,000 สตาเดีย หรือ 46,250,000 เมตร โดยสมมติให้ความยาวของสตาเดียหนึ่งเป็น 185 เมตร ค่าของเขาโตเกินไปเพียง 16% ตามนิยามระยะเมริเดียนยาว 40,000,000 เมตร · และระยะแท้จริงก็ใกล้กับค่านี้อยู่มาก

ปรากฏชัดว่า Eratosthenes มีโชคดี มิฉะนั้น ผลของเขาจะเคลื่อนคลาดมากกว่าที่ควรเป็น ความจริงเมืองอเลกซานเดรียกับเมืองซีเอเนมิได้ตั้งอยู่ในแนวเมริเดียนเดียวกันตามที่เขาได้สมมติขึ้น นอกจากนั้น ดวงอาทิตย์เมื่อ 2,200 ปีมาแล้ว ก็มิได้ส่องแสงตกตรงลงไปในบ่อที่เมืองซีเอเนตอนเที่ยง ณ ขณะตำแหน่งที่ดวงอาทิตย์หยุดทางเหนือ และการใช้ความเร็วของอูฐเป็นมาตรวัดความยาวส่วนโค้งก็ไม่ถูกต้องจริงอีก แม้กระนั้นเราก็ต้องยอมยกย่องให้ Eratosthenes เป็นผู้ที่ควรได้รับเกียรติอย่างสูงสุด วิธีการของเขาถูกต้องทุกอย่างตามหลักการ บัดนี้เราเรียกวิธีนั้นว่า "วิธีการรังวัดระยะส่วนโค้ง" (Arc-Measuring Method) ปัจจุบันนักวัดขนาดโลก (Geodesists) ดำเนินกรรมวิธีการรังวัดดาราศาสตร์ด้วยเครื่องมือที่ดีอันเป็นส่วนหนึ่งของการคำนวณของเขาแทนการใช้ "บ่อ" และวัดระยะส่วนโค้งก็ไม่ต้องใช้อูฐแต่หันไปใช้ "การสามเหลี่ยม" การสามเหลี่ยมนับเป็นวิธีการสำคัญที่สุดวิธีหนึ่งของงานยีออเดซี ซึ่ง Snellius นักวิทยาศาสตร์ชาวดัทช์ได้นำไปใช้ในปี 1615



รูปที่ 4.2


เขากิตติส
(Kittis Mt.)
พุลลิงกิ
(Pullingi)
เขานิมมิ
(Niemi Mt.)
วงอาร์คติค
ฮอร์เรียโลเกอโร
(Horrialokero)
เออะวาสะกะ
(Aavasaka)
นิมมิ
(Niemi)
ชุยตะเป่อรี
(Chuitaperi)
กะอะกะมะ
(Kaakama)
ทอร์นิโอ
(Tornio)
อ่าวบอร์เนีย

รูปที่ 4.3

ระยะเวลาขาดห้วงตอนกันถึง 18 ศตวรรษ ระหว่างสมัย Eratosthenes กับการเริ่มวิชายีออเดซีสมัยใหม่ การพัฒนาวิชายีออเดซีเชิงวิทยาศาสตร์นี้ถ้าปราศจากกล้องรังวัดมุมเสียแล้วก็ยากที่จะเป็นไปได้ ยิ่งเครื่องมือของนักรังวัดขนาด และรูปทรงสัณฐานโลก (Geodesist) มีความละเอียดมากเท่าใดย่อมให้ผลในการรังวัดดียิ่งขึ้น ดังนั้น การพัฒนาเครื่องมือทางยีออเดติคย่อมเกี่ยวข้องโดยใกล้ชิดกับความก้าวหน้าทางวิชาการยีออเดซีเอง ในศตวรรษที่ 17 ส่วนช่วยเหลือให้ยีออเดซีมีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น คือ กล้อง, ตารางเลข พละคณิต และวิธีการสามเหลี่ยม และส่วนช่วยที่สมบูรณ์ในศตวรรษที่ 18 ก็คือ การประมาณการขนาดโลกที่มีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ใช้กันอยู่ในขณะนี้ และการค้นพบอัตราการยุบที่ขั้วของโลก นับเป็นขั้นสำคัญ และน่าสนใจยิ่งในวิชายีออเดซี

ใน ค.ศ. 1669 และ 1670 ชาวฝรั่งเศส ชื่อ Picard ทำการรังวัดส่วนโค้งขึ้นเฉพาะซึ่งนับเป็นการรังวัดที่ทันสมัย เขารังวัดระยะเส้นฐานจริงขึ้นเส้นหนึ่งโดยใช้ท่อนไม้ วัดมุมด้วยกล้อง และใช้พละคณิตคำนวณผลของเขา โครงข่ายสามเหลี่ยมที่เขาทำประกอบด้วยรูปสามเหลี่ยม 13 รูป ความสำคัญจากการรังวัดของ Picard ที่ได้รับยกย่องนั้นมีความจริงอยู่ว่าเมื่อ Newton ได้คิดสร้างกฎพลังโน้มถ่วงอันมีชื่อเสียงของเขาขึ้นนั้นก็ได้อาศัยค่าของ Picard แทนขนาดของโลก

ต่อมา Cassini ได้กระทำต่อจากส่วนโค้งของ Picard ขึ้นไปทางเหนือไปยังเมือง Dunkirk และรังวัดไปทางใต้ถึงเขตสเปน การรังวัดกระทำเสร็จเรียบร้อยมีความละเอียดจนกระทั่งสามารถกำหนดหาได้ทั้งขนาด และรูปทรงสัณฐานของเมริเดียนโลกอีกด้วย Cassini ได้แบ่งส่วนโค้งที่วัดออกเป็น 2 ส่วน ส่วนหนึ่งจาก Paris ขึ้นไปทางเหนือ และอีกส่วนหนึ่งลงไปทางใต้ เมื่อเขาคำนวณระยะเมริเดียนเป็นองศาจาก 2 ส่วนนั้น เขาได้รับผลที่ไม่คาดฝันว่า ระยะหนึ่งองศาของส่วนทางเหนือนั้นมีค่า 111,017 เมตร หรือสั้นกว่าส่วนโค้งที่วัดทางตอนใต้ไปเป็นระยะ 267 เมตร (111,284 เมตร) การที่เขาได้รับค่าเช่นนั้นก็น่าประเมินผลที่ได้นั้นว่า

1) โลกมีรูปเป็นทรงรีคล้ายไข่ หรือ

2) มีความเคลื่อนคลาดในการรังวัด

ผลของ Cassini นั่นเองก่อให้เกิดการขัดแย้งกันอย่างรุนแรงระหว่างนักวิทยาศาสตร์ฝรั่งเศสกับนักวิทยาศาสตร์อังกฤษ นักวิทยาศาสตร์อังกฤษอ้างว่าโลกจะต้องมีส่วนยุบที่ขั้วเป็นไปตามกฎ Newton และ Huygens ซึ่งได้แสดงให้ทราบทางทฤษฎี ส่วนฝรั่งเศสโดยเฉพาะ คือ Cassini ก็คัดค้านยืนยันการรังวัดของเขา และมีทางโน้มจะยืนกรานรักษาความเชื่อมั่นของเขาว่าโลกเป็นรูปทรงรี

การขัดแย้งนี้จะต้องมีข้อตัดสินเป็นอย่างใดอย่างหนึ่งในที่สุด ดังนั้น ในปี 1735 สถาบันการศึกษาวิทยาศาสตร์ฝรั่งเศสจึงได้ส่งนักสำรวจทางยีออเดติคภายใต้อำนวยการของ Bougure และ La Condamine ไปยัง Peru เพื่อรังวัดระยะเมริเดียนในหนึ่งองศาใกล้ ๆ กับอีเควเตอร์ และในปี 1736 ส่งนักสำรวจอีกคณะหนึ่งภายใต้อำนวยการของ Maupertuis ไปยัง Lapland เพื่อทำการรังวัดระยะอย่างเดียวกันกับคณะแรกบริเวณใกล้ ๆ กับ Arctic Circle การรังวัดของนักสำรวจทั้ง 2 คณะนี้ แสดงว่าระยะเมริเดียนหนึ่งองศาใน Lapland โตกว่าที่ประเทศฝรั่งเศสอยู่ 900 เมตร และอัตรายุบของเมริเดียนมีค่า $\frac{1}{310}$ (ค่าที่ Maupertuis คำนวนเป็น $\frac{1}{216.8}$) ดังนั้น จึงพิสูจน์ได้ว่าโลกเรามีส่วนยุบเช่นเดียวกับ Newtonพยากรณ์ Newton พยากรณ์

ตอนหัวเลี้ยวหัวต่อศตวรรษที่ 19 วิชายีออเดซีได้รุดก้าวหน้าไปด้วยสาเหตุหลายประการ เช่น

1) โดยนักปราชญ์อัจฉริยะผู้มีอายุเพียง 18 ปี คือ Guass

2) โดยวิธีการคำนวณปรับค่าที่สำคัญโดยอาศัยงานของนักวิทยาศาสตร์ฝรั่งเศส

3) โดยที่ได้มีการกำหนด**คำนิยาม** และ**เกิดมี**ระยะความยาวขั้นแรก**เป็นเมตร** ซึ่งคำว่าเมตรก็คือ 1/10,000,000 ส่วนของระยะจากขั้วโลกถึงอีเควเตอร์ตามแนวเมริเดียนผ่านปารีสที่จริงมันสั้นกว่านั้นเล็กน้อย หากใช้รูปทรงรีสากลความยาวเมริเดียนผ่านปารีสมิใช่ยาว 10,000,000 เมตร ความจริงยาว 10,002,286 เมตร

ศตวรรษที่ 19 ได้นำเอาหลัก และวิธีการงานสามเหลี่ยมของ Gauss และ Bessel มาใช้ ซึ่งถือเป็นพื้นฐานทางคำนวณของวิชายีออเดซีกายภาพ เช่น สูตรของ Stokes เป็นต้น และอีกไม่ช้าคงจะได้รับความร่วมมือในวิชายีออเดซีจากนานาชาติ

ในที่สุดศตวรรษที่ 20 จึงถึงยุควิชายีออเดซีสมัยใหม่ เมื่อนึกย้อนถึงประวัติจะพบว่าใน 3 ยุคของวิชานี้ คือ **"ยุคทรงกลม", "ยุคทรงรี"** และ **"ยุคยีออยด์"** ระหว่าง **ยุคทรงกลม**ซึ่งสิ้นสุดจากสมัย Eratosthenes ถึงศตวรรษที่ 18 โลกเราถูกสมมติให้เป็นรูปทรงกลม และดังนั้นจุดมุ่งหมายของวิชายีออเดซีจึงเป็นเพียงวัดรัศมีของทรงกลมเท่านั้น ยุค "โลกมีรูปเป็นทรงรี" เริ่มด้วยการศึกษาส่วนยุบของขั้วตามหลัก Newton และ Huygens ในเชิงทฤษฎีจากผลการรังวัดของ Bonguer และ Maupertuis กับนักวิทยาศาสตร์คนอื่น ๆ ด้วยได้พิสูจน์ว่าโลกมีส่วนยุบที่ขั้ว และยังทำให้สามารถนำไปใช้คำนวณค่าเชิงสัมพันธ์หาส่วนยุบของขั้วได้อย่างละเอียดถูกต้อง

ยุคใหม่ที่เปิดศักราชขึ้นในศตวรรษนี้ คือ "ยุคโลกมีรูปเป็นยีออยด์" เนื่องจากทรงรีใช้อ้างอิงโดยประมาณยังไม่เพียงพอนัก มีความจำเป็นต้องเรียนรู้ไม่เฉพาะค่าที่มี

ความละเอียดถูกต้องสำหรับขนาดของทรงรีที่ใช้อ้างอิงเท่านั้น แต่ต้องเรียนรู้ถึงรูปยีออยด์ในด้านรายละเอียดอีกด้วย ในกรณีเช่นนี้วิธีใหม่ ๆ เท่านั้นที่จะเอาชนะงานอันยุ่งยากนี้ได้

4. ขนาดสำคัญที่สุดของทรงรีที่ใช้อ้างอิง

นักวัดขนาด และหารูปทรงสัณฐานโลกเสาะแสวงหาค่ารัศมีทางอีเควเตอร์ a ที่ถูกต้องที่สุด และอัตรายุบของขั้ว ∞ ของเมริเดียนทรงรีที่ใช้อ้างอิง มาเป็นระยะเวลามากกว่า 200 ปี อย่างไรก็ดี ผลก็ยังไม่เป็นที่น่าพึงพอใจทั้งหมด ส่วนโค้งที่รังวัดซึ่งใช้ในการหาขนาดของโลกสั้นเกินไป และมักจะไม่มีส่วนโยงยึดถึงกัน นักวัดขนาด และหารูปทรงสัณฐานโลกตระหนักอีกเช่นกันว่ายีออเดซีเป็นวิทยาศาสตร์สากลยิ่งกว่าวิทยาศาสตร์แขนงอื่นเสียอีก การร่วมมือระหว่างประเทศต่าง ๆ เท่านั้นที่จะสามารถให้ส่วนโค้งที่รังวัดยาวอย่างเพียงพอประกอบกับการรังวัดทางดาราศาสตร์ที่จำเป็นเพื่อกำหนดหาขนาดของโลกได้อย่างน่าเชื่อถือ

องค์การนานาชาติเป็นจำนวนมากได้จัดตั้งขึ้น Baeyer เป็นชาวเยอรมันได้จัดตั้ง Mitteleuropaische Gradmessung ขึ้นในปี 1862 และได้ขยายออกไปเป็น Internationale Erdmessung เมื่อปี 1886 และได้เปิดประชุมทั่วไปครั้งสุดท้ายในปี 1912 ใน Hamburg หลังจากสงครามโลกครั้งที่ 1 ใน 1922 ได้จัดตั้งองค์การปฏิบัติประสานงานร่วมกันขึ้นใหม่องค์การหนึ่งเรียก "สภาสากลยีออเดซีและภูมิฟิสิกส์" (The International Union of Geodesy and Geophysics) อาศัยผลงานของนักวิทยาศาสตร์แต่ละกลุ่มจากสถาบันยีออเดติคแห่งชาติในประเทศต่าง ๆ และจากองค์การนานาชาติ จึงได้รับค่าของ a และ ∞ เป็นอันมาก บัดนี้ที่สำคัญที่สุดนั้นได้แสดงไว้แล้วในตารางที่ 1

รัศมีโลกในพื้นอีเควเตอร์ a ของทรงรีปกติคำนวณจากส่วนโค้งที่รังวัด อัตรายุบของเมริเดียน ∞ คำนวณได้ 2 ประการ คือ จากส่วนโค้งที่รังวัดมากับจากการรังวัดความโน้มถ่วง และทางดาราศาสตร์ ค่า ∞ ที่ถูกต้องที่สุดซึ่งได้รับจากการรังวัดความโน้มถ่วงและทางดาราศาสตร์ มักนำไปใช้ในการคำนวณหาค่า a จากส่วนโค้งที่รังวัด

จากความคิดเห็นตามประวัติรู้สึกไม่สู้ยากจะเข้าใจว่า เหตุใดประเทศเยอรมันและประเทศอีกหลายประเทศในทวีปยุโรปจึงใช้ทรงรีของ Bessel ตั้งแต่ ค.ศ. 1841 หรือทำไมประเทศอังกฤษจึงใช้ทรงรีของ Clarke 1880 ความแตกต่างเชิงอุดมคติเช่นนี้อาจให้อรรถาธิบายได้เช่นกันว่าเหตุใด U.S.S.R. จึงใช้ทรงรีของเขาเอง คือ ทรงรี Krassoski มาตั้งแต่ปี 1938 สหรัฐกำลังดำเนินการเปลี่ยนทรงรีจาก Clarke 1866 เป็นทรงรีสากลที่ Hayford ซึ่งเป็นนักวัดขนาด และรูปทรงสัณฐานโลกชาวอเมริกันซึ่งได้คำนวณขึ้นในปี 1910

แม้ทรงรีที่ใช้อ้างอิงทั้ง 5 นี้ใช้เป็นพื้นฐานสำหรับคำนวณทางยีออเดติค์ของโลกมากที่สุดก็ตาม ก็ยังมีนักวิทยาศาสตร์หลายประเทศได้พยายามค้นหาทรงรีต่าง ๆ เพิ่มเติมแต่ก็ยังขาดข้อมูลมาก หากทรงรีที่หาเพิ่มมานั้นนำไปใช้อ้างอิงสำหรับคำนวณในบริเวณที่มีขนาดเล็กเป็นพื้นฐานผิวทรงรีนั้นจะทับกันกับผิวยีออยด์ค่อนข้างดี ณ บริเวณที่พิจารณา แต่อันนี้ก็ไม่แน่นักเพราะมักมีความแตกต่างกันอย่างมากเสมอระหว่างทรงรีเฉพาะถิ่นกับทรงรีที่คำนวณได้จากข้อมูลที่มีอย่างเพียงพอ

ไม่อาจเป็นไปได้ที่จะค้นหาขนาดของทรงรีที่ใช้อ้างอิงซึ่งมีขนาดพื้นผิวแนบสนิทพอเหมาะพอดีกับยีออยด์ในทุกส่วนของพื้นผิวโลก เหตุผลก็คือ ปรากฏชัดว่าพื้นผิวยีออยด์มีลักษณะไม่ราบเรียบอยู่มาก แต่อย่างไรก็ดี อาจเป็นไปได้ที่จะหาลูกทรงรีที่ใช้อ้างอิงปานกลาง ซึ่งขนาดของลูกทรงรีชนิดนี้อาจมีขนาดเล็ก และโตเกินไปในบางท้องที่ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่ง ทรงรีปานกลางนั้นบางส่วนอยู่ต่ำ และบางส่วนอยู่เหนือพื้นผิวยีออยด์แต่จะไม่อยู่ต่ำ และสูงจนห่างเกินไป

ทรงรีอะไรจึงจะเป็นลูกทรงรีเฉลี่ยที่ดีที่สุดเพื่อนำไปใช้ได้ทุกหนทุกแห่งทั่วโลก?

การสนับสนุนให้ใช้ค่ารัศมีในแนวอีเควเตอร์ซึ่งมีค่าเป็น 6,378,388 เมตร เพื่อดัดแปลงให้เป็นทรงรีสากลนั้นมีความจริงอยู่ว่าระยะจาก Russo-Scandinavian ได้ให้ a = 6,378,444 เมตร การรังวัดของอินเดียได้ a = 6,378,350 เมตร อาฟริกาใต้วัดได้ a = 6,378,307 เมตร และในปี 1926 Heiskanen วัดได้ a = 6,378,397 เมตร จากการรังวัดส่วนโค้งยุโรป อย่างไรก็ดี ความจริงที่ได้เหล่านี้ Jeffrey ได้ทักท้วงว่าค่าอีเควเตอร์ของทรงรีสากลยาวเกินไปถึงประมาณ 300 เมตร เขาเองได้รับค่า a เพียง 6,378,397 เมตร โดยเขาพิจารณาไม่ใช้ความเฉของเส้นดิ่งที่ตัดทอนทางไอซอสทะซี่อย่างที่ Hayford และ Heiskanen ทำ การละเลยอันนี้ปรากฏเป็นจุดอ่อนในข้อขัดแย้งของ Jeffrey ความเฉของเส้นดิ่งเฉพาะท้องถิ่น และความเป็นลูกคลื่นเฉไปในเฉพาะท้องถิ่นของพื้นยีออยด์มีอิทธิพลใหญ่หลวงต่อค่า a ของเขาตามคำกล่าวของเขาว่าระยะโครงข่ายสามเหลี่ยมยุโรปตะวันตกให้ค่า a = 6,377,950 เมตร ส่วนระยะโครงข่ายยุโรปตามเส้นขนาน 52° มีค่า a = 6,377,317 เมตรเท่านั้น เป็นไปอย่างที่เราคาดคะเนเอาไว้ก่อน ในสกอตแลนด์เหนือได้ค่าตรงละติจูด φ_0 ว่าเป็นค่าโตเกินไป และในสเปนใต้ตรงค่าที่ละติจูด φ_1 เล็กเกินไปเพราะถูกเขาต่าง ๆ ในบริเวณเหล่านี้อยู่ทางด้านใต้ และด้านเหนือตามลำดับของสถานีที่มีความเฉของเส้นดิ่ง ดังนั้น ความต่างละติจูด $\varphi_2 - \varphi_1$ จึงโตเกินไป และโดยเหตุนี้ค่า a จึงมีค่าเล็กเกินไป เนื่องจากผลของ a เป็นอัตราส่วนผกผัน $\varphi_2 - \varphi_1$ ความจริงผลเฉลี่ยตัดทอนอันเกิดจากไอซอสทะซี่และภูมิประเทศ (Topographic-Isostatic Reduction) เฉลี่ยมีค่า 1.7" ที่ตำบล 2 ตำบลทางเหนือของระยะโครงข่ายยุโรปตะวันตก และมีค่า

4.1″ ที่ตำบลทางใต้ 4 ตำบล (Chinchilla, Mola de Formentera, Tetica และ Boldan) ฉะนั้น จึงรวมเป็น 5.8″ ซึ่งจะต้องแก้ให้กับระยะ 180 เมตร สำหรับระยะโครงข่ายที่ยาว 24° นี้ และดังนั้นจำนวนแก้ที่เป็นบวกในค่า a จึงเป็นระยะประมาณ 380 เมตร

ระยะโครงข่ายยุโรปตามเส้นขนาน 52° จะต้องให้ค่า a เล็กมากเกินไปเพราะยุโรปอยู่ใกล้ปลายแกนยาวของวงขนาน และโครงข่ายตามแนวเส้นขนาน 47.5° ที่ผ่านข้ามภูเขายุโรปตอนกลาง ไม่อาจนำมาใช้ได้โดยมิได้ตัดทอนทางไอซอสทะซี่ และภูมิประเทศเพื่อกำหนดหาขนาดของโลกมิฉะนั้นจะได้ค่าของ a เล็กเกินไป

Jeffrey ใช้ระยะโครงข่ายสามเหลี่ยมทั้ง 3 นั้น จึงทำให้ a มีค่าเล็กเกินไป Heiskanen เชื่อว่าค่าของ Hayford, a = 6,378,388 เมตร ใกล้เคียงความจริงมากกว่าค่าของ Jeffrey ซึ่งค่า a = 6,378,099 เมตร

ตารางที่ 4.1
ขนาดลูกทรงรีโลก

ชื่อผู้ให้กำเนิด	ปี	a	1/ α
A จากการรังวัดส่วนโค้ง			
Bouguer, Maupertuis	1738	6,397,300	216.8
Delambre	1800	6,375,653	334.0
Walbeck	1819	6,896	302.8
Everest	1830	7,276	300.8
Airy	1830	6,542	299.3
Bessel	1841	7,397	299.15
Clarke	1857	8,345	294.26
Pratt	1863	8,245	295.3
Clarke	1866	8,206	295.0
Clarke	1880	8,249	293.5
Bonsdorff, A.	1888	8,444	298.6
Hayford	1906	8,283	297.8
Helmert	1907	8,200	290.3
Hayford	1910	8,388	297.0
Heiskanen	1926	8,397	(297.0)
Krassowski	1938	8,245	298.3
Jeffrey	1948	8,099	297.1
Ledersteger	1951	8,298	(297.0)
U.S.Army Map Service (Hough)	1956	8,260	(297.0)

ชื่อผู้ให้กำเนิด	ปี	a	1/∝
B โดยวิธีอื่น			
Helmert	1884		299.25*
Ivanov	1889		297.2 *
Helmert	1901		298.2 *
Bowie	1917		297.4 *
Berroth	1916		297.4 *
Helmert	1915		196.7 *
Heiskanen	1924		297.4 *
Heiskanen	1928		297.0 *
Heiskanen	1938	*จากความ	298.2 *
Niskanen	1945	โน้มถ่วง	297.8 *
Heiskanen, Uotila	1945	+ จากดารา	297.4 *
De Sitter	———	ศาสตร์	296.96+
De Sitter	———		296.76+
Spencer- Jones	1941		296.78+
Bullard	1948		297.34+
Jeffrey	1948		297.34+

Ledersteger ได้พัฒนาวิธีที่น่าสนใจจากการใช้ระบบเฉพาะส่วนตอนเรียก "Partial Systems" เพื่อการกำหนดหาขนาดรูปทรงรีที่ใช้อ้างอิง ระบบชนิดนี้ยึดถือหลักความจริงว่า "ศูนย์พลังโน้มถ่วงของจุดที่ให้ค่ายีออเดติค และค่าดาราศาสตร์นั้นย่อมไม่แปรเปลี่ยนเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงใด ๆ จากทรงรีหนึ่งไปสู่ทรงรีอีกอันหนึ่ง" ผลที่ปรากฏก็คือองค์ประกอบความเคลื่อนคลาด และปิดเปรไปของโครงข่ายมิได้แปรเปลี่ยนเมื่อได้คำนวณระบบการหักเฉของเส้นดิ่งในเชิงกำลังสองต่ำสุดกับความเคลื่อนคลาดของสมการลาพลาสในทางตรงข้ามจำนวนแก้ระบบเฉพาะส่วน A ณ ศูนย์ความโน้มถ่วงของระบบเฉพาะส่วนของตำบล B กลับเปลี่ยนตามขนาดของลูกทรงรีที่ยอมรับ และจำนวนแก้ของระบบเฉพาะส่วน B ณ ศูนย์ความโน้มถ่วงจากระบบเฉพาะส่วน A ก็มีลักษณะเช่นเดียวกัน ทำให้แก้ปัญหาสำหรับรูปทรงรีที่เหมาะที่สุดที่ตรง หรือลงเอยกันได้ ถ้า n เป็นจำนวนของระบบเฉพาะส่วน มีสมการรังวัดอยู่ n(n-1) สมการ เพื่อแก้ da และ d ∝

ความจริงการคำนวณของ Ledersteger วิธีของเขาแม้จะดีเลิศซึ่งให้ค่า a เล็กไปกว่าค่าของลูกทรงรีสากลอยู่ประมาณ 500 เมตรนั้น สาเหตุส่วนใหญ่มาจากความจริงว่า เขาได้คำนวณรูปทรงรีที่เหมาะที่สุดสำหรับทวีปยุโรป และมิใช่เป็นรูปทรงรีปานกลางที่เหมาะที่สุดสำหรับทั้งโลก สาเหตุอีกประการหนึ่ง คือ เขามิได้ใช้ค่าตัดทอนความสมดุลของเปลือกโลกกับภูมิประเทศ (Topographic-Isostatic Reductions) เข้าไปเกี่ยวในองค์ประกอบความเฉของเส้นดิ่งที่รังวัด เมื่อเรามาคำนึงถึงระบบยูโกสลาเวีย เป็นต้น องค์ประกอบเหล่านี้แกว่งไปจาก +3.34″ ถึง −21.39″ ในระบบสวิสส์แกว่งจาก +16.94″ ถึง −25.11″, ระบบอิตาลีจาก +15.03″ ถึง −25.17″ และในออสเตรเลียจาก +18.88″ ถึง −14.55″ ปรากฏชัดว่าเราอาจได้ค่าแตกต่างจริง ๆ สำหรับ a ทั้งนี้ ขึ้นอยู่กับจุดทางดาราศาสตร์-ยีออเดติคใดบังเอิญเป็นจุดที่เราใช้

ต่อมา Ledersteger ได้ตรวจสอบขนาดลูกทรงรีใช้อ้างอิงโดยการนำเอามุมความเฉของเส้นดิ่งที่ได้จากงานความโน้มถ่วงกับงานดาราศาสตร์-ยีออเดติคทางยุโรป เปรียบเทียบกันดู และได้ค่า a = 6,378,315 เมตร ซึ่งเล็กกว่าค่า a ของลูกทรงรีสากลเพียง 73 เมตรเท่านั้น

หากเราสังเกตต่อไป ค่า a ของลูกทรงรี Krassowski มีขนาดเล็กกว่าเพียง 143 เมตร ของ Olander ได้จากการรังวัดที่ Baltic โตกว่าถึง 322 เมตร และของ Wideland ซึ่งคำนวณความเฉเส้นดิ่งจากสวีเดน และฟินแลนด์โตกว่าลูกทรงรีสากลอยู่ 689 เมตร ดูคล้ายกับว่าค่า a ของ Jeffrey เล็กเกินไป

จากการคำนวณของ U.S. Army Map Service ปี 1956 โดยถือเอาส่วนโค้งที่วัดไว้ยาวมาก ซึ่งบัดนี้ได้ค่า 6,378,260 เมตร สำหรับรัศมีในพื้นอีเควเตอร์ (a)

5. ความสำคัญของจุดเริ่มจากระบบยีออเดติค

เนื่องจากละติจูด, ลองจิจูด และภาคของทิศของจุดเริ่มแรกจากตำบลยีออเดติกที่ใช้เป็นฐานนั้น เป็นค่าทางดาราศาสตร์ที่ยังมิได้ทำการแก้ สมมติให้จุดนั้นเป็น Φ_o, λ_o และ A_o จุดนี้อ้างอิงถึงยีออยด์ (Geoid) มิใช่บนลูกทรงรีอ้างอิงซึ่งในการคำนวณทางยีออเดติคได้อาศัยลูกทรงรีนี้เป็นหลัก ความจริงอันนี้จะปรากฏชัดยิ่งขึ้นเมื่อเราพิจารณาว่า **ระดับน้ำ** ที่ใช้ในงานรังวัดดาราศาสตร์ (อย่างน้อยที่สุดในทางปฏิบัติ) จะต้องขนานกับพื้นผิวยีออยด์ เพื่อแปลงพิกัด Φ_o, λ_o และ A_o จากยีออยด์ไปหาลูกทรงรีจำเป็นต้องทราบองค์ประกอบความเฉของเส้นดิ่ง z_o และ η_o ณ จุดเริ่ม แต่มักจะไม่ค่อยทราบ ดังนั้นความไม่ราบเรียบของพื้นผิวยีออยด์ย่อมทำให้เกิดผลในระบบยีออเดติคที่แตกต่างกันมาก

ทีเดียว ทั้งนี้ ย่อมจะขึ้นอยู่กับจุดใดที่ได้เลือกขึ้นเป็นจุดเริ่มแรก ลักษณะนี้ย่อมเป็นจริงถึงแม้ว่าจะใช้ลูกทรงรีที่ใช้อ้างอิงอันเดียวกันก็ตาม

บัดนี้ประเทศต่าง ๆ ส่วนมากมีระบบยีออเดติคแห่งชาติเป็นของตนเอง จุดหนึ่งจุดใดทั้งที่เป็นจุดสามเหลี่ยม หรือจุดที่หอดาราศาสตร์ (ปกติคือ ฐานของที่ตั้งกล้อง) มักจะใช้เป็นจุดเริ่ม เนื่องจากจุดเริ่มต่าง ๆ แม้กระทั่งสถานีใกล้เคียงมิได้โยงยึดไปสู่ระบบชนิดเดียวกัน ซึ่งปกติมักไม่ทราบว่าระบบยีออเดติคชนิดต่าง ๆ แตกต่างกันมากน้อยเป็นอย่างไร การคำนวณที่กระทำกันระหว่างสวีเดน, เดนมาร์ก, นอร์เวย์ และเยอรมนีกับอังกฤษ และฝรั่งเศส ตามคำบรรยายของ Nares เจ้ากรมสำนักงานอุทกศาสตร์นานาชาติของ Monaco ได้ความเคลื่อนคลาดดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 4.2

ความแตกต่างระหว่างระบบยีออเดติคยุโรปบางระบบ

ที่ตั้ง	ทางละติจูด	ทางลองจิจูด	เป็นเมตร
แถว Kattegat และ Baltic			
เดนมาร์ก-สวีเดน	+ 0.4″	-5.5″	95
เดนมาร์ก-เยอรมนี	-6.3	+8.9	251
เดนมาร์ก-นอร์เวย์	-5.5	-1.0	171
ระหว่างอังกฤษ และฝรั่งเศส			
มองต์เซ็นท์ลัมเบอร์ต (ค่าอังกฤษ-ฝรั่งเศส)	+5.43	-4.03	190

เราสามารถเข้าใจได้ทันทีโดยไม่ยากว่า เราต้องกำจัดความสับสนอันเนื่องจากเหตุที่ระบบยีออเดติคแตกต่างจากกัน และส่วนมากย่อมเป็นไปได้แล้วด้วย เช่นปัจจุบัน และกรรมการยีออเดติคบอสติคได้คำนวณ และดำเนินการครบวงยีออเดติคที่ล้อมรอบทะเลบอลติกอย่างละเอียดถูกต้องขึ้นแล้ว ประเทศบอลติกทั้งหลายได้โยงยึดเป็นระบบยีออเดติคเดียวกัน และยังมีอีกหลายประเทศได้กระทำไปแล้ว หลังจากกรมสำรวจชายฝั่งและทำแผนที่สหรัฐรับเหมาทำงานร่วมกับ U.S.Army Map Service และใช้เครื่องคำนวณชนิดมีความเร็วสูง ทำการปรับค่าการสามเหลี่ยมยุโรปแล้วเสร็จ เป็นไปได้สำหรับ Bomford

ที่จะโยงยึดกับประเทศยุโรปให้เป็นระบบอันหนึ่ง และเป็นระบบเดียวกัน เนื่องจากเขามิได้ใช้ความเฉของพื้นยีออยด์ทางความโน้มถ่วง หรือใช้องค์ประกอบความเฉของเส้นดิ่ง จำนวนแก้ยังจะต้องกระทำกันอีก

เหตุไรการเชื่อมโยงระบบยุโรปให้เป็นระบบเดียวจึงมิได้กระทำกันก่อน คำตอบคือ มันเป็นเรื่องทั้งยุ่งยาก และไม่จำเป็น เช่น ประเทศฝรั่งเศส ยังไม่แลเห็นเหตุผลว่าทำไมประเทศเยอรมนีจึงไม่ควรมีระบบยีออเดติคแตกต่างไปจากระบบของเยอรมันเอง ความจริงเช่นเดียวกันนี้เกิดขึ้นแก่เยอรมนี และโปแลนด์ ปัจจุบันนี้สถานการณ์แตกต่างออกไปมากทีเดียว วิธีการรังวัดระยะย่านยาวมาก เช่น Decca, Shoran และ Hiran สามารถขยายการวัดระยะออกไปจากประเทศหนึ่งถึงอีกประเทศหนึ่ง จึงทำให้ระบบยีออเดติคร่วมกลับกลายมีความสำคัญ และจำเป็น โดยเฉพาะสำหรับงานเชิงอุทกศาสตร์ตามชายฝั่ง และทะเลชายฝั่ง เช่น ในทะเลเหนือและในทะเลบอลติก เรือสำรวจอุทกใช้สถานี Decca ในประเทศต่าง ๆ คงไม่จำเป็นต้องกล่าวหรอกว่า สถานีทั้งหมดเหล่านี้ต้องเป็นระบบเดียวกัน

ไม่เพียงแต่ประเทศต่าง ๆ ในยุโรป แต่รวมถึงอาณาบริเวณอื่น ๆ อีกมากหลายได้โยงยึดเชื่อมต่อระบบยีออเดติคอันเดียวกันนี้เข้าด้วยกัน ประเทศแคนาดา, รัฐอาลาสกา, เม็กซิโก และ West Indies ได้โยงยึดกับหมุดหลักฐานอเมริกัน (American Datum) อาร์เจนตินา และประเทศอื่น ๆ อีกหลายประเทศทางอเมริกาใต้มีระบบเป็นของตนเอง ซึ่งในอนาคตใกล้จะต้องโยงยึดเข้ากับระบบอเมริกาเหนือ เมื่อการโยงยึดดังกล่าวนี้เป็นไปโดยเรียบร้อยแล้ว โลกใหม่ทั้งโลกก็จะใช้ระบบ หรือเป็นระบบเดียวกัน

สถานภาพของยุโรป เอเชีย และอาฟริกา ก็คงคล้ายคลึงกัน U.S. Army Map Service ได้โยงยึดโครงข่ายสามเหลี่ยมยุโรป และอาฟริกาเข้าด้วยกันโดยโครงข่ายผ่านข้ามทะเลเมดิเตอร์เรเนียน และเสริมการรังวัดส่วนโค้งอาฟริกาที่วางลงไปจากไคโร ถึงเคปทาวน์ (Cairo to Cape Town) ดังนั้นระบบยีออเดติคอาฟริกาใต้, อาฟริกาเหนือ และยุโรปจึงผนวกรวมเป็นระบบอันเดียวกัน

โครงข่ายสามเหลี่ยมเอเชีย การรังวัดส่วนโค้งได้โยงยึดกับระบบยุโรป ส่วนโค้งยาวเหยียดระหว่าง Ireland กับสิงคโปร์นั้นเป็นที่น่าเสียดายที่จะต้องมีงานเสริมช่องว่างอย่างน้อยหนึ่งแห่งก่อนที่ระบบอินเดียกับยุโรปจะโยงยึดถึงกันได้ ประเทศออสเตรเลียสามารถโยงยึดกับระบบยีออเดติคทางเอเชียตะวันออกเฉียงใต้ได้ด้วย

จุดเริ่มแรก และพิกัดของระบบยีออเดติคที่ใช้กันมากที่สุดมีดังต่อไปนี้

1) จุดเริ่มจากหมุดหลักฐานอเมริกาเหนือซึ่งได้กำหนดไว้เมื่อปี 1927 ใช้ลูกโลกสมมติ หรือลูกทรงรีของ Clarke 1866 อยู่ที่ Meades Randch, มลรัฐ Kansas ค่าละติจูด และลองจิจูดทางดาราศาสตร์ เป็น

$\varphi_0' =$ 39° 13′ 25.67″ และ

$\lambda_0' =$ 98 32 28.20

และองค์ประกอบมุมความเฉของเส้นดิ่ง $Z_0 = -1''.3$ และ $\eta_0 = 0''.3$ ซึ่งเป็นองค์ประกอบมุมความเฉเชิงทดลองจากพลังโน้มถ่วงของ Rice

2) จุดเริ่มของระบบยุโรปซึ่งขณะนี้ได้แปลงค่าเป็นลูกโลกสากลแล้ว คือ ที่หอคอยเฮลเมิร์ท (Helmert Tower) ใน Potsdam ค่าละติจูด และลองจิจูดทางดาราศาสตร์ เป็น

$\varphi_0' =$ 52° 22′ 54.8″

$\lambda_0' =$ 13 04 01.7

และองค์ประกอบมุมความเฉของเส้นดิ่ง Z_0 กับ η_0 มีผู้คำนวณหลายท่านด้วยกัน และปรากฏ Z_0 แปรเปลี่ยนจาก +3″ ถึง +6″ กับ η_0 จาก +1.2″ ถึง +4.0″ Bomford ใช้ค่า $Z_0 = 3.36''$, $\eta_0 = 1.78''$ ในการคำนวณทดลองของเขาจากยีออยด์ยุโรป

3) ระบบของรัสเซียคำนวณจากลูกโลกของ Krassowski จุดเริ่มอยู่ที่ Pulkovo ทั้งที่ศูนย์กลางอาคารส่องดาว และที่จุด Pulkove A. ซึ่งเป็นสถานีสามเหลี่ยมค่าละติจูด และลองจิจูดดาราศาสตร์ที่ศูนย์กลางตึกหอส่องดาว Pulkovo เป็น

$\varphi_0' =$ 59° 46′ 18.72″

$\lambda_0' =$ 30 19 38.55

ส่วนที่หมุดสามเหลี่ยม Pulkovo A. มีค่าละติจูด กับลองจิจูดเล็กกว่าที่ศูนย์กลางตึกหอส่องดาว Pulkovo อยู่ 3.19″ และ 13.77″ ตามลำดับ องค์ประกอบมุมความเฉของเส้นดิ่งนั้น $Z_0 = -0.16''$ และ $\eta_0 = 3.54'' \cos\varphi$ (Molodenskij, 1945)

4) ระบบอินเดียซึ่งจุดเริ่มอยู่ที่ Kalianpur ได้เปลี่ยนแปลงหลายครั้งตามคำกล่าวของ Gulatee พิกัด และภาคของทิศทางดาราศาสตร์สำหรับ Kalianpur นั้น บัดนี้ยอมรับกันแล้ว คือ

$\varphi_0' =$ 24° 10.79″

$\lambda_0' =$ 77 39 17.57

และภาคของทิศ A1 ไปยังจุด Surantal ซึ่งเป็นจุดหนึ่งในสามเหลี่ยม มีค่า = 190° 27′ 6.39″ ค่ามุมความเฉของเส้นดิ่งตามที่อ้างอิงถึงรูปโลกสากลเป็น $Z_0 = +2.42''$ และ $\eta_0 = +3.17''$

ค่าละติจูด และลองจิจูดในอินเดียที่พิมพ์ไว้ทั้งหมดเป็นค่าของลูกโลก Everest ซึ่งมี a = 6,377,276 เมตร $\alpha = \frac{1}{300.8}$ ส่วนมุมความเฉของเส้นดิ่งในอินเดียให้ไว้สำหรับรูปโลกสากลด้วย

การรังวัดส่วนโค้งมีความละเอียดแปรเปลี่ยนไปตามเวลา และสถานที่ที่ทำการ

กล่าวว่า วงยีออเดติคบอลติคซึ่งมีความยาวประมาณ 2,500 เมตร บางทีจนกระทั่งถึงปัจจุบันมีความละเอียดที่สุด คือ ความเคลื่อนคลาดจากค่าคำนวณกับค่ารังวัด (Closure Error) เปรียบเทียบกันแล้วได้เพียง 1:1,000,000 อนึ่ง ตามที่ Whitten ได้ชี้ให้เห็นความละเอียดเชิงสัมพัทธ์ของวงจรโครงข่ายสามเหลี่ยมมักจะมีเพียง 1:1,000,000 ความละเอียดเชิงสัมพัทธ์ของการรังวัดส่วนโค้งยาวมาก ๆ อาจจะยังเล็กกว่าเสียอีก ความจริงอันนี้โดยเฉพาะจะเป็นจริงเกี่ยวกับส่วนโค้งที่เป็นแนวไปตามเทือกเขาไม่ราบเรียบ เช่น โครงข่ายสามเหลี่ยมอเมริกาจากอลาสกา (Alaska) ถึงปานามา (Panama) ความคลาดเคลื่อนเป็นระเบียบของมุมที่รังวัดอันเนื่องจากการหักเหทางข้าง และจากมุมความเฉของเส้นดิ่ง ณ สถานีสามเหลี่ยมอาจเกิน 1″ ได้

อนึ่ง ยีออยด์ซึ่งเป็นพื้นผิวที่การรังวัดได้ทอนลงไปสู่นั้นไม่ราบเรียบ เช่น ในยุโรปอยู่เหนือพื้นผิวลูกทรงรีที่ใช้อ้างอิงประมาณ 40 เมตร ในอินเดียอยู่ใต้ประมาณ 30 เมตร และทางภาคตะวันตกของสหรัฐอเมริกาอยู่เหนือประมาณ 30 เมตร ซึ่งเป็นแนวที่ทำการคำนวณค่าทางยีออเดติค เพราะฉะนั้นเส้นฐานของสามเหลี่ยมที่รังวัดในยุโรปต้องการจำนวนแก้ที่เป็น **ลบ** ประมาณ 1:150,000 ส่วนระยะเส้นฐานของอินเดียมีจำนวนแก้เป็น **บวก** ประมาณ 1:200,000 และเส้นฐานสหรัฐอเมริกาด้านตะวันตกมีจำนวนแก้เป็น **ลบ** คือ 1:200,000 ก่อนที่จะนำไปใช้ในการปรับค่าของสามเหลี่ยมระยะยาวมาก จำนวนแก้ทำนองเดียวกันนี้นับว่าจำเป็นสำหรับส่วนอื่น ๆ ของโลก เนื่องจากการทอนเส้นฐานจากพื้นยีออยด์ลงไปสู่พื้นผิวทรงรียังมิได้พิจารณากันเหตุผลที่ดีมากคือว่า ความเฉของพื้นผิวทั้งสองจากกัน (N) นั้น ทราบโดยประมาณ หรือไม่ทราบเลย แหล่งความคลาดเคลื่อนเป็นระเบียบอันมากมายยังซ่อนตัวอยู่ในการปรับค่า

ในมหาสมุทรซึ่งปกคลุมพื้นโลกอยู่ประมาณ 70 เปอร์เซ็นต์ การสามเหลี่ยมมิได้ทำกัน หรือวิธีการรังวัดส่วนโค้งที่ใช้เพื่อกำหนดหามุมความเฉของเส้นดิ่งบนเกาะในมหาสมุทรยังไม่มีเลย อุปสรรคเหล่านี้ที่มีค่าวิธีการอันเป็นมาตรฐานนั้นแสดงให้เห็นถึงว่า สำคัญอย่างไร และจะหาวิธีหนึ่งวิธีใดที่สามารถจะหาจำนวนแก้อันสมบูรณ์แก่ขนาดของลูกทรงรีที่ใช้อ้างอิงนั้นได้ และเชื่อมโยงส่วนต่าง ๆ ของโลกไปสู่ระบบเดียวกันแม้กระทั่งเชื่อมโยงข้ามมหาสมุทร อย่างไรก็ดี การกำหนดหาความเฉของพื้นผิวยีออยด์

และมุมความเฉของเส้นดิ่ง ณ ที่จุดใด ๆ ที่กำหนดให้นับว่าเป็นงานกว้างใหญ่ไพศาล วิธีสากลนี้คือ วิธีใช้พลังโน้มถ่วงของโลก

การเชื่อมโยงทวีปต่าง ๆ ไปสู่ระบบยีออเมติคอันหนึ่งดูเหมือนเป็นไปได้เหมือนกัน โดยวิธีการรังวัดด้วยอิเล็กทรอนิกส์ โดยเฉพาะวิธีชอร์แรน (Shoran) และไฮแรน (Hiran) และโดยการรังวัดเทห์วัตถุฟ้า ซึ่งรวมทั้งวิธีสุริยุปราคา (Kukkamaki) วิธีรังวัดดวงจันทร์อยู่ระหว่างเรากับดวงดาว (Occultation) ตามวิธีของ O'keefe และวิธีกล้องส่องดวงจันทร์ตามแบบของ Markowitz อย่างไรก็ดี จากวิธีเหล่านี้ไม่ค่อยจะทราบผลนัก ส่วนมากเขาจะหาไม่ได้เมื่อมีปัญหาอันหนึ่งในการหารูปร่างของยีออยด์ในรายละเอียด หรือหาองค์ประกอบของมุมความเฉเส้นดิ่งสมบูรณ์ ณ สถานีที่ต้องการบนภาคพื้นทวีป และบนเกาะในมหาสมุทรต่าง ๆ