บทที่ 12
สูตรความเคลื่อนคลาด

1. โค้งความคาดคะเน (The Probability Curve)

ในการสังเกตพิจารณา หรือในการรังวัดที่ต้องการความละเอียดสูงพิเศษ ผลคาดคะเนหรือความน่าจะเป็นของความเคลื่อนคลาดจากผลการรังวัดจะมีลักษณะดังนี้

1.1 ความเคลื่อนคลาดที่มีขนาดเล็กมีมากกว่าความเคลื่อนคลาดที่เป็นขนาดใหญ่

1.2. ความเคลื่อนคลาดเป็นบวกมีเท่า ๆ กับความเคลื่อนคลาดที่เป็นลบ

1.3. การคาดคะเนถึงความเคลื่อนคลาดที่มีขนาดโตมากนั้นจะเป็น 0

คำว่า "ขนาดโตมาก" ดูเหมือนจะไม่ถูกต้องนักในเมื่อใช้กับเรื่องทั่ว ๆ ไป แต่ในบางกรณีความหมายอันนี้ย่อมชัดเจนอยู่แล้ว เช่น การรังวัดมุมด้วยกล้องธีโอโดไลท์ เมื่ออ่านมุมได้ถึงฟิลิบดา หากอาจมีความเคลื่อนคลาดขนาด 20″ ก็เรียกว่ามีขนาดโตมาก และถ้ากล้องนั้นสามารถอ่านค่าได้เป็นลิบดา ถ้าเคลื่อนคลาดไปขนาด 5′ ก็เรียกว่ามีขนาดโตมากเช่นกัน

ที่จริงนั้นในทุก ๆ ชั้นของการรังวัด ความละเอียดของงานจะมีเขตจำกัดอันหนึ่ง คือ ℓ เช่น ความเคลื่อนคลาดที่เป็น + ทั้งหมดอยู่ระหว่าง 0 และ $+\ell$ ส่วนความเคลื่อนคลาดที่เป็น − ทั้งหมดอยู่ระหว่าง 0 และ $-\ell$

ฉะนั้นผลคาดคะเนของความเคลื่อนคลาดอันหนึ่งย่อมขึ้นอยู่กับความเคลื่อนคลาดนั้น ดังนั้นถ้าให้ Y เป็นผลคาดคะเนของความเคลื่อนคลาด และ X เป็นความเคลื่อนคลาดใด ๆ แล้ว กฎเกณฑ์ของผลคาดคะเนความเคลื่อนคลาดย่อมแสดง หรือนิพจน์ออกมาด้วยสมการดังนี้

$$Y = f(X) \qquad \text{.......................(1)}$$

หากเราทราบ f(X) ว่ามีรูปเป็นอย่างไรแล้วก็สามารถจะหาผลคาดคะเนความเคลื่อนคลาดได้ เมื่อเป็นเช่นนี้

Y = แกนตั้ง

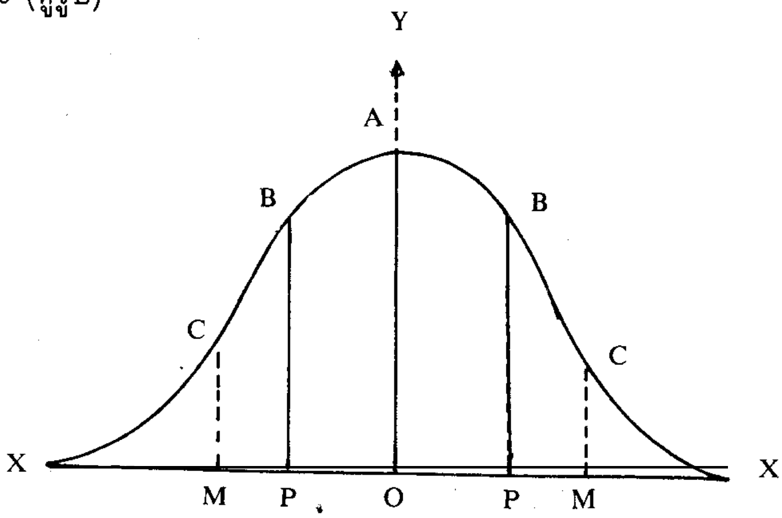
X = แกนราบ

Y อาจพิจารณาเป็นสมการของโค้ง ซึ่งโค้งนี้จะต้องสมนัยกับความจริงอันเป็นหลักสำคัญ 3 ประการ คือ

1.1 แกนตั้ง OA จะต้องมีค่าสูงสุด และจะต้องตรงกับความคลาดเคลื่อน 0

1.2 โค้งนี้จะต้องเป็นโค้งเรียบมีลักษณะทางซ้าย และขวาของ OA เป็นอย่างเดียวกัน (Symmetry) เนื่องจากความเคลื่อนคลาดที่เป็น + กับเป็น – มีผลคาดคะเนเป็นจำนวนเท่ากัน

1.3 ขณะ X มีจำนวนเพิ่มขึ้น ค่าของ Y จะลดลง และเมื่อ X มีขนาดโตมาก Y ต้องเป็น 0 (ดูรูป)



รูป 12.1

ในรูป โค้งที่เขียนขึ้นเป็นตัวแทน หรือตัวมีรูปโค้งความคาดคะเน

OP และ OM เป็นความเคลื่อนคลาด และ BM กับ MG เป็นผลคาดคะเนของความเคลื่อนคลาด OP และ OM ตามลำดับ

อนึ่ง เนื่องจากการรังวัดต่าง ๆ นั้นย่อมมีขั้นความละเอียดแตกต่างกัน ชั้นความละเอียดแต่ละชั้นของการรังวัดจะมีท่อนเส้น หรือโค้งรับตัวมันเองอย่างเด่นชัด

โค้งดังในรูปเรียก "โค้งความคาดคะเน" ในการกำหนดหาโค้งนี้จำเป็นต้องพิจารณา Y เป็นฟังก์ชั่นเนื่องของ X ที่เป็นเช่นนี้นับว่ายอมให้เป็นไปได้อย่างสมบูรณ์ทีเดียว เนื่องจากเมื่อความละเอียดในการรังวัดเพิ่มมากขึ้น ค่าของ X ถูกแยกออกให้มีย่านเล็กลง ๆ มากขึ้นตามลำดับ

ความต้องการความจริงอันที่ 3 คือ Y ต้องเป็น 0 สำหรับค่าของ X ทุกค่าที่โตกว่าเขตจำกัด $\pm \ell$ และการให้ $Y = 0$ ดังกล่าวปรากฏว่าไม่น่ากำหนดเช่นนั้น เพราะไม่อาจเป็นไปได้จะกำหนดฟังก์ชั่นเนื่องของ X โดยให้ X เป็น 0 เมื่อ $X = \pm \ell$ และก็เป็นไปไม่ได้เช่นกันจะให้ $X = 0$ สำหรับค่าทั้งหมดของ X จาก $\pm \ell$ ถึง $\pm \infty$ อนึ่ง เนื่องจากค่าเขตจำกัด $\pm \ell$ นี้ไม่อาจกำหนดได้อย่างละเอียดถูกต้อง ทางที่ดีก็ให้ขยายเขตจำกัดไปถึง $\pm \infty$ แล้วกำหนดหาโค้งคาดคะเนในลักษณะที่ว่า ค่าของ Y จะมีค่าเล็กมากสักปานใดก็ได้แม้จะไม่เป็น 0 ในเมื่อ X มีค่าเพิ่มมากขึ้น

สมการโค้งคาดคะเนจะเป็นการแสดง หรือนิพจน์เชิงคณิตศาสตร์จากกฎของการคาดคะเนความเคลื่อนคลาดการรังวัด

ในสมการ (1) กล่าวมาแล้วว่า X เป็นขนาดความเคลื่อนคลาด Y คือ ความถี่ที่ความเคลื่อนคลาดนี้เกิดขึ้นเมื่อทำการรังวัดเป็นจำนวนมาก ๆ f เป็นฟังก์ชั่นที่ไม่ทราบอันหนึ่งของ X จำเป็นต้องสมมติว่าจำนวนการรังวัดมีเป็นจำนวนมาก มิฉะนั้นแล้วการจะเกิดความเคลื่อนคลาดในทาง + และ – ที่สมมติว่าสมดุลย์กันก็จะไม่สมบูรณ์ ค่าจริง X ไม่มีทางทราบได้ แต่การแจกแจงของค่ารังวัดที่ต่างจากค่าผลปานกลาง (Residuals) รอบ ๆ ค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดของการรังวัดนั้น ปรากฏว่าเป็นไป หรือดำเนินตามกฎทั่วไปเช่นเดียวกัน ดังนั้นเราจึงอาจเขียน

$$Y = f(V) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

เป็นสมการ หรือกฎเกณฑ์อันหนึ่งซึ่งค่าความต่างของค่าปานกลางกับค่ารังวัดแต่ละค่าต้องดำเนินไปตามนี้ สมการยังได้แสดง หรือนิพจน์ถึงผลคาดคะเนการเกิดของค่า "V" อีกด้วย

หากเรายอมให้พื้นที่ทั้งหมดระหว่างโค้ง และแกน X มีค่าเป็น 1 แล้ว ผลคาดคะเนที่ค่าความต่างระหว่างค่ารังวัดกับค่าปานกลางที่แน่นอนอันหนึ่งจะตกอยู่ในระหว่างเขตจำกัด

V กับ $V + dV$ จะใช้แทน หรือนิรูปด้วยพื้นที่ที่อยู่ในระหว่างโค้ง, แกน X และพิกัดตั้ง 2 เส้น คือ ที่ V กับ $V + dV$ หรืออาจนิพจน์ หรือแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$Y.dV = f(V).dV \qquad \text{...............(3)}$$

ถ้าสมมติเราทำการรังวัดมาเป็นจำนวน n ครั้ง มีน้ำหนักอย่างเดียวกันได้ผลเป็น $M_1, M_2, M_3, \ldots\ldots, M_n$ ซึ่งค่ารังวัดเหล่านี้จะทำให้เป็นฟังก์ชั่นของตัวไม่รู้ คือ $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots\ldots, Z_q$ ซึ่งได้ค่าความต่างระหว่างผลปานกลางกับค่ารังวัดแต่ละค่าเป็น $V_1, V_2, V_3, \ldots\ldots, V_n$ เมื่อเป็นเช่นนี้ผลคาดคะเนในการเกิดของค่าความต่างระหว่างผลปานกลาง การรังวัดกับค่ารังวัดแต่ละค่าจึงเป็น $f(V_1).dV, f(V_2).dV, f(V_3).dV, \ldots\ldots f(V_n).dV$

ผลคาดคะเนการเกิดพร้อม ๆ กันของค่าความต่างระหว่างค่าปานกลางของการรังวัดกับค่ารังวัดแต่ละค่า คือ ผลคูณของผลคาดคะเนแต่ละอันที่แยกจากกันนั้น นั่นคือ

$$P = f(V_1)dV \times f(V_2)dV \times f(V_3)dV \times \ldots\ldots \times f(V_n)dV \quad \text{..........(A)}$$

หรือใส่ Log ทั้ง 2 ข้างจะได้

$\text{Log } P = \text{Log } f(V_1) + \text{Log } f(V_2) + \ldots\ldots + \text{Log } f(V_n) + n \text{ Log } dV$....(B) ผลที่ต้องการสำหรับค่า $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots\ldots Z_q$ นั้น คือ ผลทั้งหลายที่การคาดคะเนการเกิดของ $V_1, V_2,$ .... มีค่าสูงสุด (Maximum)

ฉะนั้น P จะต้องมีค่าสูงสุด (Maximum)

เพื่อหาเงื่อนไขต่าง ๆ สำหรับค่าสูงสุดนี้ ต้องอาศัยวิชาการคำนวณชั้นสูง คือ ทำการหาค่าอนุพันธ์มุ่งต่อตัวเปลี่ยนหลายตัว (Partial Differentiation) แล้วให้เท่ากับ 0

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \text{ Log } P}{\partial Z_1} = \dfrac{1}{f(V_1)} \cdot \dfrac{\partial f(V_1)}{\partial Z_1} + \dfrac{1}{f(V_2)} \dfrac{\partial f(V_2)}{\partial Z_1} + \ldots + \dfrac{1}{f(V_n)} \cdot \dfrac{\partial f(V_n)}{\partial Z_2} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \text{ Log } P}{\partial Z_2} = \dfrac{1}{f(V_1)} \cdot \dfrac{\partial f(V_1)}{\partial Z_2} + \dfrac{1}{f(V_2)} \cdot \dfrac{\partial f(V_2)}{\partial Z_2} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{f(V_n)} \cdot \dfrac{\partial f(V_n)}{\partial Z_2} = 0 \\[2ex]
\text{...} \\
\text{..................................... (ถึง } q \text{ สมการ) ....}
\end{array}\right\} (4)$$

แต่เราพบว่า

$$\frac{\partial f(V)}{\partial z} = f'(V).\frac{\partial V}{\partial z}, \text{ (ซึ่ง } f \text{ คือแทนฟังก์ชั่นของ } v \text{ ใหม่)} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

เพื่อให้ง่าย และสั้นเข้าให้นำค่านี้แทน คือ

$$\frac{f'(V)}{f(V)} = F(V) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

ดังนั้นสมการ (4) จึงเป็น

$$\left.\begin{array}{l}
F(V_1).\dfrac{\partial V_1}{\partial Z_1} + F(V_2).\dfrac{\partial V_2}{\partial Z_1} + \ldots\ldots\ldots + F(V_n).\dfrac{dV_n}{\partial Z_1} = 0 \\[2ex]
F(V_1).\dfrac{\partial V_1}{\partial Z_2} + F(V_2).\dfrac{\partial V_2}{\partial Z_2} + \ldots + F(V_n).\dfrac{dV_n}{\partial Z_2} = 0 \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (ถึง } q \text{ สมการ) } \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \ldots(7)$$

สมการเหล่านี้ได้บรรจุเอาตัวไม่รู้ (Unknown Quantities) คือ Z ไว้แล้วเป็นจำนวน q ตัว ฉะนั้น ถ้ารูปของฟังก์ชั่น F ทราบ การแก้สมการเหล่านี้ย่อมจะให้ค่าของ $Z_1, Z_2, \ldots\ldots, Z_q$ เป็นค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุด

สมการข้างบนจะรักษาความเป็นจริงในทุกกรณี และเป็นรูปทั่วไปโดยสมบูรณ์ ดังนั้นจึงต้องรักษาความจริงในกรณีพิเศษใด ๆ ดังนั้นรูปของ F ที่กำหนดหาได้สำหรับกรณีพิเศษนั้นจะต้องเป็นรูปของฟังก์ชั่นสำหรับกรณีอื่นทั้งหมดด้วย

พิจารณาการรังวัดโดยตรงที่มีน้ำหนักเท่ากัน n ค่า ซึ่งทำการรังวัดต่อตัวไม่รู้ผลการรังวัดเป็น $M_1, M_2, \ldots\ldots, M_n$ และความต่างระหว่างค่าปานกลางกับค่ารังวัดแต่ละค่าเป็น $V_1, V_2, \ldots\ldots, V_n$

ค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดของ Z_1 เราได้

$$Z_1 = M_1 - V_1 = M_2 - V_2 = \ldots\ldots = M_n - V_n$$

หาค่าอนุพันธ์มุ่งต่อ Z_1

$$1 = -\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} = -\frac{\partial V_2}{\partial Z_1} = \ldots\ldots = -\frac{\partial V_n}{\partial Z_1} \quad \ldots\ldots\ldots(a)$$

นำค่าที่ได้แทนใน (4) ได้

$F(V_1) + F(V_2) + \ldots\ldots\ldots + F(V_n) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$

แต่ในกรณีพิเศษนี้

$V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\ldots\ldots + V_n = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(c)$

ดังนั้นถ้า (b) และ (c) เป็นจริง F ต้องหมายถึงการคูณด้วยตัวคงที่ตัวหนึ่ง นั่นคือ

$$F(V) = CV$$

นำค่านี้แทนในสมการ (6) และ (5) (คือ $\frac{f'(V)}{f(V)} = F(V)$ เป็น $f'(V) = f(V).CV$

นำแทน (5) ต่อไป)

$$\frac{\partial f(V)}{\partial Z} = f(V) \cdot CV \cdot \frac{\partial V}{\partial Z}$$

และ $\frac{1}{f(V)} \cdot \frac{f(V)}{Z} = CV \cdot \frac{V}{Z}$

โดยการอินติเกรต

$$\int \frac{1}{f(V)} \cdot \frac{\partial f(V)}{\partial Z} = \int CV \cdot \frac{\partial V}{\partial Z}$$

$$\text{Log } f(V) = \frac{1}{2}cv^2 + C'$$

ฉะนั้น $f(V) = e^{(\frac{1}{2}cv^2 + C')}$

เนื่องจาก $e^{C'}$ เป็นตัวคงที่ $= k$

$$\therefore f(V) = ke^{\frac{1}{2}cv^2}$$

แทนค่านี้ใน (2) ได้

$$Y = ke^{\frac{1}{2}cv^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(d)$$

จากความจริงเมื่อผลคาดคะเนของ Y ควรลดลงขณะที่ V เพิ่มขึ้น หรือถ้าพิจารณาดูโค้งความคาดคะเนปรากฏว่าค่า Y จะลดลงเรื่อย ๆ ขณะที่ V ขยับโตขึ้น ดังนั้น (d) ค่ากำลังของ e จึงควรเป็น

$$\therefore \quad Y = ke^{-\frac{1}{2}cv^2}$$

ให้ $-2h^2 = C$

$$\therefore \quad ke^{-h^2V^2} \quad (\text{หรือ } Y = \frac{k}{e^{h^2v^2}}) \qquad \ldots\ldots\ldots(8)$$

ซึ่ง h และ k ต่างก็เป็นตัวคงที่ ขึ้นอยู่กับลักษณะของการรังวัด นอกเสียจากการรังวัดทั้งหมดที่ใช้เครื่องมืออย่างเดียวกัน ใช้ความละเอียด และเครื่องมืออย่างเดียวกัน ตลอดจนสภาพของดินฟ้าอากาศ และน้ำหนักเป็นอย่างเดียวกัน (ซึ่ง h และk จะเป็น 1) สมการ (8) และหลักที่ว่าผลปานกลางเชิงเลขคณิตของค่ารังวัดเป็นค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อนั้นเป็นวิธีการของ Gauss. สมการนี้แทนกฎเกณฑ์ความน่าจะเป็น ซึ่งตามกฎเกณฑ์นี้ค่าความต่างระหว่างค่าปานกลางกับค่ารังวัดแต่ละค่าจะต้องถูกแจกแจงออกไปเพื่อให้ค่าผลคาดคะเน (P) มีค่าสูงสุด ถ้าใช้ X แทน V สมการ (8) ก็จะเป็นสมการแสดงถึงกฎการแจกแจงของความคลาดเคลื่อนที่แท้จริง คือ

$$Y = ke^{-h^2x^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

ข้อควรสังเกตที่สำคัญ คือว่า กฎเกณฑ์การแจกแจงความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญย่อมจะรักษาความจริงข้อนี้ในที่สุด การจะให้รักษากฎเกณฑ์ตามทฤษฎีดังกล่าวเพื่อให้ได้ผลจากการรังวัดนั้น จำเป็นต้องเพิ่มการรังวัดให้มีเป็นจำนวนมาก สำหรับในการรังวัดที่จำกัดอันหนึ่งนั้นเราเพียงแต่คาดคิดเอาว่าค่าความต่างระหว่างค่าปานกลางกับค่ารังวัดเป็นไปตามกฎเกณฑ์คาดคะเนอย่างประมาณเท่านั้น

2. ข้อพิจารณาโค้ง $Y = ke^{-h^2x^2}$

เนื่องจากค่าของ X ที่เป็น + และ – มีจำนวนเท่ากันของ Y โค้งจึงเป็นลักษณะคล้ายกับภาคขวา และซ้ายของแกน Y

ค่า Y สูงสุดเมื่อ X = 0 ซึ่งจะได้ Y = k ดังนั้น k จึงเป็นผลคาดคะเนความคลาดเคลื่อน 0

เมื่อ X มีจำนวนเพิ่มขึ้น Y กลับลดลง และเมื่อ $X = \infty$, $Y = 0$ ฉะนั้นค่าอนุพันธ์ครั้งที่ 1 คือ

$$\frac{dY}{dX} = -2kh^2e^{-h^2x^2} . X \qquad \text{.....................(10)}$$

ซึ่งเมื่อ $X = 0$ (10) ก็จะกลายเป็น 0 ไปด้วย และเมื่อ $X = \pm\infty$ แสดงว่าโค้งกลับขนานกับแกน X ฉะนั้นแกน X จึงเป็นแกนแสดงเขตจำกัดของโค้ง (Asymptote) และจาก (10) อนุพันธ์ครั้งที่ 2 ได้

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -2kh^2e^{-h^2x^2}(-2h^2X^2 \pm 1) \qquad \text{.....................(11)}$$

ให้ (11) กลายเป็น 0

$$-2h^2X^2 + 1 = 0$$

$$x = \pm\frac{1}{h\sqrt{2}}$$ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงโค้งมีจุดหันเหของโค้ง (Inflection-point) ตรง $X = \pm\frac{1}{h\sqrt{2}}$

เพื่อแสดงให้เห็นต่อไปถึงรูปของโค้ง เมื่อให้ h และ k เป็น 1 จะได้ค่าของ Y ดังนี้ โดยสมมุติให้ X มี X มีค่า = 0 และเพิ่มขึ้นเป็น ± 0.2

$$\therefore\ Y = e^{-x^2} = \frac{1}{eX^2}$$

X	Y	X	Y
.0	1.0000	± 1.6	0.0773
± 0.2	0.9608	± 1.8	0.0392
± 0.4	0.8521	± 2.0	0.0183
± 0.6	0.6977	± 2.2	0.0079
± 0.8	0.5273	± 2.4	0.0032
± 1.0	0.3679	± 2.6	0.0012
± 1.2	0.2370	± 3.0	0.0001
± 1.4	*0.1409*	± ∞	0.0000

ตามรูปข้างต้นถ้าสร้างโค้งด้วยค่าในตารางนี้ มาตราส่วนทางดิ่งเป็น 2 เท่าทางระดับ C คือ จุดหันเหของโค้ง ซึ่งแกนราบ OM = 0.707

ข้อควรสังเกต ตัวคงที่ h คือ ค่าจำนวนหนึ่งซึ่งเป็นค่าชนิดเดียวกับ $\frac{1}{X}$ (ส่วนกลับ) เนื่องจาก h^2X^2 เป็นจำนวนไม่มีรูปอันหนึ่ง หรือเป็นแนวความคิดจากที่เชื่อถือกันจากกรณีพิเศษทั้งหลาย ผลคาดคะเนของความเคลื่อนคลาดที่กำหนดไว้ X นั้นลดลง ขณะที่ h เพิ่มขึ้น ฉะนั้น การรังวัดยิ่งประณีตมีความละเอียดสูง h ก็ยิ่งสูงยิ่งขึ้น โดยเหตุนี้เราอาจเรียก h นี้ว่า "มาตราวัดความละเอียด"

ทำนองเดียวกัน k เป็นจำนวนไม่มีรูป และเป็นตัวผลคาดคะเนของความคลาดเคลื่อน 0 ผลคาดคะเนจะสูงยิ่งขึ้นหากการรังวัดนั้นดีกว่าการรังวัดที่ไม่ค่อยจะมีความละเอียดยิ่ง การรังวัดกระทำด้วยความประณีตดีเยี่ยม ตัวคาดคะเน (k) ก็ยิ่งมีมากขึ้น

3. การคำนวณค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุด

จากสมการ **(A)** เราพบว่า

$P = f(V_1) \times f(V_2) \times f(V_3) \times \dots \dots \times f(V_n)(dV)^n =$ มีค่าสูงสุด .... **(12)**

เมื่อนำเอา **(8)** มาพิจารณาจะได้

$P = ke^{-h^2}[f(V_1)]^2 \times ke^{-h^2}[f(V_2)]^2 \times \dots \dots \times ke^{-h^2}[f(V_n)]^2(dV)^n =$ มีค่าสูงสุด.......... **(13)**

$P = ke^{-h^2(v_1^2+v_2^2+ \dots +v_n^2)}(dV)^n =$ มีค่าสูงสุด .... **(14)**

ปรากฏชัดว่า **P** จะมีค่าสูงสุดนั้นต่อเมื่อ

$\sum^{n} v_1^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots \dots + V_n^2 =$ มีค่าตำสุด .... **(15)**

นั่นคือ ผลรวมของค่าความต่างระหว่างค่าปานกลางของการรังวัดกับค่ารังวัดแต่ละค่ายกกำลังสองจะมีค่าต่ำสุด

จากสมการ (7) แสดง หรือนิพจน์เงื่อนไขต่าง ๆ ที่จำเป็นเพื่อทำให้ P มีค่าสูงสุดหรือทำให้ผลรวมค่าความต่างระหว่างค่าปานกลางการรังวัดกับค่ารังวัดแต่ละค่ายกกำลังสองแล้วมีค่าต่ำที่สุด และไม่มีวิธีอื่นใดที่จะทำให้เงื่อนไขเป็นไปตามนี้

เนื่องจากในสมการ (7) นั้น ฟังก์ชั่น F หมายถึงการคูณโดยตัวคงที่ตัวหนึ่ง โดยเหตุนี้สมการ (7) จึงเป็น

$$V_1\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} + V_2\frac{\partial V_2}{\partial Z_1} + \ldots\ldots\ldots + V_n\frac{\partial V_n}{\partial Z_1} = 0$$

$$V_1\frac{\partial V_1}{\partial Z_2} + V_2\frac{\partial V_1}{\partial Z_2} + \ldots\ldots\ldots + V^n\frac{\partial V_n}{\partial Z_2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

....

$$V_1\frac{\partial V_1}{\partial Z_2} + V_2\frac{\partial V_2}{\partial Z_2} + \ldots\ldots\ldots + V_n\frac{\partial V_1}{\partial Z_2} = 0$$

สมการต่าง ๆ ใน (16) มีจำนวนสมการจาก $1 \longrightarrow q$ ซึ่ง $Z_1, Z_2, \ldots\ldots, = 0$ Z_q เป็นจำนวนที่ไม่ทราบ และถ้าหาค่า Z ออกมาทุกตัวได้ขณะเดียวกัน ก็จะได้ค่าของตัวไม่รู้ที่คาดคะเนว่าน่าเชื่อที่สุด

เราเรียกสมการต่าง ๆ ใน (16) นั้นว่าเป็น "สมการปกติ" (Normal Equations) และหลักค่ากำลังสองต่ำสุดถือหลักเกณฑ์ที่ว่า "ระบบของค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดของค่าตัวไม่รู้นั้น คือ หลักเกณฑ์ที่ทำให้ผลรวมของค่าความต่างระหว่างค่ารังวัดแต่ละค่ากับผลปานกลางของการรังวัดเมื่อยกกำลังสองแล้ว จะมีค่าต่ำสุด"

เมื่อได้พิจารณา (16) ย่อมแสดงให้เห็นว่าสมการได้แสดงเงื่อนไขต่าง ๆ ซึ่งจะทำให้ค่าความต่างระหว่างค่ารังวัดแต่ละค่ากับค่าของผลปานกลางการรังวัดเมื่อยกกำลังสองรวมกันจะมีค่าต่ำสุด ในการปรับค่ารังวัดสมการ (16) ถือเป็นสมการหลัก

เพื่อให้ได้รับค่าคาดคะเนของตัวไม่รู้ที่น่าเชื่อที่สุดในชุดใด ๆ ของการรังวัด จำเป็นที่จะต้องประกอบสมการปกติขึ้นทั้งหมดสำหรับชุดการรังวัดนั้นแล้วหาค่าตัวไม่รู้ออกมาพร้อม ๆ กัน

4. การรังวัดเชิงถ่วงน้ำหนัก

หากการรังวัดมีน้ำหนักต่างกัน สมการรังวัดแต่ละค่าควรจะถือหลักจำนวนครั้งของการรังวัดเป็นสำคัญ ซึ่งจำนวนครั้งการรังวัดนี้เราเรียกน้ำหนัก (Weight) ฉะนั้น ในการประกอบสมการปกติเราจึงควรคูณสมการแต่ละสมการด้วยสัมประสิทธิ์ของตัวไม่รู้ และคูณด้วยน้ำหนักของสมการ เราจะได้สมการปกติเชิงถ่วงน้ำหนักดังนี้

$$\left.\begin{array}{l}
P_1V_1\dfrac{\partial_1}{\partial Z_1} + P_2V_2\dfrac{\partial V_2}{\partial V_1} + \dots\dots\dots + P_nV_n\dfrac{\partial V_n}{\partial Z_1} = 0 \\[2ex]
P_1V_1\dfrac{\partial_1}{\partial Z_2} + P_2V_2\dfrac{\partial V_2}{\partial V_2} + \dots\dots\dots + P_nV_n\dfrac{\partial V_1}{\partial Z_2} = 0 \\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[2ex]
P_1V_1\dfrac{\partial_1}{\partial Z_q} + P_2V_2\dfrac{\partial V_2}{\partial Z_q} + \dots\dots + P_nV_n\dfrac{\partial V_1}{\partial Z_q} = 0
\end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots(17)$$

ตามหลักทั่วไปค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อของตัวไม่รู้ q ตัว คือ $Z_1, Z_2, Z^3,$ Zq คือ ค่าที่ทำให้

$$P_1V_1^2 + P_2V_2^2 + P_3V_3^2 \dots\dots\dots + P_nV_n^2 = \text{มีค่าต่ำสุด (A Minimum)}$$

ฉะนั้น สำหรับการประกอบสมการปกติในการรังวัดเชิงถ่วงน้ำหนักที่เป็นฟังก์ชั่นชนิดกำลัง 1 หรือฟังก์ชั่นเส้นตรงของตัวไม่รู้ เรามีกฎดังนี้

กฎ สำหรับการรังวัดแต่ละด้าน ให้เขียน "สมการรังวัด" (Observation Equation) แล้วสำหรับทุกตัวไม่รู้ ให้เขียน หรือประกอบสมการปกติ โดยคูณตัวแรกในแต่ละสมการโดยสัมประสิทธิ์ของตัวไม่รู้ให้กับสมการนั้น แล้วคูณด้วยน้ำหนักของสมการนั้น รวมผลแล้วกำหนดให้ผลบวกเท่ากับ 0 แล้วแก้สมการนี้พร้อม ๆ กัน

ถ้าเราใช้คูณสมการรังวัดแต่ละอันด้วยสูตรที่ 2 ของน้ำหนักของแต่ละสมการ เพื่อตัดทอนค่าการรังวัดจากน้ำหนัก 1 หน่วย (น้ำหนักเท่ากัน)

5. ความสัมพันธ์ระหว่าง h กับ P

หากได้ทำการรังวัดสิ่งใดมา n ครั้งด้วยน้ำหนัก $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$ และจำนวนค่า h เป็น $h_1, h_2\, h_3, \ldots\ldots, h_n$ แล้ว สมการ (14)จะเป็น

$$P = k_1 e^{-h_1^2 v_1^2} . k_2 e^{-h_2^2 v_2^2} \ldots\ldots k_n e^{-h_n^2 v_n^2} (dV)^n$$

$$= k_1 k_2 k_3 \ldots k_n e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \;\; + h_n^2 v_n^2)}\, (dV)^n \qquad \ldots\ldots (18)$$

ชุดค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดของตัวไม่รู้ คือ ค่าที่ทำให้ P มีค่าสูงสุด (Maximum) และ P จะมีค่าสูงสุดได้เมื่อ

$h_1^2 V_1^2 + h_2^2 V_2^2 + h_3^2 V_3^2 + \ldots + h_n^2 V_n^2 =$ มีค่าต่ำสุด (Minimum)

เงื่อนไขต่าง ๆ สำหรับให้การแสดง หรือนิพจน์นี้เป็นค่าต่ำสุดมีดังต่อไปนี้ คือ สมการปกติต้องมีรูปเป็น

$$h_1^2 V_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} + h_2^2 V_2 \frac{\partial V_2}{\partial Z_1} + h_3^2 V_3 \frac{\partial V_3}{\partial Z_1} + \ldots + h_n^2 V_n \frac{\partial V_n}{\partial Z_1} = 0$$

$$h_1^2 V_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_2} + h_2^2 V_2 \frac{\partial V_2}{\partial Z_2} + h_3^2 V_3 \frac{\partial V_3}{\partial Z_2} + \ldots + h_n^2 V_n \frac{\partial V_n}{\partial Z_2} = 0 \qquad \ldots\ldots (19)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_1^2 V_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_q} + h_2^2 V_2 \frac{\partial V_2}{\partial Z_q} + h_3^2 V_3 \frac{\partial V_3}{\partial z_q} + \ldots + h_n^2 V_n \frac{\partial V_n}{\partial Z_q} = 0$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (17) กับ (19) เป็นอันเดียวกัน คือ เป็น "สมการปกติ" (Normal Equations) และเมื่อเป็นเช่นนี้

$$P_1 : P_2 : P_3 : \ldots\ldots : P_n = h_1^2 : h_2^2 : h_3^2 : \ldots : h_n^2 \qquad \ldots .(20)$$

นั่นคือ h ยกกำลังสองได้ส่วนสัมพันธ์กับน้ำหนักการรังวัด อย่างไรก็ตามเมื่อ h มีค่าเพิ่มขึ้นโดยเพิ่มความละเอียด ประณีตในการรังวัดให้สูงขึ้นไป ดังนั้น "h" จึงเรียกว่าเป็น "มาตรวัดความละเอียดของงาน"

6. ความละเอียดในการรังวัด

ในการปรับค่าการรังวัด จำเป็นต้องเอาการรังวัดที่มีขั้นความละเอียดต่าง ๆ กันมาผสมกัน ในกรณีนี้จะต้องนำเอาน้ำหนักมาพิจารณา เมื่อค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อ หรือค่านั้นได้รับการปรับแก้แล้ว ทางที่ดีก็คือ เราต้องการจะรู้ขั้นความเชื่อมั่นที่จะพึงมีแก่ค่าเหล่านั้น ดังนั้นอาจกระทำการเปรียบเทียบกับค่าที่ได้รับจากสภาวะการอื่น ๆ การเปรียบเทียบการรังวัดเป็นส่วนสำคัญมากอันหนึ่งของ "วิธีอนุจัตุรัส"

จากสมการ (10) เราพบว่ามีตัวคงที่ 2 ตัวที่ต้องการหาสำหรับชุดการรังวัดเฉพาะอันใดอันหนึ่ง ตัวคงที่สองตัวนี้เป็นตัวคงที่ที่ไม่เป็นอิสระซึ่งจะได้แสดงต่อไป พื้นที่ทั้งหมดระหว่างโค้งแกน X ให้กับเท่า 1 ดังนั้น

หรือ $$\int_{-\infty}^{+\infty} Y = k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} dX = 1$$

$$k \int_{0}^{\infty} e^{-h^2x^2} .dX = \frac{1}{2}$$

หรือนำ h คูณทั้ง 2 ข้าง

$$\int_{0}^{\infty} e^{-h^2x^2} h.dX = \frac{h}{2k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

ให้ $t = hX$, $\therefore dt = h.dX$ และเมื่อ $X = \infty$, $t = \infty$ และ $x = 0$, $t = 0$ นำค่า h แทน (21) ภาคซ้าย

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-t^2}.dt = \int_0^{\infty} e^{-h^2X^2} h.dX \quad . \quad . \quad . \quad .(22)$$

ให้ $t = h,\ t^2 = h^2$ และ $dh = dt$ ดังนั้น

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}.dt = \int_0^{\infty} e^{-h^2}.dh \quad ....(23)$$

เอา (23) นำภาคซ้ายคูณภาคซ้าย และภาคขวาคูณภาคขวาใน (22) ได้

$$\left[\int_0^{\infty} e^{-t^2}.dt\right]^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-h^2X^2}.e^{-h^2}.h.dX.dh$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-h^2(X^2+1)}.h.dX.dh \quad ,........(A)$$

ให้ $V = -h^2(X^2 + 1)$, $\therefore dV = -2h(X^2 + 1)dh$ ดังนั้นใน (A)

$$\left[\int_0^{\infty} e^{-t^2}.dt\right]^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{e^{-V}.h.dX.dV}{2h(X^2 + 1)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dX}{(X^2 + 1)} \int_0^{\infty} e^{-V}.dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dX}{(X^2 + 1)}.\left[e^{-V}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dX}{(X^2 + 1}.\left[e^{-h^2(X^2+1)}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dX}{X^2 + 1}\left[0 - 1\right] = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dX}{X^2 + 1}$$

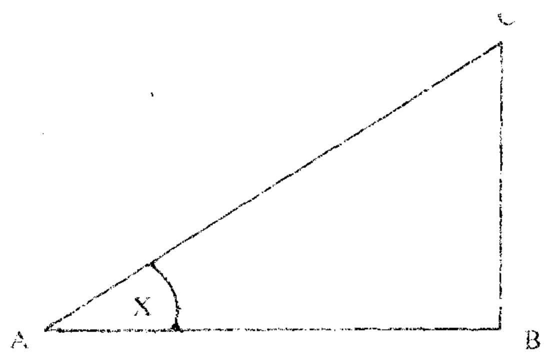
$$= \frac{1}{2}\left[\text{Arc}\tan X\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}X\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

[ขยาย Arctan X หรือ สัญลักษณ์เป็น $\tan^{-1}X$]

จากวิชาตรีโกณมิติเราทราบแล้วว่า "ด้านตรงข้ามหารด้วยด้านประชิดเท่ากับ tan ของมุมอยู่ตรงข้ามกับด้านตรงข้ามมุมนั้น" ในรูป



รูป [illegible]

$$\frac{BC}{AB} = \tan X$$

ซึ่ง X คือส่วนโค้ง หรือมุมที่ทำให้ $\frac{BC}{AB}$ มีค่าเป็นเลขจำนวนหนึ่ง เราเรียกว่าเป็นการเปรียบเทียบระหว่างค่า BC กับ AB

ถ้า X = 30° 30° ก็คือ ส่วนโค้ง หรือมุมที่ทำให้ด้าน BC หารด้วย AB มีค่า = 0.5774

เราเรียก 30° เป็น Arctan ที่ทำให้ค่า tan X มีค่า = 0.5774 หรือเราเขียนสั้น ๆ ว่า $\tan^{-1}X$ แทน Arctan X นั่นเอง]

$$\left[\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}.dt\right]^2 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{............(24)}$$

จาก (24) นี้ถ้าถอดกรณฑ์ภาคขวาออกก็สามารถหาค่าของ k และ h ได้โดยง่าย คือ

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}.dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{..................(25)}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}.dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ มีค่าเท่ากันกับ (2 1)

ฉะนั้น เมื่อเป็นเช่นนี้ ให้นำค่านี้แทนใน (21) จะได้

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{h}{2k}$$

$$k = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \quad \text{หรือ} \quad h = k.\sqrt{\pi}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่าง k กับ h ฉะนั้น (8) และ (9) จึงเขียนได้

$$Y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} .e^{-h^2V^2} \qquad \text{..................(26)}$$

และ

$$Y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} .e^{h^2X^2} \qquad \text{..............(27)}$$

7. ผลปานกลางความเคลื่อนคลาด หรือการเบี่ยงเบนเฉลี่ย

การเบี่ยงเบนเฉลี่ย (Average Deviation) จะใช้อักษรย่อว่า a.d. จากที่เคยกล่าวมาแล้ว ส่วนเบี่ยงเบนจากผลปานกลางของการรังวัดถ้ารวมกันจะเท่ากับ 0 คือ $\sum_{i}^{n} Vi = 0$ ซึ่งไม่

สามารถจะหาผลเฉลี่ยใด ๆ ได้ ฉะนั้น "การเบี่ยงเบนเฉลี่ยก็คือใช้ผลปานกลางของมัชฌิมเลขคณิตของความเคลื่อนคลาด หรือส่วนเบี่ยงเบนของค่ารังวัดแต่ละค่าต่างจากผลปานกลางนั่นเอง"

จากผลคาดคะเนเราพบว่าความเคลื่อนคลาดที่แท้จริงของการรังวัดอันหนึ่งต่างไปจากตัวไม่รู้จะตกอยู่ระหว่างแกน X และ X + dX คือ

$$f(X).dX$$

หากทำการรังวัดมา n ครั้ง จำนวนความเคลื่อนคลาดที่ตกอยู่ระหว่างเขตจำกัดเหล่านี้ คือ

$$nf(X).dX$$

ฉะนั้น ผลร่วมของความเคลื่อนคลาดการรังวัดทั้งหมด คือ

$$n \int_{-\infty}^{\infty} Xf(X).dX = 2n \int_{0}^{\infty} Xf(X).dX$$

นำ n หารตลอดจะได้

$$\int_{\infty}^{\infty} Xf(X).dX \quad 2 \int_{0} Xf(X).dX = \text{a.d.}$$

$$\text{a.d.} \qquad 2 \int_{0}^{\infty} Xf(X).dX = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} .e^{-h^2X^2}.X.dX$$

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}\ \pi} \int_{0}^{\infty} e^{-h^2X^2}.X.dX$$

ให้ $V = - h^2X^2$, $dV = \quad 2h^2X.dX$ หรือ $dX = - \frac{dV}{2h^2X}$ นำแทนข้างบน

$$\text{a.d.} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{2h^2} \int_{0}^{\infty} e^{v} .dV$$

$$= \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \left[e^{-h^2X^2} \right]_0^{\infty}$$

$$\text{a.d.} = - \frac{1}{h\sqrt{\pi}} [0 - 1] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \qquad \text{........(28)}$$

8. ความเคลื่อนคลาดยกกำลังสองปานกลาง

ความเคลื่อนคลาดยกกำลังสองจะทำให้ค่าที่เป็นลบกลายเป็นบวกไปทั้งหมด และผลปานกลางของความเคลื่อนคลาดยกกำลังสองของการรังวัดนี้จะใช้แทนด้วย μ

คำว่าความเคลื่อนคลาดยกกำลังสองปานกลาง คือ "กรณีที่ 2 ผลปานกลางหรือมัชฌิมเลขคณิตของผลรวมความเคลื่อนคลาดแต่ละอันยกกำลังสอง"

จากที่กล่าวมาแล้ว จำนวนของความเคลื่อนคลาดทั้งหมดเป็น n จำนวนความเคลื่อนคลาดที่ตกอยู่ระหว่าง X และ X + dX คือ

$$nf(X).dX$$

ผลรวมของกำลังสองของความเคลื่อนคลาดเหล่านี้เป็น

$$nX^2f(X).dX$$

ฉะนั้น ผลรวมของกำลังสองของความเคลื่อนคลาดทั้งหมดจึงได้

$$n \int_{-\infty}^{\infty} X^2f(X) \,.\, dX = 2n \int_0^{\infty} X^2f(X).dX$$

$$\therefore \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 .f(X).dX$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2X^2}.X^2 .dX \qquad \text{........(29)}$$

แต่ได้กล่าวมาแล้วว่า

$$k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2X^2}.dX \quad \text{หรือ} \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2X^2}.dX = 1$$

หรือ

$$\int e^{-h^2X^2}.dX = \frac{\sqrt{\pi}}{h} \qquad .(30)$$

โดยหาค่าอนุพันธ์จาก (30) มุ่งต่อ h จะได้

$$\frac{d}{dh} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2X^2}.dX = \sqrt{\pi} \frac{dh^{-1}}{dh} = -\frac{\sqrt{\pi}}{h^2}$$

$$-2h \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2X^2}.X^2.dX = -\frac{\sqrt{\pi}}{h^2}$$

หรือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2X^2}.X^2.dX = \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3}$$

นำแทน (29) ได้

$$\mu^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3}$$

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}} \qquad ....(31)$$

9. ความเคลื่อนคลาดคาดคะเน

ความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของการรังวัดอันหนึ่งใช้สัญลักษณ์เป็น r ในการปรับค่าการรังวัดมีความจำเป็นต้องผสมการรังวัดที่มีชั้นความละเอียดแตกต่างจากกัน และในกรณีเช่นนั้น จำเป็นต้องนำเอาน้ำหนักเข้ามาพิจารณาด้วย เมื่อค่าที่ได้มีการปรับตามหลักเกณฑ์เรียบร้อย ค่านั้นก็เป็นค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุด และเช่นเดียวกันเราอยากรู้อีกด้วยว่าชั้นความเชื่อมั่นในผลที่ได้ค่าเหล่านั้นมีสูงแค่ไหนเพียงไร เหตุนี้อาจต้องนำเอาค่าที่ได้ในสภาวการณ์ต่าง ๆ นั้นมาเปรียบเทียบกันดู การเปรียบเทียบดังกล่าวนับเป็นส่วนสำคัญส่วนหนึ่งของวิธี

หาค่ากำลังสองต่ำสุด หรืออนุจัตุรัสวิธี เนื่องจากการทราบค่า และความละเอียดของการรังวัดนั้นเป็นสิ่งที่เราต้องการ เพื่อการใช้ประโยชน์จากสิ่งที่ทราบนั้นให้ได้เปรียบที่สุด และยิ่งกว่านั้นการศึกษาความละเอียดการรังวัดยังจำเป็นเสมอที่จะปรับปรุงให้ระเบียบวิธีการรังวัดดี และสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

จำนวนที่เลือกขึ้นโดยปกติเพื่อเปรียบเทียบความละเอียดการรังวัด คือ "ความเคลื่อนคลาดคาดคะเน (Probable Error)" ซึ่งจะให้คำนิยามต่อไปนี้

ในชุด หรืออนุกรมใด ๆ ของความเคลื่อนคลาด "ความเคลื่อนคลาดคาดคะเนที่มีต่อค่าความเคลื่อนคลาดที่น่าเชื่ออันหนึ่ง คือ จำนวนความเคลื่อนคลาดที่โตกว่ามันย่อมมีจำนวนเท่ากับจำนวนความเคลื่อนคลาดที่เล็กกว่ามัน" หรืออาจพูดได้อีกอย่างหนึ่งที่เหมาะ และเข้าใจง่ายขึ้น คือว่า "ความเคลื่อนคลาดที่ได้มาจากการสุ่ม ๆ หรือเดาเอานั้นจะเป็นความเคลื่อนคลาดที่โต หรือเล็กกว่าค่าความเคลื่อนคลาดคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดนั้น"

ฉะนั้น ในชุด หรืออนุกรมใด ๆ ของความเคลื่อนคลาดย่อมโต และเล็กกว่าค่าความเคลื่อนคลาดคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดไปทั้ง 2 ข้างเท่ากัน หรือครึ่งหนึ่งไปในทาง + และอีกครึ่งหนึ่งไปในทาง − นั่นคือ ผลคาดคะเนที่จะทำให้โตกว่า r ย่อมเท่ากับผลคาดคะเนที่จะทำให้ความเคลื่อนคลาดเล็กกว่า r

ผลคาดคะเนซึ่งความเคลื่อนคลาดอันหนึ่งของการรังวัดจะตกอยู่ระหว่างเขตจำกัด X และ X + dX ก็คือ f(X).dX ผลคาดคะเนที่ความเคลื่อนคลาดจะตกอยู่ระหว่างเขตจำกัด + r และ − r จะได้ดังนี้

$$P = \int_{-r}^{+r} f(X)dX = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+r} e^{-h^2X^2}.dX$$

(ตามคำนิยามดังกล่าว) .... (32)

ถ้าให้ $P = \frac{1}{2}$ หรือ 0.5 จึงได้ $\frac{1}{2} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{-r}^{+r} e^{-h^2X^2}.dX$

ในการอินติเกรต (Integrate) ให้ t = hX เมื่อ X = 0, t = 0 และเมื่อ X = r, t = hr และ $dX = \frac{dt}{h}$

(32) จึงเป็น $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr} e^{-t^2}.dt = \frac{1}{2}$ ....(33)

ใน (33) เมื่อ t มีขนาดเล็กอาจกระจายอนุกรมของ e^{-t^2} ออกไป แล้วอินติเกรตเป็นเทอม ๆ ไปตามลำดับซึ่งจาก Maclaurin's Theorem เราได้

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \int_0^t e^{-t^2}.dt = \int_0^t \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{\lfloor 2} - \frac{t^6}{\lfloor 3} + \ldots\ldots\right)dt$$

$$= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5\lfloor 2} - \frac{t^7}{7\lfloor 3} + \ldots\ldots\ldots$$

ค่านี้เราจะทำเป็นตารางสำเร็จไว้ (ดูตาราง 2 - 3) เป็นตารางผลคาดคะเนโดยใช้ t หรือ hr เป็น Argument

ใน (33) เมื่อ P = 0.5 เราจะได้ hr = 0.4769 มีวิธีคำนวณหาดังจะได้กล่าวต่อไปนี้

ในตารางใช้ hr เป็น Argument โดยดูที่ P = 0.5 แถวราบมีเลข 0, 1, 2,, ...9 และมีตัวเลขแสดงผลคาดคะเนความเคลื่อนคลาด (P) อยู่ในที่นี้ P = 0.5 ฉะนั้นตัวเลขนี้จึงอยู่ระหว่าง 0.4937 กับ 0.3027 และตรงกับ hr = 0.47 .... เศษ

โดยเทียบหา hr ถือ P = 0.5 (ซึ่ง 0.5000 – 0.4937 = 0.0063)

hr = 0.48 p = 0.5027 ดูตรงเลข 8 กับ 7 ในแถวราบที่

hr = <u>0.47 P = 0.4937</u> hr = 0.4

diff. hr = 0.01 diff. p = 0.0090 ≈ 0.0091 (ซึ่งเฉลี่ยหาไว้แล้วในตาราง = 92)

∴ diff. P ≈ 0.0091 ได้ diff. hr = 0.01

diff. P = 0.0063 ได้ diff. hr $= \frac{0.01 \times 0.0063}{0.0091} = 0.00694$

ตรง P = 0.500 จึงได้ hr = 0.4700 + 0.0069 = 0.47694

$$\therefore \quad r = \frac{0.47694}{h} \qquad \text{................(34)}$$

(34) ให้ความสัมพันธ์ระหว่างการรังวัดที่มีความละเอียด h และความเคลื่อนคลาดคาดคะเน r และจะเห็นว่า h แปรเปลี่ยนผกผันกับ h

สมมุติให้ $\varrho = 0.47694$ ....แล้ว

$$r = \frac{\varrho}{h} \qquad \text{................(35)}$$

และ (28) $h = \dfrac{1}{a.d.\sqrt{\pi}}$ นำแทน (35) จะได้

$$r = \varrho.a.d.\sqrt{\pi}$$

$$= 0.47694 \times \sqrt{3.1415} \times a.d.$$

$$= 0.8453 \text{ a.d.} \qquad \text{................(36)}$$

และจาก (31) $\mu = \dfrac{1}{h\sqrt{2}}$

หรือ $\dfrac{1}{h} = \mu\sqrt{2}$

นำค่านี้แทนใน (34) ได้

$$r = 0.47694 \times \sqrt{2}\,.\mu$$

$$= 0.47694 \times 1.4141\,\mu$$

$$\therefore \quad r = 0.6745\,\mu \qquad \text{................(37)}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของ μ, r, a.d. และ h อาจนิพจน์ได้อย่างเหมาะสม หรือสะดวกต่อการพิจารณาดังนี้

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{1}{h} = \mu\sqrt{2} = a.d.\sqrt{\pi} \qquad \text{..............(38)}$$

หรือจัดเรียงเป็นรูปตารางดังนี้

	μ	r	a.d.
μ	1.0000	1.4826	1.2533
	0.6745	1.0000	0.8453
a.d.	0.6919	1 1829	1 . 0000

[คือ เมื่อ μ = 1.0000 จะได้ (37) r = 0.6745 และเมื่อนำ r นี้แทนใน (36) จะได้ a.d. = 0.7979 และเมื่อ r = 1.0000 μ จะได้ = .14826 a.d. = 1.1829 ในกรณีที่ r = 0.8453 μ จะได้ = 1.2533 และ a.d. จะเท่ากับ 1.0000 เป็นต้น]

ใน (38) เมื่อความเคลื่อนคลาดยกกำลังสองปานกลาง (μ) โตที่สุดนั้นจะทำให้ความเคลื่อนคลาดคาดคะเน (r) มีค่าเล็กที่สุด และจากข้างบนนี้จะพบว่า

$$\mu > a.d. > r \qquad \text{.............(39)}$$

อนึ่ง ใน (20) ปรากฏว่า $P \propto h^2$ (น้ำหนักย่อมแปรเปลี่ยนตาม h^2) ใน (38) ถ้าเราไม่คำนึงถึงตัวคงที่เราจะได้

$$h^2 = \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{(a.d.)^2} = \frac{1}{r^2} \qquad \text{.............(40)}$$

ฉะนั้น

$$P \propto \frac{1}{\mu^2} \propto \frac{1}{(a.d.)^2} \propto \frac{1}{r^2} \propto h^2 \qquad \text{.............(41)}$$

นั่นคือ "น้ำหนักของการรังวัดต่าง ๆ ต่อจำนวนหนึ่งนั้นย่อมแปรเปลี่ยนเชิงผกผันหรือเป็นส่วนกลับกันกับความเคลื่อนคลาดปานกลางยกกำลังสอง, ความเบี่ยงเบนเฉลี่ยยกกำลังสอง และความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของมันยกกำลังสอง"

การนำเอา (41) ไปใช้ในการเปรียบเทียบความละเอียดของการรังวัดมีที่ใช้กว้างขวาง และสำคัญยิ่ง และนำไปใช้กับจำนวนที่มีน้ำหนักอย่างเดียวกัน จำนวนเดียวกัน

10. ความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของมัชฌิมเลขคณิต

ให้ $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ เป็นการรังวัดโดยตรงต่อสิ่งหนึ่ง น้ำหนักการรังวัดแต่ละค่าเท่ากัน คือ มีค่าเท่ากับ 1 และน้ำหนักของมัชฌิมเลขคณิต หรือผลปานกลางการรังวัดเป็น n

ให้ r เป็นความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของการรังวัดแต่ละค่า และ μ_o เป็นความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของผลปานกลางการรังวัด จากผล (41) เราจะได้

$$n : 1 :: \frac{1}{\mu_o^2} : \frac{1}{r^2} : \frac{1}{\mu^2}$$

ซึ่งอาจเขียนได้

$$n = \frac{r^2}{\mu_o^2}$$

$$\mu_o = \frac{r}{\sqrt{n}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(42)$$

หรือ **"ความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของผลปานกลาง หรือมัชฌิมเลขคณิตของการรังวัดนั้น ย่อมเท่ากับความเคลื่อนคลาดคาดคะเนการรังวัดแต่ละค่า หารด้วยกรณฑ์ที่ 2 ของจำนวนการรังวัด"**

ฉะนั้นความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของผลปานกลางลดลงขณะที่ $\sqrt{n}$ เพิ่มขึ้นซึ่งดูได้จาก (42) ถ้าทำการรังวัดต่อสิ่งนั้นมา 10 ครั้ง ได้ค่าความเคลื่อนคลาดคาดคะเนที่แน่นอนมาอันหนึ่งสำหรับผลปานกลางของการรังวัด เมื่อต้องการลดค่าความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของผลปานกลางการรังวดันั้นลงถึง $\frac{1}{2}$ หรือครึ่งหนึ่งจะต้องทำการรังวัดถึง 40 ครั้ง

11. การหา r, μ_o

ความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของการรังวัดแต่ละครั้ง (r) ให้พิจารณากฎเกณฑ์หลักของผลคาดคะเนความเคลื่อนคลาด (27)

$$Y = f(X).dX \quad (\text{ซึ่ง } k = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \text{ และ } Y = \text{ ผลคาดคะเน})$$

$$= h.\pi^{-\frac{1}{2}}.e^{-h^2x^2}.dX \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(43)$$

จากเหตุการณ์เชิงผสมเราได้ผลคาดคะเนการเกิดของความเคลื่อนคลาดอิสระ $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ดังนี้

$$P = h\pi^{-\frac{1}{2}}.e^{-h^2x^2}.dX \times h\pi^{-\frac{1}{2}}.e^{-h^2x^2}.dX \qquad \ldots\ldots\ldots \text{ถึง } n \text{ ครั้ง}$$

$$= h^n \pi^{-\frac{n}{2}} . e^{-h^2 \Sigma X^2} (dX)^n \qquad ....(44)$$

ต่อไปนี้ระบบของความเคลื่อนคลาดที่กำหนดให้นั้น ค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อของ h มากที่สุด ก็คือว่า ผลคาดคะเนของ h ต้องสูงสุด หรือ h ต้องเป็นค่าหนึ่งที่ทำให้ P เป็นค่าสูงสุด (Maximum) โดยหาค่าอนุพันธ์ชั้นที่ 1 มุ่งต่อ h แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0 จะได้

$$\frac{dP}{dh} = \pi^{-\frac{n}{2}} (dX)^n \left[h^n \frac{d}{dh} . e^{-h^2 \Sigma X^2} + e^{-h^2 \Sigma X^2} . \frac{d h^n}{dh} \right]$$

$$= \pi^{-\frac{n}{2}} . (dX)^n \left[h^n e^{-h^2 \Sigma X^2} . (-2h) \Sigma X^2 + e^{-h^2 \Sigma X^2} . n . h^{n-1} \right]$$

$$= \pi^{-\frac{n}{2}} . (dX)^n . e^{-h^2 \Sigma X^2} \left[nh^{n-1} - 2h^{n+1} . C^2 \right] = 0$$

$$n - 2h^2 \Sigma X^2 = 0$$

$$h = \sqrt{\frac{n}{2 \Sigma X^2}} \qquad . \quad (44)$$

แต่จาก (34) เราได้

$$r = \frac{0.47694}{h}$$

$$\therefore \quad r = 0.47694 \times 1.4141 \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n}}$$

$$= 0.6745 \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n}} \qquad ....(45)$$

ใน (45) ΣX^2 คือ ผลบวกของความคลาดเคลื่อนจริง ๆ ยกกำลังสอง ซึ่งเป็นตัวที่เราไม่ทราบ ในการรังวัดที่มีจำนวนมาก ๆ ความคลาดเคลื่อนจริง ๆ มีค่าใกล้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ต่างไปจากผลปานกลาง (Residuals) ที่สุด หรือเท่ากัน

ฉะนั้น จึงอาจยอมให้ $\Sigma X^2 = \Sigma V^2$

ถ้าหากการรังวัดอยู่ในเขตจำกัดอันหนึ่ง หรือจำนวนความเคลื่อนคลาดอยู่ในขอบเขตอันหนึ่งนั้น $\Sigma V^2 > \Sigma X^2$ แต่หลักของอนุจัตุรัสวิธีได้กล่าวไว้ว่า ΣV^2 เป็นค่าต่ำสุดของ ΣX^2 ดังนั้น

$$\Sigma X^2 = \Sigma V^2 + U^2$$

ซึ่ง U^2 เป็นเลขจำนวนหนึ่งที่ยังมิได้กำหนดค่า และค่าสัมบูรณ์ หรือค่าแท้ของ U^2 ไม่มีใครทราบ แต่เป็นที่ทราบกันดีว่าค่านี้จะลดลงมากหากเพิ่มการรังวัด (n) มากขึ้น

สำหรับจำนวนค่าความต่างของค่ารังวัดแต่ละค่ากับผลปานกลาง (Residuals) มีมากขึ้น เมื่อ ΣX^2 เพิ่มขึ้น โดยประมาณ U^2 อาจพิจารณาเป็น $\frac{\Sigma X^2}{n}$

$$\Sigma X^2 = \Sigma V^2 + \frac{\Sigma X^2}{n} \quad \text{หรือ} \quad \frac{\Sigma X^2}{n} = \frac{\Sigma V^2}{n-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(46)$$

นำค่านี้แทนใน (45) จะได้

$$r = 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma V^2}{n-1}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(47)$$

สูตร (47) เป็นสูตรความเคลื่อนคลาดคาดคะเนการรังวัดโดยตรง 1 ครั้ง หรือการรังวัดที่มีน้ำหนักอย่างเดียวกัน คือ น้ำหนัก = 1 การหา r ต้องหาค่า V'S มาโดยการลบค่าผลปานกลางการรังวัดด้วยค่ารังวัดแต่ละค่า แล้วยกกำลังสองรวมกัน

เมื่อทราบ r แล้ว μ_o คือ ความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของผลปานกลางของการรังวัด ก็หาได้โดยง่าย คือ นำ (47) แทน (42) จะได้

$$\mu_o = \frac{r}{\sqrt{n}} = 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma V^2}{n(n-1)}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(48)$$

ตัวอย่าง การรังวัดมุมของ U.S.C. & G.S. ที่สถานี Pocasset ในรัฐ Massachusetts จากรายงานปี 1954 มีดังนี้

ลำดับ	มุมที่รังวัด	V	V²	หมายเหตุ
1	116 43 44.45	5.19	26.94	
2	50.55	- 0.91	.83	$r = 0.6745 \sqrt{\frac{92.15}{23}}$
3	50.95	- 1.31	1.72	
4	4X.90	0.74	.55	$= 1.''35$
5	49.20	0.44	.19	
6	48.85	0.79	.63	$\mu_o = \frac{1.35}{\sqrt{24}}$
7	47.40	2.24	5.02	
8	47.75	1.89	3.57	$= \pm 0.''28$
9	i1.05	- 1.41	2.00	ฉะนั้นค่าของมุมที่น่าเชื่อ
10	1'7.85	1.79	3.20	ที่สุด คือ
11	SO.60	- 0.96	.92	$116° 43' 49.''64 \pm 0.''28$
12	48.45	1.19	1.42	
13	51.75	2.11	4.45	
14	49.00	0.64	.41	
15	52.35	2.71	7.34	
16	51.30	- 1.66	2.75	
17	51.05	- 1.41	2.00	
18	5" 70	2.06	4.24	
19	49.05	0.59	.35	
20	50.55	- 0.91	.83	
21	49.25	0.39	.15	
22	46.75	2.89	8.35	
23	49.25	0.39	.15	
24	53.40	- 3.76	14.14	
	$Z = 116° 43' 49.''64$		$\Sigma V^2 = 92.15$	

ใน (47), (48) จะต้องยกกำลัง 2 ของ V'S แล้วรวมกัน เพื่อหลีกเลี่ยงการยกกำลัง 2 ของ V'S เราอาจคำนวณหาความละเอียดของการรังวัดโดยตรงที่มีน้ำหนักเท่ากันได้ดังนี้

สมมุติเราทำการรังวัดโดยตรงต่อจำนวนหนึ่งที่ต้องการทราบ Z ทำการรังวัดมา n ครั้ง เพื่อหามัชฌิมเลขคณิต หรือผลปานกลางเชิงเลขคณิต และความเคลื่อนคลาดคาดคะเน และความเบี่ยงเบนเฉลี่ยของการรังวัดแต่ละค่า และของผลปานกลางการรังวัด

ให้ $M^1, M^2, \ldots, M_n$ เป็นผลการรังวัดแต่ละครั้ง

$$\bar{X} = \frac{M^1 + M^2 + \ldots + M_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} M_i/n$$

$$\bar{X} - M^1 = V^1$$
$$\bar{X} - M^2 = V^2$$
$$\vdots$$
$$\bar{X} \quad M_n = V_n$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i^2}{n}$$

และเราให้ $\mu = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n}}$ ....(49)

$\bar{X}$ เป็นตัวแทน Z ฉะนั้น V'S ควรเป็น X'S ได้ในกรณีที่ X เป็นความเคลื่อนคลาดจากการรังวัดที่ต่างจาก Z

$\therefore \quad \mu = \sqrt{\frac{\Sigma V^2}{n}}$ ....(50)

เมื่อ n ยิ่งมาก (49) = (50) แต่ถ้า n มีขนาดเล็กการนิพจน์ หรือการแสดงเชิงคณิตศาสตร์ให้ถูกต้องยิ่งขึ้นก็ยิ่งมีความจำเป็น เมื่อเป็นเช่นนี้เราจึงสมมุติให้

$\bar{X} + X_o$, เป็นค่าจริงของ z

ฉะนั้น $X_1 = M_1 - (\bar{X} + X_o) = V_1 - X_o$

$X_2 = M_2 - (X + X_o) = V_2 - X_o$

. . . a . . . * . . . . . . * * *

• • • • • • • • • • • • • • • •

$X_n = M_n - (\bar{X} + X_o) = V_n \quad X_o$

แล้วยกกำลังสองรวมกันหารด้วย n ได้

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X^2}{n} \qquad \frac{\Sigma X^2}{n} = \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(V^1 - X_o)^2 = \frac{1}{n}(\Sigma V^2 - 2X_o\Sigma V + nX_o^2)$$

ซึ่ง $\Sigma V = 0$

$$\mu^2 = \frac{\Sigma V^2}{n} + X_o^2 \qquad \text{.............(51)}$$

และ X_o เราไม่สามารถจะทราบได้ และก็ไม่อาจหาค่าได้อย่างถูกต้องจริง ๆ แต่เรายอมให้เท่ากับความเคลื่อนคลาดปานกลางของ $\bar{X}$ ได้

จาก (42) $\mu_o = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$ นำค่านี้แทน X_o^2 ใน (51) ได้

$$\mu^2 = \frac{\Sigma V^2}{n} + \frac{\mu^2}{n}$$

$$(n - 1)\mu^2 = \Sigma V^2 \qquad \text{.............(52)}$$

และ (51) $\mu^2 = \frac{\Sigma V^2}{n} + X_o^2 = \frac{\Sigma X^2}{n}$

. (52) จึงเป็น

$\Sigma V^2 = (n - 1)\frac{\Sigma X^2}{n}$ (ค่านี้หมายถึงผลรวมของ $V^1, V^2, \ldots\ldots\ldots V_n$ ยกกำลังสองแล้ว) ....(53)

ฉะนั้น ใน (53) เราอาจหาค่า V'S ต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$V^1 = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.X^1$$

$$V^2 = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.X^2$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$V_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.X_n$$

รวมเข้าด้วยกันภาคซ้าย และภาคขวาโดยไม่คำนึงถึงเครื่องหมาย – จะได้

$$V_1 + V_2 + \ldots\ldots + V_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.(X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n)$$

หรือเขียนรูปทั่ว ๆ ไป

$$\Sigma V = \sqrt{\frac{\nu - x}{n}}.\Sigma X \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

นำ n หารตลอดจะได้

$$\frac{\Sigma V}{n} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.\frac{\Sigma X}{n}$$

ซึ่ง $\frac{\Sigma X}{n}$ คือ ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยนั่นเอง (a.d.)

$$\therefore \quad a.d.\sqrt{\frac{n-1}{n}} = \frac{\Sigma V}{n}$$

$$a.d. = \frac{\Sigma V}{n} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}}$$

$$= \frac{\Sigma V}{n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$

$$a.d. = \frac{\Sigma V}{\sqrt{n(n-1)}} \qquad \text{.............(55)}$$

จาก (55) นำแทน (36) จะได้

$$r = \frac{0.8453\ \Sigma V}{\sqrt{n(n-1)}} \qquad \text{.............(56)}$$

และจาก (48)

$$\mu_o = \frac{r}{\sqrt{n}} = \frac{0.8453\ \Sigma V}{n\sqrt{n-1}} \qquad \text{.............(57)}$$

ความเคลื่อนคลาดปานกลางอาจคำนวณหาได้จากสูตรข้างบนนี้เช่นกัน ซึ่งสูตร (56) และ (57) จะหาได้ง่ายกว่าใช้สูตร (47) และ (48) ในตาราง III สัมประสิทธิ์ของ ΣV ได้ทำตารางไว้ตามค่าของ n จาก 2 ถึง 100 โดยการใช้ตารางนี้การคำนวณจะง่ายและสั้นมาก

ตัวอย่าง จงพิจารณาการรังวัดเส้นตรงด้วยโซ่ยาว 20 เมตร ซึ่งมีขีดส่วนแบ่งย่อยถึงเซ็นติเมตร ดังต่อไปนี้

การรังวัด	V
188.97	0.095
.88	.005
.91	.035
99	.115
.83	.045
.80	.075
.81	.065
.81	.965
188.875	0.500

ซึ่งมัชฌิมเลขคณิต คือ 188.875 เมตร ความต่างระหว่างค่านี้กับค่ารังวัดแต่ละค่า คือ V ซึ่ง $\Sigma V = 0.5$ ดังนั้นโดยอาศัยตาราง III สำหรับ $n = 8$ โดยสูตร (56) และ (57)

$$r = 0.1130 \times 0.5 = 0.0565$$

$$\mu_o = 0.0399 \times 0.5 = 0.0200$$

สูตรที่ให้ความละเอียดถูกต้องมากกว่า คือ สูตร (47) และ (48) จะได้

$r = 0.051$ และ $\mu_o = 0.018$ เมตร

ยิ่งเพิ่มจำนวนการรังวัดมากขึ้น ความเคลื่อนคาดคะเนจากการใช้สูตรทั้ง 2 วิธี จะมีค่าใกล้กันเข้าไปทุกที

12. การรังวัดต่างน้ำหนัก

เมื่อการรังวัดกระทำต่อจำนวนอันหนึ่งด้วยน้ำหนักต่างกัน ค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุด หาได้โดยใช้**มัชฌิมเลขคณิตทั่วไป** เช่น โดยคูณผลการรังวัดแต่ละค่าด้วยน้ำหนักของการรังวัดนั้น และหารผลรวมของผลคูณด้วยผลรวมของน้ำหนัก หรือถ้า $\bar{X}$ เป็นค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุด M เป็นค่ารังวัดใด ๆ และ P เป็นน้ำหนักการรังวัดแต่ละค่า

$$\therefore \quad \bar{X} = \frac{\Sigma P.M}{\Sigma P} \qquad \text{.................(58)}$$

ความคลาดเคลื่อนคาดคะเนของการรังวัดจากหน่วยน้ำหนัก คือ

$$r = 0.6745 \sqrt{\frac{\Sigma PV^2}{(n-1)}} \qquad \text{.................(59)}$$

ซึ่ง n แทนจำนวนการรังวัด และ V เป็นค่าความต่างระหว่างค่ามัชฌิมเลขคณิตกับค่ารังวัดใด ๆ โดยเอา M ลบจาก $\bar{X}$

ในที่สุดความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของ $\bar{X}$ จะได้

$$\mu_o = \frac{1}{P} \quad (\text{ซึ่ง } r = 0.6745 \sqrt{\frac{\Sigma PV^2}{n-1}} \qquad \text{...............(60)}$$

ตัวอย่าง ผลการรังวัดของแถวตั้งที่ 2 ในตารางเป็นผลจากการรังวัดมุมหนึ่ง ๆ ซ้ำต่างจากกัน, 18.″26 ได้จากการรังวัดซ้ำ 5 ครั้ง, 16.″30 จากการรังวัดซ้ำ 4 ครั้ง ตามลำดับ

น้ำหนัก (P)	มุมที่รังวัด (M)	ความต่างจากมัชฌิม (V)	V^2	PV^2
5	87° 51′ 18.″26	− 0.10	0.010	0.05
4	16.30	+ 1.86	3.460	13.84
1	21.06	− 2.90	8.410	8.41
3	17.95	+ 0.21	0.043	0.18
3	16.20	+ 1.96	3.842	11.53
4	20.85	− 2.69	7.236	28.94
$\Sigma P = 21$	$X = 87° \; 51' \; 18.''16$		$\Sigma PV^2 = 62.95$	

จากสูตร
$$r = 0.6745 \sqrt{\frac{\Sigma PV^2}{n-1}}$$
$$= 0.6745 \sqrt{\frac{62.95}{5}}$$
$$= 2.''39$$

หรือโดยอาศัยตาราง II จะได้
$$r = 0.3016 \sqrt{62.95}$$
$$= 2.''39$$

นี่คือ ความเคลื่อนคลาดคาดคะเนจากหน่วยน้ำหนัก จาก (60) จะได้ความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของมัชฌิมทั่วไป คือ

$$\mu_o = \frac{2.39}{\sqrt{21}} = 0.''52$$

และความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของผลการรังวัดที่กำหนดให้ใด ๆ หาได้โดยหาร 2.39 ด้วยรู๊ตที่สองของน้ำหนักการรังวัดนั้น ๆ

ความสัมพันธ์อันสำคัญอันหนึ่ง คือว่า "น้ำหนักการรังวัดย่อมเป็นส่วนกลับกับกำลังสองของความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของการรังวัดนั้น" เช่น พิจารณาชุด หรืออนุกรมการรังวัดมุมหนึ่งต่อไปนี้ **ชุดแรก**อ่านด้วยกล้อง**ทรานสิท** (Transit) ถึง 20 พิลิบดา และชุดที่สองอ่านด้วยกล้อง**ทรานสิท** ถึงลิบดา มุมนั้นในแต่ละชิดวัด 10 ครั้ง จานองศาที่ใช้เปลี่ยนศูนย์ไปต่าง ๆ ถึง 11 ศูนย์ เพื่อขจัดความเคลื่อนคลาดอันเนื่องจากการเยื้องจากศูนย์กลาง (Eccentricity)

กล้องทรานสิทที่ 1			**กล้องทรานสิทที่ 2**		
M	V	V²	M	V	V²
34" 55'35"	2	4	34" 56' 15"	39	1521
35	2	4	55 30	6	36
20	13	169	54 30	66	4356
05	28	784	55 15	21	441
75	42	1764	56 00	24	576
40	7	49	55 45	9	81
10	13	169	55 30	6	36
30	3	9	55 30	6	36
50	17	289	56 00	24	576
30	3	9	55 45	9	81
34" 55' 33"	—	3250	34" 55' 36"	—	7740

โดยวิธี (47) และ (48) จะได้

ทรานสิทแรก.................... $34^\circ\ 55'\ 33'' \pm 4''.1$

ทรานสิทที่สอง.................. $34\ \ 55\ \ 36\ \pm 6.3$

เนื่องจากน้ำหนักของผลปานกลางเหล่านี้เมื่อเป็นอัตราส่วนจะได้

$$\frac{1}{41^2} : \frac{1}{63^2}$$ หรือ 12 : 5 โดยประมาณ

ค่าปรับแล้วครั้งสุดท้ายของมุมนั้น คือ

$$\bar{X} = 34^\circ\ 55' + \frac{33 \times 12 + 36 \times 5}{17} = 34^\circ\ 55'\ 33''.9$$

และความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของค่านั้น คือ

$$\mu_o = 4.1\sqrt{\frac{12}{17}} = 3''.4$$

เนื่องจากความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของการรังวัดแต่ละครั้งใน 2 กรณีนี้เป็น 13″ และ 20″ น้ำหนักที่ตรงกัน 400 ถึง 169 ดังนั้น การรังวัดแต่ละครั้งด้วยกล้องทรานสิทเครื่องแรกมีคุณค่าประมาณ $2\frac{1}{3}$ เมื่อเปรียบกับกล้องเครื่องที่สอง

เมื่อการรังวัดจำนวนเดียวกันนั้นทราบว่ามีความละเอียดต่างกัน และไม่มีทางใดจะหาความเคลื่อนคลาดคาดคะเนได้อย่างที่กล่าวมาแล้ว ควรนำเอาน้ำหนักมากำหนดหา ซึ่งตรงกับความเชื่อมั่นที่เราให้กับค่ารังวัดนั้น ๆ และแล้วก็หาผลปานกลาง และแน่ละการกำหนดหาน้ำหนักในกรณีเช่นนั้นเป็นเรื่องที่ต้องการประสบการณ์ และการวินิจฉัยตัดสินใจ

ปัญหาโจทย์

1. ละติจูดของสถานี Bully Spring ทางแนวเขตแดนตอนเหนือของสหรัฐอเมริกา พบว่าทำการวัดถึง 64 ครั้ง ได้ผล 49° 01′ 09.″11 ± 0.″051 จงหาความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของการรังวัดแต่ละค่า

2. ได้ทำการวัดระยะจาก A ถึง B 5 ครั้ง และความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของผลปานกลางเป็น 0.060 ฟุต จะต้องทำการวัดเพิ่มขึ้นอีกกี่ครั้งด้วยความละเอียดเดียวกัน อันจำเป็นเพื่อให้ความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของผลปานกลางมีเพียง 0.004 ฟุต?

3. รังวัดมุมหนึ่งด้วยกล้องธีโอโดไลท์ และด้วยกล้องทรานสิท ได้ผลดังนี้

   โดยธีโอโดไลท์ .... 24° 13′ 36″ ± 3.″1

   โดยทรานสิท .... 24 13 24 ± 13.8

   จงหาค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดของมุม และความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของมุมนั้น

4. หน่วยสนามหนึ่งรังวัดความยาวของระยะได้ 683.4 ± 0.3 และหน่วยสนามชุดที่สองวัดได้ 684.9 ± .3 จากผลทั้งสองค่าที่วัดได้นี้ อันไหนมีเหตุผลที่น่าเชื่อได้?

5. การรังวัดจำนวนหนึ่งได้ผล 8 ค่า คือ 769, 768, 767, 766, 765, 764, 763 และ 762 ซึ่งมีน้ำหนัก 1, 3, 5, 7, 8, 6, 4 และ 2 ตามลำดับ จงหาความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของผลปานกลางทั่วไป และความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของการรังวัดแต่ละค่า ?

บรรณานุกรม