บทที่ 11
วิธีอนุจัตุรัส
(Method of Least Squares)

ในการศึกษาพิจารณาตรวจสอบทุกชนิดเชิงวิทยาศาสตร์ มีความจำเป็นอยู่บ่อย ๆ เพื่อกำหนดหาค่าของจำนวนอันแน่นอนทั้งหลายโดยอาศัยการรังวัดขึ้นจริง ๆ ด้วยการใช้เครื่องมือ หรือปราศจากเครื่องมือช่วย การสังเกตพิจารณาอาจกระทำต่อสิ่งที่เราไม่ทราบค่าโดยตรง หรือกระทำต่อฟังก์ชั่นของตัวไม่รู้ สำหรับการกระทำต่อฟังก์ชั่นของตัวไม่รู้ ค่าของจำนวนที่ต้องการนั้นหาได้โดยการคำนวณจากค่ารังวัดของฟังก์ชั่นเหล่านั้น ในการหาค่าของตัวไม่รู้ให้มีความละเอียดถูกต้องยิ่งขึ้นแทนผลการรังวัดเพียงครั้งเดียว หรือใช้จำนวนชุดของการรังวัดเหล่านั้น โดยปกติเราหันไปใช้ผลการรังวัดที่ต้องกระทำซ้ำ ๆ ในลักษณะอย่างเดียวกัน และการรังวัดอยู่ในภาวะคล้ายคลึงอย่างเดียวกัน หรือกระทำในลักษณะที่ผิดแผกแตกต่างจากกัน และต่างภาวะกันก็ได้

ผลการรังวัดใต้สภาวะการณ์เช่นนี้จะพบเช่นเดียวกันว่า การรังวัดที่แตกต่างกันนั้นจะได้ผลที่แตกต่างจากกันด้วย จำนวนความแตกต่างแปรเปลี่ยนไปตามลักษณะของการรังวัด และปัญหาที่เกิดขึ้นในการรังวัด คือ ทำอย่างไรจึงจะกำหนดค่าที่แท้จริงของจำนวนที่เราต้องการจากการรังวัดที่แตกต่างกัน อย่างไรก็ดีจากธรรมชาติของปัญหากรณีดังกล่าวนั้น เราไม่อาจคาดหวังที่จะได้รับค่าต่าง ๆ ของเราด้วยความละเอียดอย่างสมบูรณ์ สิ่งที่เราอาจหวังได้รับก็คือ การได้ค่าเหล่านั้นซึ่งจะยังผลให้ได้ค่าเชิงคาดคะเนหลังจากนำเอาการรังวัดทั้งหมดมาพิจารณา และต่อไปก็คือ กำหนดหา**ขั้นความเชื่อมั่น**ที่จะให้กับค่าเหล่านั้น

การปรับค่าการรังวัดจำเป็นต้องกระทำกันอันเนื่องจากความจริงมีอยู่ว่า เมื่อกระทำการรังวัดสิ่งใด ๆ ด้วยความละเอียดดีเยี่ยมหลายครั้ง แม้การรังวัดนั้นกระทำต่อจำนวนเดียวกันใต้สภาวะที่คล้ายคลึงกันอย่างปรากฏชัดก็ตาม ผลการรังวัดย่อมไม่เป็นอันเดียวกัน ค่า

ของจำนวนที่รังวัดอันแท้จริงที่จะให้ได้มาอย่างสมบูรณ์นั้นโดยปกติแล้วไม่สามารถหาได้ แต่กลับไปยอมรับ และใช้ผลการรังวัดที่ได้จากการวัดคละปนกันหลายครั้ง และการปรับค่าให้กับผลการรังวัดนั้น ซึ่งถือว่าเป็นค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดแทนตัวที่ต้องการทราบ และเป็นวิธีการที่ดีที่สุด การเปรียบเทียบการรังวัดนับว่าจำเป็นเพื่อกำหนดหาขั้นความละเอียดเชิงสัมพัทธ์ของชุดการรังวัดต่าง ๆ ที่กระทำมาต่างภาวะกัน ทั้งนี้ก็เพื่อจุดมุ่งหมายในการนำเอาค่าการรังวัดมาผสมใช้ร่วมกัน และทำการปรับค่าให้อย่างเหมาะสม นอกจากนั้นเพื่อให้ได้ระเบียบวิธีการรังวัดที่ดีที่สุด วิธีหาค่ากำลังสองต่ำสุดหรืออนุจัตุรัสวิธี (The Method of Least Squares) เป็นวิธีที่นำมาใช้ตามความมุ่งหมายดังกล่าวในการปรับ และเปรียบเทียบการรังวัด

1. การแบ่งชั้นการรังวัด

1.1 การรังวัดโดยตรง (Direct Observations) คือ การรังวัดทั้งหลายกระทำโดยตรงต่อขนาดของสิ่งที่เราต้องการหา เช่น การรังวัดหาขนาดความยาวของระยะจากจุดถึงจุดด้วยการใช้โซ่วัดระยะ หรือการใช้กล้องทำการรังวัดมุมโดยอ่านค่าของมุมจากกล้องระหว่างที่หมายหนึ่งไปยังอีกที่หมายหนึ่งด้วยการอ่านมุมมาโดยตรงด้วยกล้อง ลักษณะการรังวัดชนิดนี้จะปรากฏอยู่ในการปฏิบัติของนักวิศวกรเป็นประจำ

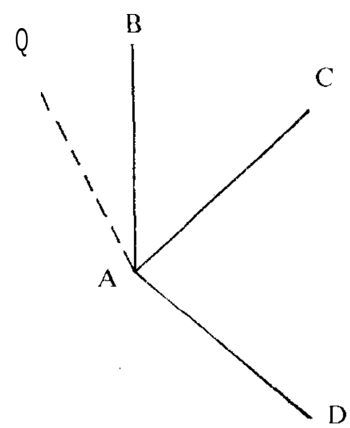
1.2 การรังวัดทางอ้อม (Indirect Observations) เป็นการรังวัดต่อขนาดสิ่งใด ๆ ที่ต้องอาศัยขนาดอื่น หรือจำนวนอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง การรังวัดชนิดนี้ เช่น การรังวัดระยะเส้นตรงใด ๆ จากจุดถึงจุดในโครงข่ายสามเหลี่ยมโดยอาศัยระยะของเส้นฐาน (Base Line) แล้วทำการรังวัดง่ามมุมที่จุดยอดมุมของโครงข่ายสามเหลี่ยม, การรังวัดมุมหนึ่งโดยถือมุมนั้นเป็นผลรวม หรือผลต่างจากมุมอื่น, การหาความสูงต่างระดับของจุดโดยการอ่านไม้เล็งระดับที่มีขีดส่วนแบ่งซึ่งนำไปตั้งไว้ยังจุดต่าง ๆ, การกำหนดหาค่าละติจูดโดยการรังวัดละติจูดของดาว ฯลฯ ความจริงแล้วส่วนใหญ่ของการรังวัดในทางวิศวกรรม และในทางวิทยาศาสตร์เชิงฟิสิกส์ ย่อมจัดเข้าอยู่ในชั้นของการรังวัดทางอ้อมนี้

1.3 การรังวัดเชิงเงื่อนไข (Conditioned Observations) อาจเป็นได้ทั้งการรังวัดโดยตรง หรือการรังวัดทางอ้อม แต่อยู่ในอาณัติของจุดประสงค์ หรือความต้องการที่ให้เป็นไปตามกฎเกณฑ์บางประการ หรือเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดตั้งบังคับไว้ล่วงหน้าจากการพิจารณาเชิงทฤษฎี กรณีดังกล่าวอาจแสดงให้เห็นชัดเจนยิ่งขึ้นดังตัวอย่างต่อไปนี้ คือ มุมสามมุมภายในรูปสามเหลี่ยมพื้นราบจะต้องทำการปรับจนกระทั่งผลรวมเท่ากับ 180° ถ้วน, ผลรวมของจำนวนร้อยละในการวิเคราะห์เชิงเคมีต้องเท่ากับ 100 และผลรวมค่าเส้นตั้งไปทางเหนือ (Latitude หรือ Northings) จะต้องเท่ากับผลรวมของค่าเส้นตั้งไปทางใต้ (Southings) ในการวงรอบบรรจบตัวเอง

1.4 การรังวัดอิสระ (Independent Observations) อาจเป็นได้ทั้งการรังวัดโดยตรงและการรังวัดทางอ้อมแต่ไม่อยู่ในอาณัติของเงื่อนไขที่มีกฎเกณฑ์ใด ๆ เช่น การรังวัดมุม 2 มุมของรูปสามเหลี่ยม เป็นต้น ทั้งนี้เนื่องจากจำนวนที่รังวัดมานั้นไม่จำเป็นต้องขึ้นอยู่กับอันอื่นในเชิงเรขาคณิต

เพื่อขยายการรังวัดของชั้นต่าง ๆ ดังกล่าวให้พิจารณารูปต่อไปนี้

มุม BAC กับ CAD เป็นมุมที่รังวัดมาเมื่อตั้งกล้องที่ A มุมที่รังวัดชนิดนี้เป็นการรังวัดโดยตรง อย่างไรก็ดีหากมีจุด Q เป็นจุดคล้ายถือเป็นจุดเล็งเริ่มแรก หรือใช้เป็นแนวหลักในการรังวัดมุมเบนจากซ้ายไปขวาแล้วอ่านค่ามุม QAB, BAC และ CAD การหาค่ามุม BAC, CAD มิใช่เป็นผลจากการรังวัดโดยตรง แต่ได้จากการหาจากมุมที่วัดจากแนวเล็งเริ่มแรก จึงได้มุม BAC, CAD มาโดยทางอ้อม



รูป 11.1

นอกจากนั้นไม่ว่าการรังวัดจะเป็นทางตรง หรือทางอ้อม ค่ามุม BAC และ CAD ที่ได้จะเป็นอิสระต่อกัน แต่ถ้ามุมทั้ง 3 คือ BAC, CAD และ BAD รังวัดมาแล้ว ผลการรังวัดเป็นการรังวัดเชิงเงื่อนไข หรือเป็นไปตามความต้องการเชิงเรขาคณิตอันมีกฎเกณฑ์ซึ่งเมื่อปรับค่าให้กับมุมในขั้นสุดท้ายแล้ว มุม BAC + มุม CAD ต้องเท่ากับมุม BAD และยังไม่มีระบบของค่าใด ๆ ที่จะนำเอามาใช้แทนมุมทั้งสามที่ได้สมนัยอย่างแท้จริงกับเงื่อนไขนี้

อีกประการหนึ่ง ถ้าได้ทำการรังวัดด้าน และมุมของสนามใด ๆ ออกมา แต่ละอย่างที่รังวัดมานั้นวัดมาโดยเอกเทศเป็นการรังวัดโดยตรง ถ้าพื้นที่ของสนามหาได้จากด้านและมุมที่ได้วัดมา การรังวัดพื้นที่ถือเป็นการรังวัดทางอ้อม

ประการต่อไป ด้าน 2 ด้านใด ๆ ที่พิจารณาเป็นอิสระต่อกัน แต่ถ้านำเอาด้านและมุมทั้งหมดมาพิจารณา มุม และด้านก็ต้องสมจริงกับเงื่อนไข ซึ่งเมื่อนำมาเขียนเป็นรูปขึ้นแล้ว ด้านและมุมต้องเข้ากันได้สนิทอย่างแท้จริง

รูป 11.2

2. ความเคลื่อนคลาดการรังวัด

เมื่อทำการรังวัดจำนวนหนึ่งจำนวนใด ผลลัพธ์ที่ได้จากการรังวัดนั้นเป็นค่าทางจำนวนเรียก **"ผลการรังวัด"** (Observation)

ถ้า Z เป็นค่าจริงของจำนวนที่รังวัด และ M_1 กับ M_2 เป็นผลการรังวัด 2 ครั้งต่อจำนวนที่ต้องการทราบ $Z - M_1$ และ $Z - M_2$ คือ **"ความคลาดเคลื่อน"** (Errors) ของการรังวัด 2 ครั้งนั้น

ความเคลื่อนคลาดในการรังวัด (Errors of Measurement) : ชั้นของความเคลื่อนคลาด (Classes of Errors) การรังวัดจำนวนใดทุกชนิดย่อมเกิดมีความเคลื่อนคลาดของการรังวัดแฝงติดเข้ามากับผลการรังวัดนั้น ชนิดของความเคลื่อนคลาดอาจแยกออกได้เป็น 3 ประการ

ก. ความเคลื่อนคลาดคงที่ (Constant Errors)

ข. ความเคลื่อนคลาดเป็นระเบียบ (Systematic Errors)

ค. ความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญ (Accidental Errors)

2.1 ความเคลื่อนคลาดคงที่ (Constant Errors) ความเคลื่อนคลาดคงที่มีผลอย่างเดียวกันต่อการรังวัดทั้งหมดในชุดเดียวกันของการรังวัดนั้น สาเหตุของความเคลื่อนคลาดสามารถทราบได้ชัดเจนและอาจกำจัดให้หายไปได้จากการปฏิบัติการรังวัด หรือโดยการคำนวณหาจำนวนแก้แล้วแก้ให้กับผลการรังวัด เช่น ถ้าโซ่ลานเหล็กกล้ายาว 100 เมตร เกินจากความยาวมาตรฐาน 0.01 เมตร ส่วนเกินอันนี้มีผลให้เกิดความเคลื่อนคลาดทางระยะในการวัดระยะทุกช่วง 100 เมตร เช่นเดียวกัน ความเคลื่อนคลาดที่มีอยู่ และขนาดมักมาจากเหตุที่แน่นอนบางอย่าง อาจแบ่งความเคลื่อนคลาดออกไปได้หลายชั้น คือ

ก. ความเคลื่อนคลาดทางทฤษฎี เช่น ความเคลื่อนคลาดอันเกิดจากอาการหักเหของแสง หรือความเคลื่อนคลาดของแสง (Aberration of Light) ผลจากการเปลี่ยนอันแน่นอนของอุณหภูมิ หรือความชื้นที่แตกต่างไปจากมาตรฐานการรังวัดของเรา ตราบใดที่ทราบสาเหตุก็สามารถคำนวณขนาดของความเคลื่อนคลาดได้ และสามารถกำจัดให้หายไปได้จากระเบียบวิธีการรังวัดอีกด้วย

ข. ความเคลื่อนคลาดอันเกิดจากเครื่องมือ เป็นความเคลื่อนคลาดเกิดขึ้นในชิ้นส่วนของเครื่องมือที่สร้าง เช่น ขีดส่วนแบ่งบนจานองศา และบนมาตราวัดส่วนย่อยจากความไม่ถูกต้องของควงไมครอมเมตร ศูนย์กลางจานองศาเยื้องไปจากศูนย์จริง ฯลฯ ความเคลื่อนคลาดเหล่านี้สามารถตรวจสอบหาได้จากตัวเครื่องมือเอง และสามารถลด หรือกำจัดให้หายไปได้โดยการปรับแก้ และการรังวัดซึ่งอาจกระทำได้ด้วยวิธีการใช้เครื่องมือโดยเฉพาะ หรือโดยวิธีคำนวณในขั้นต่อมา

ค. ความเคลื่อนคลาดอันเกิดจากบุคคล ความเคลื่อนคลาดชนิดนี้เนื่องมาจากลักษณะพิเศษเฉพาะบุคคลของผู้ทำการรังวัดซึ่งบางทีตอบสัญญาณเร็ว หรือช้าเกินไปเสมอ คาด

คะเนจำนวนเล็ก หรือโตไปกว่าความเป็นจริงเสมอ ฯลฯ ลักษณะ และขนาดความเคลื่อนคลาดเหล่านี้อาจกำหนดหาได้ด้วยการศึกษาพิจารณาจากตัวผู้รังวัดนั้น เมื่อได้ศึกษาพิจารณาอย่างดีแล้วจะทำให้ได้ "สมการเกี่ยวกับบุคคล" (Personal Equation) เฉพาะของคนนั้นและก็หาทางแก้ความเคลื่อนคลาดนี้ให้กับผลการรังวัดนั้น

2.2 ความเคลื่อนคลาดเป็นระเบียบ (Systematic Errors) ความเคลื่อนคลาดเป็นระเบียบ เป็นความเคลื่อนคลาดอีกชนิดหนึ่งที่เครื่องหมายทางพีชคณิต และขนาดแสดงความสัมพันธ์ที่แน่นอนต่อภาวะบางประการ เช่น ถ้ามีการรังวัดระยะด้วยโซ่ในสภาวะอากาศที่แตกต่างไปจากภาวะของโซ่ขณะเทียบ การยืดหดของความยาวโซ่ขณะรังวัดต่างไปจากโซ่ขณะเทียบ หรือความยาวมาตรฐานนี้เป็นความเคลื่อนคลาดเป็นระเบียบ และสามารถจะคำนวณหาได้ถ้าเราทราบสัมประสิทธิ์การขยายตัวของโซ่ที่แปรเปลี่ยนไปตามอุณหภูมิและทราบอุณหภูมิขณะรังวัด การหักเหของแสงมีผลกระทบกระเทือนความสูงที่รังวัด

เมื่อพิจารณาอย่างรอบคอบความเคลื่อนคลาดคงที่กับความเคลื่อนคลาดเป็นระเบียบควรพิจารณาถือเป็นอันเดียวกันได้ และถ้าพูดกันตามความจริงแล้ว ไม่น่าจะเรียกว่าเป็น "ความเคลื่อนคลาด" อีกด้วย เพราะความเคลื่อนคลาดที่กล่าวมานั้นสามารถกำจัดให้หายไปได้ด้วยวิธีการรังวัด และการคำนวณคล้ายเราทราบขนาด และเครื่องหมายของมันอยู่แล้วเมื่อทราบสาเหตุโดยชัดแจ้ง

ความผิด หรือความสำคัญผิด (Mistakes) ความผิด หรือความสำคัญผิด ไม่จัดเป็นความเคลื่อนคลาดในที่นี้ (ความหมายทั่ว ๆ ไปถือเป็นความเคลื่อนคลาด เช่น ความเคลื่อนคลาดในการตัดสินใจจากการสะเพร่า ไม่แน่ใจ) แต่ความผิด หรือความสำคัญผิดจะต้องพิจารณาความละเอียดของการรังวัด ผู้รังวัดอาจเกิดมีความสับสนขึ้นทางจิตอย่างรุนแรงจนกระทั่งการรังวัดนั้นไม่อาจถือว่าได้มาจากความมั่นใจ หรือเชื่อมั่น หรือเกิดจากผู้รังวัดมีประสบการณ์น้อย และบางครั้งอาจเกิดกับผู้รังวัดที่มีทักษะสูงก็ได้ ความผิด หรือความสำคัญผิดอาจยกตัวอย่างให้เห็นได้ เช่น การอ่านจานองศาเป็น 41° แทนที่จะอ่านเป็น 14° หรือคนอ่านบอก 38° คนจด ๆ เป็น 33° หรือการส่องที่หมายผิด ผลการรังวัดชนิดนี้จะแตกต่างไปจากกลุ่มหรือจากชุดการรังวัดเมื่อเปรียบเทียบกัน สืบค้นหาได้ง่าย ผลการรังวัดต้องตัดทิ้งไม่อาจรับผลนั้นมาใช้งานได้ เพราะไม่มีกฎเกณฑ์ใด ๆ ทางคณิตศาสตร์

2.3 ความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญ (Accidental Errors) ความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญเป็นความเคลื่อนคลาดของการรังวัดที่แฝงอยู่ในผลการรังวัดหลังจากได้กำจัดความเคลื่อนคลาดคงที่หรือเคลื่อนคลาดเป็นระเบียบกับความผิดออกด้วยความรอบคอบเรียบร้อยแล้ว ความเคลื่อนคลาดชนิดนี้ขาดความเป็นระเบียบอันเกิดจากสาเหตุที่ปราศจากกฎเกณฑ์ใด ๆ อันมีผลต่อผู้รังวัดแต่ละคน และไม่มีกฎเกณฑ์แน่นอนใด ๆ จะควบคุมไม่ให้เกิดได้ ความเคลื่อนคลาดจะเป็นไปตามกฎเกณฑ์ "ความคาดคะเน" หรือ "ความน่าจะเป็น" ในทางทฤษฎีความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญประกอบด้วย "จำนวนอันไม่จำกัดของความเคลื่อนคลาดขนาดเล็กอิสระอันมีขนาดเท่ากัน แต่ละขนาดมักมีเครื่องหมายเป็นบวก และลบเท่า ๆ กัน" **ส่วนในทางปฏิบัติ** "ความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญประกอบด้วยจำนวนของความเคลื่อนคลาดขนาดเล็ก ๆ มีจำนวนอย่างมากมายโดยไม่จำกัด และความเคลื่อนคลาดแต่ละอันมักมีเครื่องหมายบวกและลบเท่า ๆ กัน"

ตัวอย่างความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญ เช่น ความเคลื่อนคลาดในการทำระดับอันเกิดจากการยืดหดของเครื่องมือทำระดับอย่างกะทันหัน หรือเกิดจากลมพัด หรือจากการหักเหของแสงที่เปลี่ยนแปลง และผิดปกติไปของบรรยากาศ นอกจากนั้นการจับที่หมายของผู้รังวัดได้ไม่อยู่ตรงจุดกึ่งกลางจริง จึงทำให้การอ่านมุม และคาดคะเนความเคลื่อนคลาดไปจากที่ควรเป็นหรือความเคลื่อนคลาดเล็ก ๆ น้อย ๆ จากการไม่สามารถควบคุมให้เครื่องมืออยู่ในสภาพอย่างที่ปรับแก้ แม้ว่าจะได้ปรับเครื่องมือให้อยู่ในสภาพพึงประสงค์เพื่อใช้การได้แล้วอย่างดี แต่ความเคลื่อนคลาดชนิดนี้จะเข้าไปแฝงอยู่ในการรังวัดทุกครั้ง อย่างไรก็ดีผู้รังวัดควรหาทางลดความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญนี้ให้เหลือน้อยที่สุดเท่าที่จะสามารถจะทำได้ทั้งทางจำนวน และขนาดจากการที่ต้องมีความรอบคอบดูแลระมัดระวัง ใช้ความประณีตในการรังวัด

ปัญหาที่คงเหลืออยู่บัดนี้ คือ การนำเอาผลการรังวัดมาผสมกันจนกระทั่งความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญที่เหลือติดอยู่อันมีผลกระทบกระเทือนต่อผลการรังวัด คาดว่าน่าจะคงมีอยู่นั้นให้มีเหลือน้อยที่สุด และผลที่ได้จากการผสมกันของการรังวัดที่นำไปใช้ในงาน เรามีวิธีการปรับค่าความเคลื่อนคลาดได้อย่างเหมาะสมโดยใช้ **อนุจัตุรัสวิธี** (The Method of Least Squares)

ในการรังวัดใด ๆ เรามิได้นำเอาผลการรังวัดเพียงครั้งเดียวมาใช้เป็นตัวแทนสิ่งที่เรารังวัดนั้น ค่าของสิ่งที่รังวัดที่แท้เป็นตัวไม่รู้ (Unknowns) ผลบานกลางการรังวัดเป็นค่าเดียวที่ใช้เป็นตัวแทนตัวไม่รู้ เรามักถือค่านี้เป็นค่าน่าจะเป็น หรือค่าคาดคะเนของตัวไม่รู้ว่าควรเป็นค่านี้มากที่สุด ฉะนั้นค่าใด ๆ ที่วัดแตกต่างไปจากค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดนั้นเป็นค่าที่น่าสนใจ และสิ่งที่เราสามารถจะทำได้ก็คือ การหาค่าของตัวไม่รู้ซึ่งจะกำจัดความแตกต่างระหว่างค่าที่รังวัดมาต่าง ๆ และค่าที่ถือเป็นค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดนั้นได้โดยอาศัยค่าที่รังวัดมานั้นเอง

ตามความรู้สึกในขั้นแรกนั้นดูเหมือนว่า "ความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญ" เนื่องมาจากสาเหตุที่ไม่ทราบต่าง ๆ มีจำนวนมากมายนัก และอยู่นอกเหนือกฎเกณฑ์การตรวจสอบเชิงคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ดี **ทฤษฎีการคาดคะเน** หรือ**ทฤษฎีความน่าจะเป็น** มีหลักเกณฑ์อยู่ว่าความเคลื่อนคลาดเหล่านี้จะเป็นไปตามกฎเกณฑ์อันหนึ่งในทางขนาด และความถี่ หรือจำนวนการเกิด ซึ่งสามารถทำการนิพจน์ออกมา (Expression) ได้เชิงคณิตศาสตร์ และจากประสบ-การณ์ได้ยืนยันความถูกต้องของกฎเกณฑ์อันนี้ด้วย

คำว่า **ความเคลื่อนคลาด** (Errors) ที่จะกล่าวต่อไปนี้หมายถึงความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญที่มาจากแหล่งเกิดต่าง ๆ ซึ่งถือว่ามีแหล่งเกิดอยู่มากมาย และผลของความเคลื่อนคลาดโดยไม่อยู่ในวิสัยสามารถจะสืบค้นได้เชิงฟิสิคส์ ความเคลื่อนคลาดนี้ คือ "ความแตกต่างระหว่างค่าจริงของจำนวนที่รังวัด และผลของการรังวัดต่อค่านั้น"

อาจนิพจน์ออกมาในรูปคณิตศาสตร์ดังนี้
ถ้าให้ Z เป็นค่าจริงของมุม ๆ หนึ่ง
และ $M_1, M_2, M_3, \ldots\ldots\ldots M_n$ เป็นผลของการรังวัดแต่ละค่าของมุมนั้น
ให้ $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots X_n$ เป็นความเคลื่อนคลาดของผลการรังวัดที่ตรงกัน

$$Z - M_1 = X_1$$
$$Z - M_2 = X_2$$
$$Z - M_3 = X_3$$

$Z - M_n = X_n$

โดยทั่วไป X คือ ความเคลื่อนคลาดของ M

ความแตกต่างระหว่างค่าที่น่าเชื่อที่สุดของจำนวนที่รังวัดกับค่าแต่ละค่าที่รังวัดต่อค่านั้นเรียก "ความเคลื่อนคลาดการรังวัดจากค่าปานกลาง" (Residural Errors) หรือ เรียกง่าย ๆ ว่า "รีซิดจวลส์" (Residuals) ฉะนั้นตัวอย่างข้างบน $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มิใช่ "รีซิดจวลส์" (Residuals) แต่ว่า X'S เป็นค่าความแตกต่างของการรังวัดที่เฉไปจากค่าจริง

จากประสบการณ์พบว่าความเคลื่อนคลาดการรังวัดมิได้แจกแจง หรือกระจัดกระจายอย่าง "เดาสุ่ม" แต่กระจัดกระจาย หรือแจกแจงเป็นไปตามกฎเกณฑ์ กฎเกณฑ์อันนี้คือ

1) ความคลาดเคลื่อนขนาดเล็กมักมีมากกว่าความเคลื่อนคลาดที่มีขนาดใหญ่
2) จำนวนความเคลื่อนคลาดที่ไปในทางบวก และทางลบมีจำนวนเท่ากัน
3) ความเคลือนคลาดที่เป็นจำนวนขนาดใหญ่ไม่เกิด

ค่า "รีซิดจวลส์" คาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุด คือ ค่าที่หาได้เชิงเหตุผลจากการใช้ **อนุจัตุรัสวิธี** (The Method of Least Squares) กระทำต่อค่าที่รังวัดมา เช่น กรณีง่าย ๆ ของการรังวัดค่าของจำนวนใดจำนวนหนึ่งมา มัธฌิม หรือผลปานกลางเชิงเลขคณิต (Arithmetical Mean) คือ ค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุด

ให้ Z_m เป็นค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อของการรังวัดต่อค่าหนึ่ง

และ $M_1, M_2, M_3, \ldots\ldots, M_n$ เป็นผลการรังวัดแต่ละค่าของค่าที่ต้องการทราบนั้น

ให้ $V_1, V_2, V_3, \ldots\ldots, V_n$ เป็น "รีซิดจวลส์"

$$Z_m - M_1 = V_1$$
$$Z_m - M_2 = V_2$$
$$Z_m - M_3 = V_3$$

$$Z_m - M_n = V_n$$

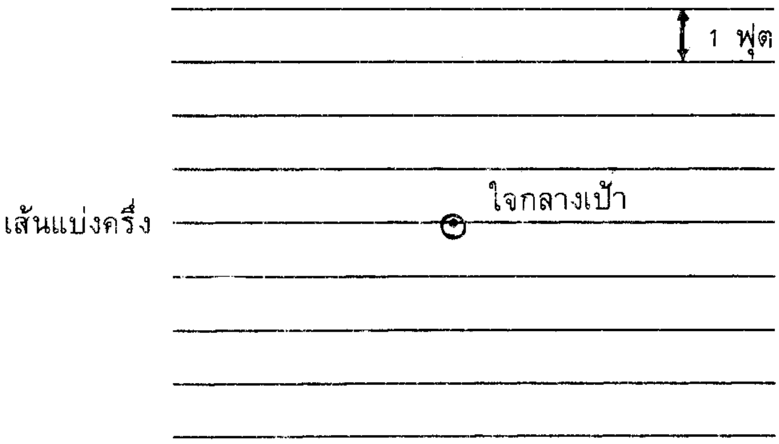
ปรากฏชัดว่าค่าที่น่าเชื่อที่สุดของ Z_m จะมีค่าย่างเข้าไปสู่ Z ยิ่งขึ้นเมื่อการรังวัด $M_1, M_2, \ldots\ldots\ldots$ มากขึ้นไปสู่อินฟินิตี้ (Infinity) และขณะเดียวกันค่า $V_1, V_2, V_3, \ldots\ldots\ldots, V_n$ มีค่าย่างไปสู่ $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots, X_n$ ยิ่งขึ้นด้วย

หากเพิ่มความประณีต และความละเอียดมากขึ้น Z_m จะเท่ากับ Z และ V'S จะเท่ากับ X'S และเมื่อจำนวนของการรังวัดยิ่งมีมาก ความแตกต่างระหว่างรีซิดจวลส์ (คือ V'S) กับความเคลื่อนคลาด (Errors) คือ X'S จะมีขนาดเล็กลง เนื่องจากกฎเกณฑ์ความน่าจะเป็นจะบังคับให้ทั้ง 2 อย่างนี้ดำเนินไปตามกฎเกณฑ์อย่างเดียวกัน โดยเหตุนี้บางที "รีซิดจวลส์" มักจะเรียกความเคลื่อนคลาดจากผลปานกลาง (Residual Errors) หรือบางทีเรียกว่า "ความเคลื่อนคลาด" (Errors) เสียเลย

การรังวัดใด ๆ ถ้าเราถือ Z_m เป็นตัวแทนตัวไม่รู้นั้น การแจกแจง หรือ การกระจายของความเคลื่อนคลาดอย่าง "เดาสุ่ม" (At Random) คงเป็นไปตามกฎเกณฑ์ดังกล่าวแล้วและกฎเกณฑ์อันนี้ยังคงรักษาความจริงอีกว่า "หากการรังวัดใด ๆ ที่มิได้กระทำโดยตรงต่อค่าของจำนวนที่ต้องการ วิธีการปรับค่าของผลการรังวัดเพื่อให้ได้ค่าที่เป็นไปได้ดีที่สุดของตัวไม่รู้ ก็คงต้องอาศัยกฎเกณฑ์การแจกแจงความเคลื่อนคลาดของการรังวัดนี้"

ในเชิงปฏิบัติพบว่าความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญของการรังวัดเดินตามกฎเกณฑ์ที่ให้คำนิยามไว้แล้วนั้นอย่างแน่นอน เพื่อสนับสนุนความจริงอันนี้ทางดีที่สุด คือ การนำเอาตัวอย่างปฏิบัติจริงมาแสดงให้ดูดังนี้

ตัวอย่าง เป้ายิงปืนสร้างขึ้นด้วยการแบ่งส่วนของเป้าออกเป็นตอน ๆ ตามทางแนวนอนด้วยการขีดเส้นกั้นห่างกัน 1 ฟุต เส้นแนวกึ่งกลางเป้าถือเป็นเส้นแบ่งครึ่งกั้นส่วนของเป้าออกเป็น 2 ภาคเท่ากัน ใช้ลูกปืน 1,000 นัดยิงไปยังเป้า



รูป 11.3

การกระจายของกระสุนที่ยิงเป้า แจกแจงอย่าง "เดาสุ่ม" ซึ่งเดินไปตามกฎเกณฑ์ดังกล่าวแล้วดังนี้

จำนวนนัด	ในช่วงว่างของตอน (ฟุต)		
1	+5.5	ถึง	+4.5
4	+4.5		+3.5
10	+3.5		+2.5
89	+2.5		+1.5
190	+1.5		+0.5
212	+0.5		−0.5
204	−0.5		−1.5
193	−1.5		−2.5
79	−2.5		−3.5
16	−3.5		−4.5
2	−4.5		−5.5
1000	0.0		0.0

ในตัวอย่างนี้ความเคลื่อนคลาดที่เห็นได้ชัด คือ ระยะทางของลูกปืนจากเส้นแบ่งครึ่งของเป้า การพิจารณาดังกล่าวพิจารณาจากการยิงเป้าด้วยจำนวนกระสุนทั้งหมด 1000 นัด หากพิจารณาลูกปืนหนึ่ง ๆ ที่ยิงไปยังเป้า ผลคาดคะเนที่ลูกปืนนี้จะตกต้องในระหว่างเส้นกั้นตอนคงเป็นดังนี้ คือ ระหว่าง

+5.5 และ	+4.5	คือ	0.001
+4.5 และ	+3.5	คือ	0.004
+3.5 และ	+2.5	คือ	0.010
+2.5 และ	+1.5	คือ	0.089
+1.5 และ	+0.5	คือ	0.190
+0.5 และ	−0.5	คือ	0.212
−0.5 และ	−1.5	คือ	0.204
−1.5 และ	−2.5	คือ	0.193
−2.5 และ	−3.5	คือ	0.079
−3.5 และ	−4.5	คือ	0.016
−4.5 และ	−5.5	คือ	0.002
			1.000

(ผลคาดคะเน) ข้างบนมีค่า = 1 และฉะนั้น นับแต่ยิงปืนจากนัดแรกไปจนถึง 1,000 นัดนั้น แสดงให้เห็นว่ากระสุนนัดที่ 1, 001 จะต้องถูกเป้าแน่ ๆ ตามกฎเกณฑ์ ผลคาดคะเนหรือความน่าจะเป็น

3. กฎเกณฑ์ความเคลื่อนคลาดของการรังวัด (Laws of Errors of Observation)

การคำนวณกฎเกณฑ์ทั่วไปของความเคลื่อนคลาดที่เกิดขึ้นจากการรังวัด และความเคลื่อนคลาดต่อไปที่จะพูดถึงนี้ให้ถือเป็นความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญ ซึ่งอยู่เหนือการศึกษาและการควบคุมทั้งในทางฟิสิคส์ และทางการคำนวณใด ๆ ความเคลื่อนคลาดอันนี้ คือ

"ความแตกต่างระหว่างค่าจริง (True value) หรือค่ามัชฌิมที่เราใช้แทนค่าจริงกับค่าที่รังวัดแต่ละค่า"

วิธีการหาค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดของตัวไม่รู้จะได้ยึดถือกฎเกณฑ์ต่อไปนี้

สมมติว่า Z คือ ค่าตัวที่เราไม่รู้ (Unknown value) ซึ่งต่อไปเราจะใช้ผลปานกลางการรังวัด หรือมัชฌิมเป็นตัวแทน

$M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots\ldots M_n$ คือ ค่าที่รังวัดสิ่งนั้นแต่ละครั้ง

$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots x_n$ คือ ความเคลื่อนคลาดของการรังวัดแต่ละครั้ง

เรานิพจน์ หรือแสดง (Express) ได้เชิงคณิตศาสตร์ง่าย ๆ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{rcl} Z - M_1 & = & x_1 \\ Z - M_2 & = & x_2 \\ Z - M_3 & = & x_3 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ Z - M_n & = & x_n \end{array}$$

ซึ่งค่า x แต่ละค่าเป็นความเคลื่อนคลาดของการรังวัด ค่า Z ซึ่งเป็นค่าที่เราต้องการทราบและเป็นค่าที่ไม่มีใครรู้ ดังนั้นเพื่อใช้ตัวแทน Z เราจึงต้องทำการรังวัดสิ่งหนึ่งใดด้วยความประณีตระมัดระวัง ใช้เวลารังวัดอยู่ในภาวะใกล้เคียงกัน เครื่องมืออย่างเดียวกันวิธีการอย่างเดียวกันแล้วหาผลปานกลาง หรือมัชฌิมของการรังวัด

4. **มัชฌิมเลขคณิตของการรังวัดมีน้ำหนักเท่ากัน** (Mean Observation of Equal Weights)

หลักเกณฑ์กล่าวมาแล้วข้างต้นได้นำไปใช้ในกิจการเกษตร, การทาง, การสถิติ และอื่น ๆ อีกมากหลาย โดยเฉพาะ คือ กิจการด้านแผนที่ชั้นสูง

สมมติ $M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots\ldots\ldots M_n$ เป็นค่ามุม AOB ที่ทำการรังวัดมาด้วยเครื่องมืออย่างเดียวกัน สภาวะอากาศ และวิธีการอย่างเดียวกัน

ให้ M_o เป็นค่ามัชฌิม หรือใช้เป็นตัวแทนตัวจริงของมุม AOB

$$\therefore M_o = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + \ldots\ldots + M_n}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} M_i}{n}$$

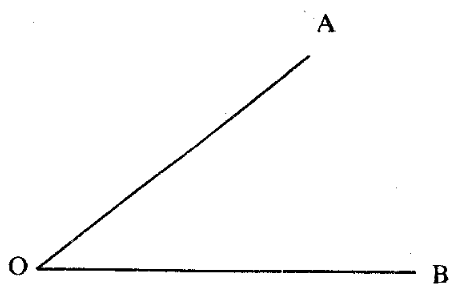
จะเห็นว่าค่ารังวัดแต่ละค่า $M_1, M_2 \ldots\ldots\ldots\ldots M_n$ นั้นจะไม่มีค่าใดเท่ากันเลย และคงจะไม่มีค่าใดเท่ากับ M_o จะเท่ากันบ้างก็โดยบังเอิญแท้ ๆ ฉะนั้นค่าของ M_o อาจมากหรือน้อย หรือไม่ก็เท่ากันกับ M_i

จากที่กล่าวมาแล้ว $Z_1, Z_2 \ldots\ldots\ldots\ldots Z_n$ คือ ความเคลื่อนคลาดจริง (Real Errors)

ถ้าให้ $V_1, V_2, V_3 \ldots\ldots\ldots\ldots V_n$ เป็นความต่างระหว่างค่ามัชฌิมกับค่ารังวัดแต่ละค่า เราเรียกค่า $V_1, V_2 \ldots\ldots\ldots\ldots V_n$ นี้ว่า "ค่าความต่างจากมัชฌิม" (Residual values)

ดังนั้นค่า V'S ก็คือ ค่าความเบี่ยงเบนของค่ารังวัดแต่ละค่า จากค่ามัชฌิมจึงเขียนได้ดังนี้

$$M_o - M_1 = V_1$$
$$M_o - M_2 = V_2$$
$$M_o - M_3 = V_3$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$M_o - M_n = V_n$$



รูป 11.4

จากความจริงอันหนึ่ง คือ M_o จะมีค่าย่างเข้าไปสู่ Z ยิ่งขึ้น หากเพิ่มการรังวัด มุม AOB จาก 1 —— ∞ และในทำนองเดียวกันค่า V_1, V_2, V_3 ....V_n จะมีค่าย่างไปสู่ค่า Z_1, Z_2, Z_3,..........Z_n ที่ตรงกันเข้าไปทุกทีจะเห็นว่า $\sum_{i=1}^{i=n} V_i = 0$

การที่ $\Sigma V = 0$ เนื่องจากการแจกแจงความเคลื่อนคลาด (Error Distribution) ได้เป็นไปตามกฎเกณฑ์ความจริงอันหนึ่ง คือ

4.1 ความคลาดเคลื่อนทาง + และทาง - มีเป็นจำนวนมาก และมีเป็นจำนวนก้ำกึ่งกัน

4.2 จำนวนความคลาดเคลื่อนที่เป็นขนาดเล็ก มีมากกว่าจำนวนความเคลื่อนคลาดที่เป็นขนาดใหญ่

4.3 จำนวนความเคลื่อนคลาดที่เป็นขนาดใหญ่ มักจะไม่เกิดขึ้นเลย เช่นตัวอย่าง

ในการทำระดับสายหนึ่งข้ามลำน้ำ ได้ทำการอ่านค่าบนไม้เล็งระดับที่ตั้งอยู่บนหัวหมุดฝั่งตรงข้ามออกมา 10 ค่าชุด ดังนี้

ค่าที่อ่านขีดส่วนแบ่งบนไม้เล็งระดับ

	V S	V^2
5.36	+ 0.00	0
5.43	+ 0.07	49
5.27	− 0.09	81
5.38	+ 0.02	04
5.37	+ 0.01	01
5.31	− 0.05	25
5.32	− 0.04	16
5.41	+ 0.05	25
5.39	+ 0.03	09
5.36	+ 0.00	0
5.36 = มัชฌิมเลขคณิต	0.00 = ΣV	0.0210 = ΣV^2

5. มัชฌิมเลขคณิตเชิงถ่วงน้ำหนักของการรังวัด (Mean Observations of Unequal Weights, or Weighted Mean)

คำว่า "น้ำหนัก" ของการรังวัดใด ๆ อาจพิจารณาถึงจำนวนครั้งที่ทำการรังวัดสิ่งใด ๆ ซ้ำกัน เมื่อเปรียบเทียบกับค่าที่รังวัด และสังเกตสิ่งนั้นด้วยจำนวนซ้ำกันผิดไปจากการรังวัดไว้เดิมเช่น

วัดระยะจาก A ถึง B โดยใช้โซ่เส้นเดียวกันวัด 20 ครั้ง ดังนี้

วัด 10 ครั้ง เฉลี่ยได้ระยะ = 1,045.3 ฟุต
วัด 8 ครั้ง เฉลี่ยได้ระยะ = 1,045.0 ฟุต
วัด 2 ครั้ง เฉลี่ยได้ระยะ = 1,045.6 ฟุต

จำนวนครั้ง 10, 8 และ 2 เราอาจนิพจน์ออกมาเป็นค่าสัมพัทธ์ คือ หาในเชิงรูปอัตราส่วนเป็น 5, 4 และ 1 ก็ได้

ระยะจาก A ถึง B วัดด้วยความประณีต และอยู่ในภาวะใกล้เคียงกัน การรังวัด 10 ครั้งแรกเป็นค่าน่าเชื่อ และดีกว่าที่เหลือ เพราะเรายิ่งเพิ่มจำนวนครั้งไปสู่ ∞ แล้ว ค่ามัชฌิมที่ได้จะย่างไปสู่ตัวไม่รู้ที่เราต้องการทราบเข้าไปทุกที ดังนี้ความน่าเชื่อในค่าทั้งหมดที่วัดมาแต่ละครั้งจึงไม่เท่ากัน จึงต้องนำเอาน้ำหนักมาพิจารณาด้วย ค่าที่รังวัด 10 ครั้งต้องใช้ความพยายามมาก เหนื่อยมากกว่า

สมมติทำการรังวัดสิ่งหนึ่ง n ครั้งได้ผลมา $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots X_n$ ซึ่งมีน้ำหนักการรังวัดเป็น $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n$ ต้องการหาค่ารังวัดที่น่าเชื่อ X_o

$$n = P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_n = \sum_{i=1}^{i=n} P_i$$

ผลการรังวัดได้ X_1 ต้องวัดมา P_1 ครั้ง, X_2 วัดมา P_2 ครั้ง และ X_n วัดมา P_n ครั้งตามลำดับ

$$\therefore\ X_o = \frac{P_1X_1 + P_2X_2 + \ldots\ldots + P_nX_n}{P_1 + P_2 + n\ldots\ldots + P_n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_iX_1}{n}$$

และถ้าให้ $V_1 = X_1 - X_o$, $V_2 = X_2 - X_o$,.......... $V_n = X_n - X_o$ แล้วเราจะได้

$$P_1V_1 = P_1X_1 - P_1X_o$$

$$P_2V_2 = P_2X_2 - P_2X_o$$

$$P_nV_n = P_nX_n - P_nX_o$$

$$P_1V_1 + P_2V_2 + \ldots + P_nV_n = (P_1X_1 - P_1X_o) + (P_2X_2 - P_2X_o) + \ldots + (P_nX_n - P_nX_o)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_iV_i = \sum_{i=1}^{i=n} P_iX_i - X_o \sum_{i=1}^{i=n} P_i$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} P_iX_i - X_o n$$

แต่ $X_o = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} P_iX_i}{n}$

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_iV_i = \sum_{i=1}^{i=n} P_iX_i - \sum_{i=1}^{i=n} P_iX_i = 0$$

ซึ่งปรากฏว่าการรังวัดด้วยเชิงถ่วงน้ำหนัก จากการที่วัดจำนวนครั้งไม่เท่ากันนั้น ผลรวมของค่าความต่างจากมัชฌิมเชิงถ่วงน้ำหนัก (Weighted Residuals) จะเท่ากับ 0

6. โค้งความน่าจะเป็น หรือโค้งความคาดคะเน (Probable Curve)

เนื่องจากผลคาดคะเนความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนอันหนึ่งเป็นฟังก์ชั่นกับความเคลื่อนคลาดนั้น

ถ้าให้ X เป็นความคลาดเคลื่อนใด ๆ และ Y เป็นผลคาดคะเนของความเคลื่อนคลาด X แล้ว กฎเกณฑ์ของผลคาดคะเนความน่าจะเป็นของความเคลื่อนคลาดใช้แทนด้วยสมการดังนี้

$$Y = f(X) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ถ้าพื้นที่ทั้งหมดอยู่ระหว่างโค้งความคาดคะเน (โค้งระฆังคว่ำ) และแกน X ให้มีค่า

เป็น 1 แล้ว ผลคาดคะเนที่ความเคลื่อนคลาดของการรังวัดจะตกอยู่ระหว่างขนาด X และ X + dX จะใช้แทนด้วยพื้นที่อยู่ใต้โค้ง, แกน X และพิกัดตั้ง (Ordinates) ของโค้ง ณ ความเคลื่อนคลาด X กับ X + dX คือ

$$Y.dX = f(X).dX \qquad \text{..........................(2)}$$

ผลคาดคะเนอาจหาได้ถ้าเราทราบรูปฟังค์ชั่น f(X) ใน (1) และ (2) เมื่อพูดถึงโค้งความเคลื่อนคลาดโดยใช้โค้งนั้นแทนกฎเกณฑ์การเกิดของความเคลื่อนคลาดในการรังวัดแล้ว จะได้นำ (1) และ (2) พิจารณาต่อไป

หากเราพิจารณาถึงความเคลื่อนคลาด คือ ค่ารังวัดต่างไปจากค่าที่น่าเชื่อที่สุดของการรังวัดแล้ว เราใช้ V (เป็นค่าต่างจากมัชฌิมดังกล่าวแล้ว) แทน X ใน (1) และ (2) จะมีรูป

$$Y = f(V) \qquad \text{..........................(3)}$$

และ $Y.dV = f(V).dV$ ....(4)

สมมติให้การรังวัด หรือการสังเกตมีจำนวน n ครั้ง โดยมีน้ำหนักอย่างเดียวกัน โดยได้ผลการรังวัดเป็น $M_1, M_2, M_3, \ldots\ldots M_n$ ซึ่งผลการรังวัดนี้เป็นฟังค์ชั่นกับจำนวนตัวไม่รู้ (Unknowns) $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots\ldots\ldots Z_q$

ให้ค่าต่างจากมัชฌิมเป็น $V_1, V_2, V_3, \ldots\ldots\ldots V_n$ กับให้ผลคาดคะเนการเกิดขึ้นของค่าต่างจากมัชฌิมเป็น

$f(V_1).dV$, $f(V_2).dV$,..........$f(V_n).dV$ ตามลำดับ

ดังนั้นผลคาดคะเนการเกิดขึ้นพร้อม ๆ กันของค่าต่างจากมัชฌิมทั้งหมด คือ

$$P = f(V_1).dV \,.\, f(V_2).dV \,.\, f(V_3).dV \ldots\ldots f(V_n).dV_n$$

$$= f(V_1).f(V_2).f(V_3) \ldots\ldots f(V_n)(dV)^n \ldots\ldots(5)$$

$$\therefore \log P = \log f(V_1) + \log f(V_2) + \ldots\ldots + \log f(V_n) + n \log(dV) \ldots(6)$$

ฉะนั้น ค่ารังวัดที่น่าเชื่อที่สุดของ $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots\ldots\ldots Z_q$ คือ ค่าเหล่านั้นที่ทำให้ P ใน (5) หรือ log P ใน (6) มีค่าสูงสุด (Maximum)

โดยการ Partial Differentiate สมการ (6) แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0 จะได้

$$\frac{\partial \log P}{\partial Z} = \frac{1}{f(V_1)} \quad \frac{\partial f(V_1)}{\partial Z_1} + \frac{1}{f(V_2)} \cdot \frac{\partial f(V_2)}{\partial Z_1} + \ldots + \frac{1}{f(V_n)} \cdot \frac{\partial f(V_n)}{\partial Z_1} = 0$$

$$\frac{\partial \log P}{\partial Z_2} = \frac{1}{f(V_1)} \cdot \frac{\partial f(V_1)}{\partial Z_2} + \frac{1}{f(V_2)} \cdot \frac{\partial f(V_2)}{\partial Z_2} + \ldots + \frac{1}{f(V_n)} \cdot \frac{\partial f(V_n)}{\partial Z_2} = 0$$

. . . .(7)

. . . .

$$\frac{\partial \log P}{\partial Z_q} = \frac{1}{f(V_1)} \cdot \frac{\partial f(V_1)}{\partial Z_q} + \frac{1}{f(V_2)} \cdot \frac{\partial f(V_2)}{\partial Z_q} + \ldots + \frac{1}{f(V_n)} \cdot \frac{\partial f(V_n)}{\partial Z_q} = 0$$

แต่ $\frac{\delta f(V)}{\delta Z} = f(V). \frac{\delta V}{\delta Z}$ ....(8)

เพื่อความสะดวกเราให้ $\frac{f'(V)}{f(V)} = \varnothing(V)$ ....(9)

นำ (8) และ (9) แทน (7) จะได้

$$\varnothing(V_1). \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} + \varnothing(V_2). \frac{\partial V_2}{\partial Z_1} + \ldots + \varnothing(V_n). \frac{\partial V_n}{\partial Z_1} = 0$$

$$\varnothing(V_1). \frac{\partial V_1}{\partial Z_2} + \varnothing(V_2). \frac{\partial V_2}{\partial Z_2} + \ldots + \varnothing(V_n). \frac{\partial V_n}{\partial Z_2} = 0$$

. . . .,..(10)

. . . .

$$\varnothing(V_1). \frac{\partial V_1}{\partial Z_q} + \varnothing(V_2). \frac{\partial V_2}{\partial Z_q} + \ldots + \varnothing(V_n). \frac{\partial V_n}{\partial Z_q} = 0$$

ใน (10) มีตัวยังไม่รู้ (Unknowns) คือ $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Z_q$ และมีจำนวนสมการเท่ากับตัวไม่รู้ ฉะนั้นตราบใดเมื่อเราได้ $\varnothing(V)$ เราอาจแก้สมการเพื่อหาค่าที่น่าเชื่อของ $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Z_q$ ได้

เนื่องจากที่กล่าวมานี้พิจารณาถึงกรณีทั่ว ๆ ไป และผลลัพท์ ดังกล่าวจะเป็นจริงเสมอ ไม่ว่าจำนวนตัวไม่รู้ และรูปฟังก์ชั่นที่วัด หรือสังเกตมาจะเป็นไปในรูปใดก็ตาม สำหรับ $\varnothing(V)$ ซึ่งกำหนดขึ้นเฉพาะเรื่องเป็นพิเศษนั้น ย่อมใช้ได้ในสมการ (10) ในทุกกรณี

ให้ Z เป็นค่าของตัวไม่รู้ (Unknown) ตัวหนึ่งที่เราไปทำการรังวัด หรือสังเกตมาด้วยจำนวนการรังวัด n ค่า น้ำหนักเท่ากัน ผลการรังวัดเป็น $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots\ldots\ldots m_n$ และค่าต่างจากมัชฌิมเป็น $V_1, V_2, V_3, \ldots\ldots\ldots\ldots V_n$

ค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุด ของ Z_1 คือ

$$Z_1 = m_1 - V_1 = m_2 - V_2 = m_3 - v_3 = \ldots\ldots = m_n - V_n$$

โดย Partial Differentiation มุ่งต่อ Z_1 จะได้

$$1 = -\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} = -\frac{\partial V_2}{\partial Z_1} = -\frac{\partial V_3}{\partial Z_1} = -\ldots\ldots\ldots - \frac{\partial V_n}{\partial Z_1} \quad \ldots\ldots(11)$$

นำค่าใน (11) แทนใน (10) แล้วเปลี่ยนเครื่องหมายทั้งหมดจะได้

$$\varnothing(V_1) + \varnothing(V_2) + \varnothing/V_3) + \ldots\ldots\ldots + \varnothing(V_n) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

จากที่กล่าวมาแล้ว $\sum_{i=1}^{i=n} V_i = 0$ ตอนนี้ถ้าจำนวนการรังวัดต่อตัวไม่รู้ (Unknown) นั้นเพิ่มมากยิ่งขึ้น ๆ คือ $n \to \infty$ จะทำให้ค่าของ $V_1, V_2, V_3, \ldots\ldots\ldots\ldots V_n$ มีค่าย่างไปสู่ $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots X_n$ เข้าไปทุกที

เมื่อ n มีมากพอ ค่า $V_1, V_2, V_3, \ldots\ldots\ldots V_n$ ก็จะเท่ากับค่า $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots X_n$ เมื่อเป็นเช่นนี้

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots\ldots + X_n = 0 \text{ ด้วย}$$

$$\therefore \quad \varnothing(V_1) + \varnothing(V_2) + \ldots\ldots + \varnothing(V_n) = C(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots + X_n)$$

$$= C(V_1 + V_2 + V_3 \ldots\ldots + V_n)$$

$$= C\sum_{i=1}^{i=n} V_i \quad \ldots\ldots\ldots(13)$$

นั่นคือ $\varnothing(V) = C.V$ (ซึ่ง C = ตัวคงที่)

นำค่านี้แทนใน (9) ได้

$$f'(V) = f(V).CV \quad \ldots\ldots\ldots(14)$$

นำ (14) แทนใน (8) จะได้

$$\frac{\partial f(V)}{\partial Z} = f(V).CV.\frac{\partial V}{\partial Z}$$

หรือ

$$\frac{1}{f(V)}.\frac{\partial f(V)}{\partial Z} = CV.\frac{\partial V}{\partial Z}$$

$$\frac{1}{f(V)}.\partial f(V) = CV.\partial V \quad \ldots\ldots\ldots(15)$$

โดย Intetrate (15) จะได้

$$\int \frac{1}{f(V)}.\partial f(V) = C\int V\partial V$$

$$\log f(V) = \frac{1}{2}CV^2 + C'$$

$$\therefore \quad f(V) = e^{\frac{1}{2}CV^2}.e^{C'} = e^{(\frac{1}{2}CV^2 + C')} \quad \ldots\ldots\ldots(16)$$

ถ้าให้ $k = e^{C'}$ นำแทน (16) ได้

$$Y = f(V) = ke^{\frac{1}{2}CV^2} \quad \ldots\ldots\ldots(17)$$

จากการพิจารณาโค้ง $Y = ke^{-\frac{1}{2}CV^2}$ ปรากฏว่า V เพิ่มขึ้น Y กลับมีค่าลดลง โดยเหตุนี้กำลังของ e จะต้องเป็นเครื่องหมายลบ (−) คือ

$$Y = ke^{-\frac{1}{2}CV^2}$$

ให้ $\frac{1}{2}C = h^2$ หรือ $C = 2h^2$

$$\therefore \quad Y = ke^{-h^2V^2} \quad \ldots\ldots\ldots(18)$$

7. หลักเกณฑ์ของความน่าจะเป็น หรือการคาดคะเน (Principles of Probability)

คำว่าความน่าจะเป็น เป็นการคาดคะเนในความหมาย และเหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ หมายถึง "จำนวนหนึ่งจำนวนใดที่เล็กกว่า 1 ซึ่งเป็นอัตราส่วนของจำนวนวิถีทางที่เหตุการณ์อันใดอันหนึ่งอาจเกิดขึ้น หรือไม่เกิดขึ้นเลย เมื่อคิดเทียบจากวิถีทางที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด" วิถีทางของเหตุการณ์แต่ละอันที่จะเกิดขึ้นนั้นย่อมมีโอกาสเท่า ๆ กัน ดังนั้นถ้าเราโยนสตางค์ขึ้นไปการคาดคะเนถึงเหตุการณ์ที่สตางค์จะเป็นหัวหรือก้อยย่อมมีได้ 2 ทางเท่านั้น คือ สตางค์อาจหงายตัว หรือก้อยอย่างใดอย่างหนึ่ง จะให้มันหงายทั้งหัว และก้อยพร้อมกันนั้นไม่มีทางเป็นไปได้ จะเป็นได้เฉพาะอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียวเท่านั้น ซึ่งทั้งหัวและก้อยต่างมีโอกาสจะหงายได้เท่า ๆ กัน ฉะนั้นความน่าจะเป็น หรือการคาดคะเนจะให้เกิดหัว (หรือเกิดก้อย) เมื่อโยนสตางค์ขึ้นไปจึงแสดง หรือนิพจน์ (Express) ออกมาในรูปเศษส่วนได้เท่ากับ $\frac{1}{2}$

ในการโยนลูกเต๋าขึ้นไปซึ่งลูกเต๋ามีอยู่ 6 หน้าด้วยกัน แต่ละหน้ามีโอกาสหงายขึ้นเท่า ๆ กัน สมมุติให้ เอซ (Ace) เป็นหน้าที่เราพิจารณา โอกาสที่หน้าเอซจะหงายขึ้นผลคาดคะเนมีอยู่ $\frac{1}{6}$ ในการโยนครั้งหนึ่ง และผลคาดคะเนที่เอซจะไม่หงายขึ้นมีอยู่ $\frac{5}{6}$ ซึ่งมีอยู่ 5 เท่าผลคาดคะเนจะหงาย

กล่าวโดยทั่วไป หากเหตุการณ์อันหนึ่งอาจเกิดขึ้น a ทาง และจะไม่เกิดขึ้นมีอยู่ b ทาง เช่นนี้แล้ว และในแต่ละเหตุการณ์ที่จะเกิด และไม่เกิดมีโอกาสเป็นไปได้เท่า ๆ กัน ฉะนั้น ผลคาดคะเนในการเกิดของเหตุการณ์จึงนิพจน์ได้เป็น $\frac{a}{a+b}$ และผลคาดคะเนที่เหตุการณ์นั้นจะไม่เกิดเป็น $\frac{b}{a+b}$

8. สัญลักษณ์ของ 1 และ 0 ในทางผลคาดคะเน

ผลคาดคะเนเรามักนิพจน์ออกมาในรูปเศษส่วนแบบไม่มี**ตัวมีตน** และเป็นเครื่องวัดทางจำนวนอันหนึ่งถึงขั้นความเชื่อมั่นต่อเหตุการณ์ที่จะเกิด **หรือ**ไม่เกิด เนื่องจากเครื่องวัดทางจำนวนนี้ อาจมีพิสัย หรือย่านจาก 0 ถึง 1 ดังนั้นความ**เชื่อมั่น**ทางจิตใจของผู้คาดคะเน

ก็อาจมีพิสัยจาก "สิ่งที่ไม่อาจเป็นไปได้จนถึงเป็นไปได้แน่ ๆ" ถ้าเศษส่วนเป็น ๐ แสดงว่าเป็นไปไม่ได้ ถ้าเป็น $\frac{1}{2}$ แสดงว่าโอกาสจะเกิด และไม่เกิดมีเท่ากัน ถ้าเป็น 1 เหตุการณ์นั้นเชื่อว่าเกิด (หรือไม่เกิด) แน่

ในเรื่องความน่าจะเป็น หรือผลคาดคะเนนี้ คำว่า "1" เป็นสัญลักษณ์เชิงคณิตศาสตร์ใช้แทนคำว่า เกิด (หรือไม่เกิด) แน่ และถ้าหากเหตุการณ์อันหนึ่งอาจไม่เกิดขึ้น และหรืออาจมีโอกาสเกิดขึ้นก็ได้เช่นนี้แล้ว ผลรวมของผลคาดคะเนในการเกิด และไม่เกิดจะได้เท่ากับ 1 เช่น

ถ้า P เป็นผลคาดคะเนว่าเหตุการณ์อันหนึ่งจะเกิดขึ้น

และ $1 - P$ เป็นผลคาดคะเนว่าเหตุการณ์อันหนึ่งนั้นจะไม่เกิด Σ ของผลคาดคะเนในการเกิด หรือไม่เกิด $= P + 1 - P = 1$

ในการซื้อล็อตเตอรี่ 1 ฉบับ ในจำนวนที่ออกทั้งหมด 3,000 ฉบับ ผลคาดคะเนจะถูกล็อตเตอรี่คงเป็น $\frac{1}{3,000}$ ดังนั้นผลคาดคะเนในการจะไม่มีโอกาสถูกล็อตเตอรี่คงเป็น $\frac{2,999}{3,000}$ ซึ่งเป็นเศษส่วนที่มีขนาดโตมาก

๙. เหตุการณ์ที่ไม่ขึ้นแก่กัน (Independent Event)

เมื่อเหตุการณ์อันหนึ่งอาจเกิดขึ้นในวิถีทางต่าง ๆ ที่เป็นอิสระต่อกัน ผลคาดคะเนในการเกิดขึ้นของเหตุการณ์นั้นย่อมเท่ากับผลรวมของผลคาดคะเนต่าง ๆ เหล่านั้นแยกจากกัน เช่น ถ้าเหตุการณ์หนึ่งอาจเกิดขึ้น a ทาง และอาจเกิดขึ้นอีก a′ ทาง ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน และมีทางที่จะเกิดได้ทั้งหมด C ทาง เช่นนี้แล้วผลคาดคะเนของการเกิดขึ้นของเหตุการณ์นั้นคงเป็น $\frac{a + a'}{C}$ และผลอันนี้ก็คือ ผลรวมของผลคาดคะเน $\frac{a}{C}$ และ $\frac{a'}{C}$ นั่นเอง ซึ่งต่างก็เป็นผลคาดคะเนที่อาจเกิดขึ้นในลักษณะที่เป็นอิสระต่อกัน และแยกจากกัน เพื่อให้แจ่มแจ้งยิ่งขึ้นจะได้ยกตัวอย่างง่าย ๆ ดังนี้

สมมุติว่าในถุงใบหนึ่งมีลูกบอลล์อยู่ด้วยกันทั้งหมด 60 ลูก ในจำนวนนี้มีสีแดงเสีย 15 ลูก, สีดำเสีย 25 ลูก และสีขาวมี 20 ลูก หากจะควักเอาลูกบอลล์ออกมาสักลูกหนึ่งนั้น

ผลคาดคะเนในการจะให้ลูกแดงคือ $\frac{15}{60}$, สีดำ คือ $\frac{25}{60}$ และสีขาว คือ $\frac{20}{60}$ หากจะให้ควักออกมาโดยคาดคะเนให้ได้ลูกบอลล์สีแดง หรือสีดำก็ได้แล้วก็คือ $\frac{15}{60} + \frac{25}{60} = \frac{40}{60}$

10. เหตุการณ์เชิงผสม (Compound Event)

เหตุการณ์เชิงผสม คือ เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจากการที่เหตุการณ์ธรรมดา หรือเหตุการณ์สำคัญหลาย ๆ เหตุการณ์เกิดร่วมกัน และแต่ละเหตุการณ์นั้นต่างเป็นอิสระต่อกัน เช่น

สมมติโยนลูกเต๋าขึ้นไป 3 ลูกเพื่อให้หงายเอซทั้ง 3 อัน ในการโยนครั้งหนึ่ง ลักษณะนี้เป็นเหตุการณ์เชิงผสมที่เหตุการณ์ธรรมดา 3 เหตุการณ์จะร่วมกันเกิดขึ้น (คือ 3 เอซ)

ผลคาดคะเนของการเกิดขึ้นของเหตุการณ์เชิงผสม คือ ผลคูณของการคาดคะเนของเหตุการณ์ที่สำคัญที่เป็นอิสระต่อกันเท่านั้น เพื่อเข้าใจง่ายขึ้นให้พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

10.1 มีถุง 2 ใบ

10.2 ใบหนึ่งบรรจุลูกบอลล์สีดำ 7 ลูก และสีขาว 9 ลูก และอีกใบหนึ่งบรรจุสีดำ 4 ลูก สีขาว 11 ลูก

ผลคาดคะเนในการควักลูกบอลล์สีดำมาลูกหนึ่งจากถุงใบแรก คือ $\frac{7}{16}$ และจากถุงใบที่สอง คือ $\frac{4}{15}$ จึงมีปัญหาว่าผลคาดคะเนของเหตุการณ์เชิงผสมนี้จะเป็นเท่าไรที่จะควักลูกบอลล์สีดำออกมา 2 ลูกจากถุงทั้งสองทันทีทันใดนั้น

เนื่องจากลูกบอลล์แต่ละลูกในถุงแรกอาจจัดเข้าคู่กับลูกบอลล์สีใดสีหนึ่งกับถึงใบที่สอง ถ้าจะควักลูกบอลล์ออกมา 2 ลูก ก็มีทางที่จะกระทำได้ถึง 16×15 ทาง โดยที่ลูกบอลล์

สีดำแต่ละลูกในจำนวน 7 ลูกในถุงใบแรกนั้น อาจร่วมเข้าคู่กันกับลูกใดลูกหนึ่งในจำนวนลูกบอลล์สี่ลูกในถุงใบที่สองนั้น มีทางที่จะทำได้เพื่อควักลูกบอลล์สีดำออกมา 2 ลูกใน 2 ถุง คือ มีอยู่ 7×4 ทาง ผลคาดคะเนเชิงผสมที่เหตุการณ์ดังกล่าวจะเกิดขึ้นได้จากเหตุการณ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด คือ $\frac{7 \times 4}{16 \times 15}$ หรือ $\frac{7}{16} \times \frac{4}{15}$

ข้อควรสังเกต ความเคลื่อนคลาดการควักลูกบอลล์อาจพิจารณาเป็นเหตุการณ์เชิงผสม เพราะความเคลื่อนคลาดในการควักลูกบอลล์เป็นผลมาจากความเคลื่อนคลาดอิสระเล็ก ๆ น้อย ๆ จากอิทธิพลโดยบังเอิญต่าง ๆ ที่เข้ามามีส่วนทำให้เกิดความเคลื่อนคลาดขึ้น

เพื่อพิจารณาหลักเกณฑ์ทั่วไปยิ่งขึ้นไปอีก ให้พิจารณาถึงเหตุการณ์สำคัญ 2 เหตุการณ์

เหตุการณ์แรกอาจเกิดขึ้น a_1 ทาง และไม่เกิดอยู่ b_1 ทาง
เหตุการณ์อันที่สองอาจเกิดขึ้นใน a_2 ทาง และไม่เกิดขึ้นอยู่ b_2 ทาง

ฉะนั้นกรณีที่เป็นไปได้สำหรับเหตุการณ์อันแรก และอันที่สอง คือ $a_1 + b_1$ และ $a_2 + b_2$ ตามลำดับ และแต่ละกรณีนอกจาก $a_1 + b_1$ อาจจะร่วมกับแต่ละกรณีนอกเหนือจากกรณี $a_2 + b_2$ ดังนั้นกรณีทั้งหมดสำหรับ 2 เหตุการณ์นั้น คือ $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)$ ซึ่งแต่ละกรณีต่างก็มีโอกาสจะเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน

ใน a_1a_2 ทั้งสองนี้เป็นเหตุการณ์ที่อาจเกิดขึ้น ในกรณี b_1b_2 ทั้งสองนี้ไม่เกิดใน $a'b_2$ อันแรกเกิดอันหลังไม่เกิด และ a_2b_1 อันแรกเกิดอันหลังไม่เกิด ดังนั้นผลคาดคะเนเหตุการณ์เชิงผสมในข้อ 3.4 จึงอาจเขียนได้

ผลคาดคะเนที่ทั้ง 2 เกิดขึ้น......... $\frac{a_1a_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}$

ผลคาดคะเนที่ทั้ง 2 ไม่เกิด........ $\frac{b_1b_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}$

ผลคาดคะเนอันแรกเกิด อันที่ 2 ไม่เกิด..... $\frac{a_1b_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}$

ผลคาดคะเนอันแรกเกิด อันที่ 2 ไม่เกิด........ $\frac{a_2b_1}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}$

เนื่องจากผลคาดคะเนแต่ละอันเหล่านี้ คือ ผลคูณของเหตุการณ์สำคัญ และหลักเกณฑ์อันนี้ได้กล่าวถึงเฉพาะในเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ แม้จะมีเหตุการณ์ที่มากกว่าดังกล่าวนี้เช่นเป็น 3 หรือมากกว่าก็ไม่เป็นเรื่องยุ่งยากใด ๆ

ดังนั้น ถ้ามีเหตุกาสรณ์ 4 เหตุการณ์ P_1, P_2, P_3 และ P_4 เป็นผลคาดคะเนของการเกิดขึ้นตามลำดับ เราจะได้ผลคาดคะเนซึ่งเหตุการณ์ทั้งหมดจะเกิดคือ $P_1.P_2.P_3.P_4$ และผลคาดคะเนในการไม่เกิดของเหตุการณ์ คือ $(1 - P_1).(1 - P_2).(1 - P_3).(1 - P_4)$

ผลคาดคะเนซึ่งอันแรกเกิด และอีก 3 เหตุการณ์ไม่เกิด คือ $P_1(1 - P_2)(1 - P_3)(1 - P_4)$ ตามลำดับ

11. เหตุการณ์น่าจะเป็นที่น่าเชื่อที่สุดในบรรดาเหตุการณ์ทั้งหลาย

เหตุการณ์ที่น่าเชื่อที่สุดในบรรดาเหตุการณ์ทั้งหลายก็คือ เหตุการณ์ซึ่งมีความน่าจะเป็นทางคำนวณที่น่าเชื่อที่สุด เช่น เราโยนเหรียญบาทจำนวน 2 เหรียญขึ้นไปในเวลาเดียวกัน เหตุการณ์เชิงผสมจะเกิดขึ้นต่อไปนี้ 3 กรณีด้วยกัน ซึ่งมีผลคาดคะเนตามลำดับต่อไปนี้

11.1 เหรียญบาททั้ง 2 เหรียญอาจเป็นหัวด้วยกัน........ $\frac{1}{4}$

11.2 อันหนึ่งเป็นหัว อันหนึ่งเป็นก้อย........................ $\frac{1}{2}$

11.3 ทั้ง 2 เหรียญขึ้นก้อยด้วยกัน............................ $\frac{1}{4}$

จากที่กล่าวนี้จะพบว่าในข้อ 6.11.2 อันหนึ่งอาจเป็นหัว อีกอันหนึ่งอาจเป็นก้อยเป็นผลคาดคะเนที่โตมาก คือ น่าจะเป็นมากกว่าข้อ 6.11.1 และข้อ 6.11.2 ฉะนั้นในข้อ 6.11.2 จึงเป็นเหตุการณ์น่าจะเป็นที่น่าเชื่อว่าจะเกิดมากที่สุดในเหตุการณ์เชิงผสมทั้ง 3 นั้น ผลรวมของผลคาดคะเน $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{4}$ คือ 1 ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากมีเหตุการณ์อันหนึ่งใน 3 เหตุการณ์นั้นมีความเชื่อมั่นจะเกิดขึ้นแน่นอน

สมมติทำการวัดระยะแนวเส้นตรงอันหนึ่ง 4 ครั้ง ได้ค่าดังนี้ 830.3, 830.4, 830.5 และ 830.6 เมตร มัชฌิมเลขคณิต หรือผลปานกลางเชิงเลขคณิตเป็น 830.45 เมตร ซึ่งเป็นระยะที่น่าเชื่อที่สุดที่ยอมรับกันโดยทั่วไป อาจกล่าวถึงผลที่เกิดนี้ได้ว่า "ผลคาดคะเนเชิง

คำนวณที่ได้นี้มีความน่าเชื่อว่าเป็นระยะที่ถูกจริงมากกว่าค่ารังวัดมาแต่ละค่า"

เหตุการณ์เชิงผสมประกอบด้วยเหตุการณ์ธรรมดาจำนวนหนึ่ง ในเหตุการณ์ธรรมดาทั้งหลาย

ต่อไปนี้จะได้พิจารณาถึงเหตุการณ์เชิงผสมใด ๆ ย่อมประกอบด้วยเหตุการณ์ธรรมดาจำนวนหนึ่ง เช่น

ให้ P เป็นผลคาดคะเนในการเกิดของเหตุการณ์อันหนึ่งในการทดลองครั้งหนึ่ง

Q เป็นผลคาดคะเนของการไม่เกิดของเหตุการณ์นั้น

ดังนั้น $P + Q = 1$

และสมมติให้มีเหตุการณ์ชนิดนี้อยู่ n เหตุการณ์แล้ว ผลคาดคะเนที่เหตุการณ์ทั้งหมดจะเกิดขึ้น คือ P^n (ดูข้อ 3.4) ผลคาดคะเนที่เหตุการณ์อันหนึ่งที่กำหนดจะให้ไม่เกิด และ $n - 1$ ให้เกิด คือ $P^{n-1}.Q$ และเนื่องจากเหตุการณ์นี้อาจเกิดขึ้น n ทาง ผลคาดคะเนที่เหตุการณ์หนึ่งจะไม่เกิด และ $n - 1$ เกิด คือ $nPn-1.Q$

ในทำนองเดียวกันผลคาดคะเนเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่กำหนดขึ้นไม่ให้เกิด และ $n - 2$ ให้เกิด คือ $P^{n-2}.Q^2$ และอันนี้อาจกระทำได้ใน $\frac{n(n-1)}{2}$ ทาง ผลคาดคะเนที่ 2 เหตุการณ์จากเหตุการณ์ทั้งหมดจะไม่เกิด และ $n - 2$ เกิด คือ $\frac{n(n-1)}{2}.P^{n-2}.Q^2$ ดังนั้นถ้ากระจาย $(P + Q)^n$ ออกเป็นรูปเทอมกำลังคู่ (Binormial) จะได้

$$(P + Q)_n = P^n + nP^{n-1}.Q + \frac{n(n-1)}{1 \times 2}.P^{n-2}.Q^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1 \times 2 \times 3\ldots\ldots\ldots \times m}.P^{n-m}.Q^m + \text{etc.}$$

เทอมแรก คือ ผลคาดคะเนที่เหตุการณ์ทั้งหมดจะเกิด เทอมที่ 2 คือ ผลคาดคะเนที่ $n - 1$ จะเกิด และเหตุการณ์หนึ่งไม่เกิด และเทอมที่ $m + 1$ คือ ผลคาดคะเนที่ $n - m$ จะเกิด และ m จะไม่เกิด

ดังนั้น เพื่อกำหนดหากรณีที่ผลคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุด นั้นจำเป็นต้องหาเทอมในอนุกรมนี้ ซึ่งเป็นจำนวนใหญ่ที่สุด

ขณะใดขณะหนึ่งโดยเฉพาะเมื่อ $P = Q = \frac{1}{2}$ ซึ่งตรงกันกับกรณีที่โยนสตางค์ขึ้นไป n อัน แล้วอนุกรมนี้จะเป็น

$$(\tfrac{1}{2})^n\ n(\tfrac{1}{2})^n + \frac{n(n-1)}{1 \times 2}.(\tfrac{1}{2})^n + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}.(\tfrac{1}{2})^n + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ซึ่งเทอมกลางเป็นเทอมที่โตที่สุดถ้า n เป็นเลขคู่ และถ้า n เป็นคี่จะทำให้เทอมกลาง 2 เทอมเท่ากัน เช่น

ถ้า $n = 6$

อนุกรมที่ได้ คือ

$$(\tfrac{1}{2})^6 + 6(\tfrac{1}{2})^6 + \frac{6(6-1)}{1 \times 2}(\tfrac{1}{2})^6 + \frac{6(6-1)(6-2)}{1 \times 2 \times 3}.(\tfrac{1}{2})^6$$

หรือ

$$\frac{1}{64} + \frac{6}{64} + \frac{15}{64} + \frac{20}{64} + \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64}$$

ฉะนั้น หากโยนสตางค์ 6 อันขึ้นไป ผลคาดคะเนจากเหตุการณ์กรณีต่าง ๆ จึงเป็นดังนี้

เป็นหัวทั้งหมด................................	$\frac{1}{64}$	..........(1)
ขึ้นหัว 5 อัน และขึ้นก้อย 1 อัน............	$\frac{6}{64}$	..........(2)
ขึ้นหัว 4 อัน และขึ้นก้อย 2 อัน............	$\frac{15}{64}$	..........(3)
ขึ้นหัว 3 อัน และขึ้นก้อย 3 อัน............	$\frac{20}{64}$	..........(4)
ขึ้นหัว 2 อัน และขึ้นก้อย 4 อัน............	$\frac{15}{64}$	..........(5)
ขึ้นหัว 1 อัน และขึ้นก้อย 5 อัน............	$\frac{6}{64}$	..........(6)
เป็นก้อยทั้งหมด..............................	$\frac{1}{64}$	..........(7)

$$\Sigma\,(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) = 1$$

12. กฎการคาดคะเนความเคลื่อนคลาด (Law of Probability of Error)

การคาดคะเนจากความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญที่กำหนดขึ้นอันหนึ่งในชุดของการรังวัด คือ "อัตราส่วนระหว่างจำนวนความเคลื่อนคลาดของขนาดนั้นต่อจำนวนความเคลื่อนคลาดทั้งหมด"

วิธีการศึกษาเรื่องนี้มักจะอ้างอิงในเรื่องวิธีกำลังสองต่ำสุด คือ ว่าระยะระหว่างลูกปืนทั้งหลายที่ยิงไปยังเป้านั้นกับความเคลื่อนคลาดจากการสังเกตพิจารณา คนยิงเป้ารายงานหรือตอบผู้สังเกตพิจารณาถึงตำแหน่งของลูกปืนในการยิงครั้งหนึ่ง ๆ และบอกถึงระยะจากรอยลูกปืนเจาะแผ่นเป้าไปถึงศูนย์กลางของเป้าเป็นความเคลื่อนคลาด ความเคลื่อนคลาดที่เป็นจำนวนคงที่ก็ดี หรือว่าผู้ยิงเป้าเล็งยิงไปถูกตนเองตายอันเนื่องจากความดึงดูดก็ดี เหล่านี้จะไม่นำมาพิจารณาในการเล็งปืน เป็นที่ยอมรับกันแล้วว่าการเฉไปของลูกปืนจากศูนย์กลางเป้า หรือความเคลื่อนคลาดนั้นเป็นในรูปที่มีระเบียบอันหนึ่ง และเป็นชนิดสมนัยกัน

ประการที่ 1 ปรากฏว่าความเคลื่อนคลาดขนาดเล็กเกิดขึ้นบ่อยกว่าความเคลื่อนคลาดขนาดใหญ่

ประการที่ 2 ปรากฏว่าความเคลื่อนคลาดที่ลูกปืนไปตกด้านหนึ่งมีจำนวนเท่า ๆ กับลูกปืนที่ไปตกอีกด้านที่อยู่ตรงข้าม

ประการที่ 3 ปรากฏว่าความเคลื่อนคลาดที่มีขนาดใหญ่จะไม่เกิดขึ้น

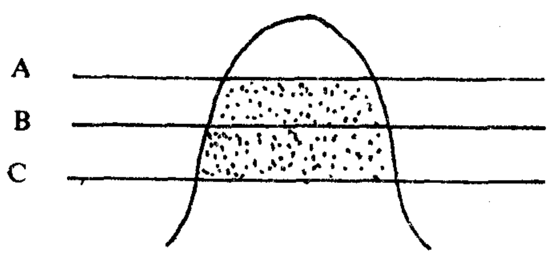
อนึ่ง เป็นที่ยอมรับว่าคนยิงเป้าที่มีทักษะสูงมากขึ้นเท่าไร ลูกปืนก็จะไปรวมกลุ่มใกล้จุดที่เขาเล็งมากขึ้นเท่านั้น

ตัวอย่าง ต่อไปนี้เป็นรายงานของหัวหน้าสรรพาวุธในการยิงเป้าเมื่อปี พ.ศ. 2421 ในจำนวนกระสุน 1,000 นัด โดยยิงอย่างใช้ความละเอียด และพิถีพิถันที่สุดจากปืนใหญ่ เป้าอยู่ห่างจากที่ตั้งยิงระยะ 200 หลา เป้ายาว 52 ฟุต สูง 11 ฟุต และจุดที่เล็ง คือ แนวระดับย่านกลาง ปรากฏว่าทุกนัดถูกเป้า แต่มีไม่กี่นัดที่ถูกขอบเป้าบน และล่าง และจำนวนนัดที่ถูกเป้าอยู่เหนือ และใต้แนวระดับมีจำนวนเกือบเท่ากัน ในบันทึกการยิงครั้งนี้ ลากเส้นแนวนอนขึ้นหลายเส้นแบ่งเป้าออกเป็น 11 ส่วนเท่ากัน แล้วนับจำนวนที่ตกอยู่ในส่วนที่แบ่งนี้จะได้ผล ดังนี้

ส่วนบนสุด	1	นัด
ส่วนที่ 2	4	"
ส่วนที่ 3	10	"
ส่วนที่ 4	69	"
ส่วนที่ 5	190	"
ส่วนกลาง (ส่วนที่ 6)	212	"
ส่วนที่ 7	204	"
ส่วนที่ 8	193"	
ส่วนที่ 9	79	"
ส่วนที่ 10	10	"
ส่วนล่างสุด	2	"
รวมทั้งหมด	1,000	นัด

ในรูปข้างล่างนี้แสดงถึงการแจกแจงของลูกปืนที่ยิงไปยังเป้า โดยอาศัยเส้นพิกัดตั้ง

ให้ A เป็นส่วนแบ่งอันบนสุด B เป็นส่วนแบ่งอันกลาง และ C เป็นส่วนแบ่งอันล่างสุด ปรากฏว่ามีจำนวนลูกปืนไปรวมกลุ่มใต้เส้นกลางอยู่มากนิดหน่อยกว่าข้างบน ทั้งนี้มีเหตุผลพอเชื่อถือได้ว่าเป็นเพราะความเคลื่อนคลาดที่อันเนื่องจากกระวิทัตที่ไม่อาจจะขจัดให้หมดไปได้จากการเล็งไปยังเป้าหมายนั้น



รูป 11.5

การแจกแจงความเคลื่อนคลาด (หรือ Residuals) ในกรณีที่มีการสังเกตพิจารณาหรือรังวัดโดยตรง ให้ผลคล้ายคลึงกันกับการแจกแจงความเคลื่อนคลาดดังกล่าวมาแล้ว เช่น

ตัวอย่าง จากผลการรายงานการรังวัดมุม 100 ครั้ง ของงานสามเหลี่ยมใหญ่ในรัฐแมซซาชูเซทส์ (Massachusets) ความเคลื่อนคลาด (Residual Errors) ที่ได้นี้เกิดจาก "เอาค่าการรังวัดแต่ละค่าไปหักออกจากค่าที่น่าเชื่อที่สุด" จะได้ความเคลื่อนคลาดแจกแจงดังต่อไปนี้

ระหว่าง	จำนวนความเคลื่อนคลาด
+ 6.″0 และ + 5.″0	1
5.0 " 4.0	2
4.0 " 3.0	3
2.0 " 1.0	13
1.0 " 0.0	26
0.0 " − 1.0	26
− 10 " 2.0	17
2.0 " 3.0	8
3.0 " 4.0	2
รวมทั้งสิ้น	100

จากการแจกแจงความเคลื่อนคลาดข้างบนนี้มีลักษณะคล้ายคลึงกับที่กล่าวมาแล้ว อาจพิจารณาได้ความจริงอันเป็นพื้นฐาน ดังนี้

12.1 จำนวนความเคลื่อนคลาดขนาดเล็กมีมากกว่าขนาดใหญ่

12.2 จำนวนความเคลื่อนคลาดที่มีเครื่องหมาย + มีจำนวนเกือบเท่ากับจำนวนความเคลื่อนคลาดที่มีเครื่องหมาย − และ

12.3 จำนวนความเคลื่อนคลาดขนาดใหญ่มากไม่เกิดขึ้น

ในกรณีนี้ความเคลื่อนคลาดขนาดใหญ่ที่สุด คือ 5.″2 แต่หากว่าวิธีการรังวัดที่มีความละเอียดต่ำกว่านี้ เขตจำกัดของความเคลื่อนคลาดก็จะต้องใหญ่กว่าอย่างเห็นได้ชัด

13. อนุจัตุรัสวิธี หรือวิธีค่ากำลัง 2 ต่ำสุด (Method of Least Squares)

อนุจัตุรัสวิธีเป็นวิธีการปรับ และเปรียบเทียบค่าของการรังวัด การปรับค่าการรังวัดที่ต้องกระทำนั้นอันเนื่องมาจากความจริงที่ว่า เมื่อทำการรังวัดสิ่งใดสิ่งหนึ่งหลายครั้งหลายหนด้วยความละเอียดสูง แม้จะได้กระทำด้วยจำนวนครั้งการรังวัดเท่ากัน และอยู่ในภาวะคล้ายคลึงกันก็ตาม แต่ผลการรังวัดนั้นจะไม่เท่ากัน เป็นที่ทราบกันแล้วโดยทั่วไปว่าสิ่งที่ทำการรังวัดนั้นเป็นตัวไม่รู้ ไม่ว่าจะเป็นระยะ มุม หรือว่าจำนวนประชากรทั้งหมดของประเทศใดประเทศหนึ่ง หรือของโลก ค่าที่ถูกต้องแท้จริงไม่มีใครทราบ อย่างไรก็ตามเราได้หันมายอมรับค่าที่เป็นตัวแทนตัวไม่รู้นั้น ซึ่งค่านี้ได้มาจากการผสม และการปรับค่าการรังวัดซึ่งเป็นค่าที่น่าเชื่อที่สุด และเป็นค่าที่ดีเหมาะสมที่สุด

การเปรียบเทียบการรังวัดนั้นนับว่าจำเป็นเพื่อกำหนดหาขั้นความละเอียดเชิงสัมพัทธ์ของชุดการรังวัดที่แตกต่างกัน ซึ่งการรังวัดนั้นได้กระทำขึ้นภายใต้ภาวะไม่เหมือนกันเลย ทั้งนี้ ก็เพื่อจุดมุ่งหมายในการผสม และการปรับค่าการรังวัดได้อย่างเหมาะสม หรือเพื่อทดสอบให้แน่ใจถึงวิธีที่ดีที่สุดของการรังวัด

14. หลักเกณฑ์ของอนุจัตุรัสวิธี (The Principle of Least Squares)

ในการรังวัดใด ๆ ที่มีความละเอียดเท่ากัน ค่าที่น่าเชื่อที่สุดของจำนวนที่รังวัดนั้น คือ "ค่าที่ทำให้ผลรวมกำลัง 2 ของค่าความแตกต่างจากมัชฌิม (Residual Errors) มีค่าต่ำสุด"

เพื่อพิสูจน์เรื่องนี้ให้พิจารณากรณีทั่ว ๆ ไปของการรังวัดทางอ้อมต่อสิ่งใด ๆ ที่พิจารณาและให้ n ซึ่งเป็นค่ารังวัดอย่างดีที่ให้ความละเอียดเท่ากัน และการรังวัดนี้กระทำขึ้นภายใต้การขึ้นอยู่กับจำนวนไม่รู้ 2 ตัว คือ Z_1 และ Z_2

ให้ $M_1, M_2 ...... M_n$ เป็นผลของการรังวัดที่ขึ้นตรงต่อ $f_1(Z_1, Z_2)$, $f_2(Z_1, Z_2)$, ... $f_n(Z_1, Z_2)$

ผลการรังวัดเหล่านี้จะไม่ให้ค่าจริงของฟังก์ชั่นที่ถูกต้อง และความต่างระหว่างค่าที่รังวัดกับค่าจริงจะเป็นความเคลื่อนคลาดที่มีขนาดเล็กมาก คือ $x_1, x_2 ...... x_n$ หรือ

${}_1(Z_1, Z_2)\ M_1 = x_1,\ {}_2(Z_1, Z_2) - M_2 = x_2 \ldots\ldots\ {}_n(Z_1, Z_2) - M_n = x_n$

ผลการคาดคะเนตามลำดับความเคลื่อนคลาดเหล่านี้ย่อมเป็นไปตามกฎ (18) $Y_1 = ke^{-h^2 x_1^2}, Y_2 = ke^{-h^2 x_2^2}, Y_3 = ke^{-h^2 x_3^2} \ldots\ldots\ldots Y_n = ke^{-h^2 x_n^2}$ ซึ่งh มีค่าเหมือนกันทั้งหมด เพราะการรังวัดกระทำด้วยความประณีต และมีความละเอียดเท่ากัน

จากที่กล่าวมาแล้วผลคาดคะเนของเหตุการณ์เชิงผสมในการดำเนินการเกี่ยวกับระบบความเคลื่อนคลาดที่เป็นอิสระ คือ $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ คือ ผลคูณของผลคาดคะเนที่แยกต่างหากจากกันเหล่านี้ หรือ

$$P' = C'^n e^{-h^2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2)$$

ความเคลื่อนคลาดเหล่านี้แต่ละอันเป็นฟังก์ชั่นของจำนวน Z_1 และ Z_2 ที่เราต้องการหา

ค่าต่าง ๆ ของ Z_1 และ Z_2 จะให้ค่าต่าง ๆ สำหรับ P' ระบบค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อของความเคลื่อนคลาดจะเป็นระบบซึ่ง P' มีค่ามากที่สุด (Maximum) และค่าที่น่าเชื่อที่สุดของ Z_1 และ Z_2 จะตรงกันกับระบบคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุด ผลคาดคะเน P' จะมีค่าสูงสุด เมื่อกำลังของ e มีค่ามากที่สุด นั่นคือ เมื่อ

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + \ldots\ldots\ldots + x_n^2 = \text{มีค่าต่ำสุด} \ldots\ldots\ldots(1)$$

ดังนั้นระบบผลคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดของค่าสำหรับ Z_1 และ Z_2 คือระบบผลคาดคะเนที่ทำให้ผลบวก $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots + x_n^2$ มีค่าต่ำสุด และเมื่อเป็นเช่นนี้ย่อมหมายความว่าวิธีกำลัง 2 ต่ำสุดนั้นได้พิสูจน์ให้เห็นประจักษ์แล้ว

ความเคลื่อนคลาด $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ถือเป็นความเคลื่อนคลาดจริงจากการรังวัด อย่างไรก็ดีพอความเคลื่อนคลาดเหล่านี้ต้องการให้สมจริงตามเงื่อนไขซึ่งผลบวกของกำลัง 2มีค่าต่ำสุดแล้ว เมื่อนั้นความเคลื่อนคลาด $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ก็จะกลายเป็นความเคลื่อนคลาดของค่าความต่างจากมัชฌิม (Residual Errors) ดังนั้นเงื่อนไขสำหรับค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดของ Z_1 และ Z_2 ที่แท้จริง คือ

$$V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \ldots\ldots\ldots + V_n^2 = \text{มีค่าต่ำสุด} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

นั่นก็คือว่า ถ้า Z_1 และ Z_2 เป็นค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดแล้ว ความเคลื่อนคลาด หรือค่าต่างจากมัชฌิมก็คือ

$$f_1(Z_1, Z_2) - M_1 = V_1,\ f_2(Z_1,Z_2) - M_2 = V_2 \ldots\ldots f_n(Z, Z) - M_n = V_n$$

จะเป็นค่าที่สมจริงกับเงื่อนไขสำหรับเรื่องผลรวมกำลัง 2 มีค่าต่ำสุด

กรณีทั่วไปอีกอันหนึ่งของวิธีอนุจัตุรัสวิธี คือว่า เมื่อการรังวัดใช้ขั้นความละเอียดแตกต่างกัน หรือเรียกว่าน้ำหนักต่างกัน ในเหตุการณ์เช่นนี้หลักใหญ่ทั่วไปมีดังต่อไปนี้

ในการรังวัดใช้น้ำหนักไม่เท่ากัน ค่าผลคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดของจำนวนที่รังวัด คือ ค่าที่ทำให้ผลรวมกำลัง 2 เชิงถ่วงน้ำหนักของความเคลื่อนคลาด หรือค่าต่างจากมัชฌิม มีค่าต่ำสุด

เช่นเดียวกับที่กล่าวมาแล้ว สมมติเราทำการรังวัดสิ่งใดสิ่งหนึ่งมาเป็นจำนวน n คือ $M_1, M_2, \ldots\ldots M_n$ ซึ่งกระทำการรังวัดมุ่งต่อตัวไม่รู้ 2 ตัว คือ Z_1 และ Z_2

$P_1, P_2, \ldots P_n$ เป็นน้ำหนักของ $M_1, M_2, M_3, \ldots\ldots M_n$ ความต่างระหว่างค่าที่รังวัด และค่าจริงของฟังก์ชั่น คือ ความเคลื่อนคลาด $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n$ และผลคาดคะเนของความเคลื่อนคลาดเหล่านี้ตามลำดับจะได้

$Y_1 = K_1e^{-h_1^2x_1^2},\ Y_2 = K_2e^{-h_2^2x_2^2}, \ldots\ldots\ldots\ Y_n = k_ne^{-h_n^2x_n^2}$ ซึ่ง k และ h แตกต่างกันสำหรับการรังวัดแต่ละครั้ง ผลคาดคะเนของระบบจากความเคลื่อนคลาดอิสระทั้งหลาย $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ คือ

$P' = k_1k_2 \ldots\ldots\ldots k_ne^{-(h_1^2x_1^2 + h_2^2x_2^2 + \ldots\ldots\ldots + h_n^2x_n^2}$ และระบบคาดคะเนของค่าต่าง ๆ ที่น่าเชื่อที่สุด คือว่า P' จะต้องมีมากที่สุด หรือทำให้

$$h_1^2x_1^2 + h_2^2x_2^2 + h_3^2x_3^2 + \ldots\ldots\ldots + h_n^2x_n^2 = \text{มีค่าต่ำสุด} \ldots\ldots\ldots(3)$$

ค่าต่าง ๆ ของ $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ ที่หาได้จากเงื่อนไขนี้ก็คือ ค่าความเคลื่อนคลาดที่ต่างไปจากมัชฌิม คือ $V_1, V_2, \ldots\ldots V_n$ ดังนั้นจึงเขียนได้ทันทีว่า

$$h_1^2V_1^2 + h_2^2V_2^2 + h_3^2V_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + h_n^2V_n^2 = \text{มีค่าต่ำสุด} \ldots\ldots\ldots(4)$$

จากนิพจน์อันนี้อาจหารด้วย h^2, ซึ่ง h คือ มาตราวัดความละเอียดมาตรฐานที่เป็นตัวคงที่ที่ได้เลือกขึ้นคือว่า

$$h_1^2 = P_1h^2, \quad h_2^2 = P_2h^2 \; .... \; h_n^2 = P_nh^2$$

เมื่อ $P_1, P_2, ...P_n$ เป็นจำนวนเต็มซึ่งเป็นน้ำหนักของการรังวัด $M_1, M_2, ...$-M_n ดังนั้นจึงได้

$$P_1V_1^2 + P_2V_2^2 + P_3V_3^2 + \; .... \; + P_nV_n^2 = \text{มีค่าต่ำสุด} \; ....(5)$$

15. การรังวัดโดยตรงต่อจำนวนหนึ่งจำนวนใดจำนวนเดียว

โดยการรังวัดมีความละเอียดอย่างเดียวกัน และกระทำเพื่อให้ได้ผลออกมาต่อค่าที่ทำการรังวัดนั้น โดยทั่วไปเป็นที่ยอมรับกันว่า มัชฌิมเชิงเลขคณิตเป็นค่าที่น่าเชื่อที่สุดแทนตัวไม่รู้นั้น อาจแสดงให้เห็นได้โดยวิธีอนุจัตุรัส ดังนี้

ให้ $M_1, M_2, M_3, ...M_n$ เป็นค่าที่ได้จากการรังวัดโดยตรงต่อสิ่งที่ต้องการทราบอันหนึ่งโดยทำการรังวัดใช้ความประณีตอย่างเดียวกัน น้ำหนักการรังวัดเท่ากัน

ให้ Z เป็นค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดที่จะให้ได้มา ดังนั้นความเคลื่อนคลาดต่างจากมัชฌิม คือ

$$Z - M_1, Z - M_2, Z - M_3, \; .... \; Z - M_n$$

จากหลักสำคัญใน (2) ข้อ 4.11 เราจะได้

$(Z - M_1)^2 + (Z - M_2)^2 + (Z - M_3)^2 + \; .... \; + (Z - M_n)^2 = \text{มีค่าต่ำสุด}$ ....(1) โดยอาศัยวิธีจุดสูงสุด และต่ำสุด (Maxima & Minima) จากอนุพันธ์ (Derivative) ชั้นที่ 1 ใน (1) และให้เท่ากับ 0 จะได้

$$\frac{d}{dz}(Z - M_1)^2 + \frac{d}{dz}(Z - M^2)^2 + \; .... \; + \frac{d}{dz}(Z - M_n)^2 = 0$$

$$2(Z - M_1) + 2(Z - M_2) + \; .... \; + 2(Z - M_n) = 0$$

$$Z = \frac{M_1 + M_2 + \dots\dots\dots + M_n}{n} \quad \dots\dots\dots\dots(2)$$

ซึ่ง n คือจำนวนการรังวัด ซึ่งจะเห็นว่าค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดของ Z คือ ค่า**มัชฌิมเลขคณิตของการรังวัด n ครั้ง** (ดูข้อ 2.2)

การปรับค่าการรังวัดโดยตรงที่มีน้ำหนักการรังวัดเท่ากันต่อสิ่งที่ต้องการทราบอันเดียวกัน ก่อให้เกิดผลคาดคะเนที่น่าเชื่อว่าค่าที่ต้องการทราบควรจะเป็นเท่าไรนั้น เราใช้วิธีหามัชฌิมเลขคณิตของการรังวัดเหล่านั้น

เมื่อการรังวัดที่กระทำต่อสิ่งที่ต้องการทราบนั้นมีน้ำหนักการรังวัดไม่เท่ากัน หรือมีความประณีตแตกต่างจากกัน เราจะใช้ผลทางมัชฌิมเลขคณิตดัง (2) หาได้ไม่

ถ้าค่า Z เป็นค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดก็หมายความว่าจะต้องเป็นไปตามหลักเกณฑ์ใน (5)

ให้การรังวัด $M, M_2, ...M_n$ มีน้ำหนัก $P_1, P_2, ...P_n$ ตามลำดับ จาก (5) ข้อ 6.14 เราคงได้

$P_1(Z - M_1)^2 + P_2(Z - M_2)^2 + \dots\dots + P_n(Z - M_n)^2$ = มีค่าต่ำสุด โดยวิธีอนุพันธ์ชั้นที่ 1 จากนิพจน์ข้างบนแล้วกำหนดให้เท่ากับ 0 จะได้

$$P_1\frac{d}{dz}(Z - M_1)^2 + P_2\frac{d}{dz}(Z - M_2)^2 + \dots\dots\dots + P_n\frac{d}{dz}(Z - M_n)^2 = 0$$

$$(Z - M_1) + 2P_2(Z - M_2) + \dots\dots\dots + 2P_n(Z - M_n) = 0$$

$$2P_1$$

$$Z = \frac{P_1M_1 + P_2M_2 + P_3M_3 + \qquad + P_nM_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots\dots\dots + P_n} \quad \dots\dots\dots(3)$$

Z เป็นค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดแทนค่าที่เราต้องการทราบ หรือจำนวนที่เราไม่รู้ (Unknown quantity) เราได้ค่านี้มาด้วยการเอาน้ำหนักของการรังวัดแต่ละครั้งคูณเข้าไปกับผลการรังวัดของมันรวมกัน หารผลรวมที่ได้ด้วยผลรวมของน้ำหนักทั้งหมด เราเรียกมัชฌิมชนิดนี้ให้ต่างไปจากมัชฌิมเลขคณิตว่า มัชฌิมเชิงถ่วงน้ำหนัก (Weighted mean)

ในการปรับค่าการรังวัด เราจะกำหนดสมการการรังวัดให้กับค่าที่รังวัดตามเงื่อนไขที่เกิดขึ้นด้วยเหตุ และผล และตามความเป็นจริง และจากสมการการรังวัด (Observation equations) จะต้องหาอนุพันธ์ชั้นที่ 1 ตามวิธีของจุดสูงสุด และจุดต่ำสุดเพื่อสร้างสมการนอร์มาล (Normal equations) สำหรับหาตัวไม่รู้ (Unknown values)

จากที่เคยกล่าวมาแล้วว่าเมื่อทำการวัด หรือสังเกตใด ๆ หลายครั้งหลายหนโดยการวัด หรือสังเกตแต่ละครั้งมีน้ำหนัก และความประณีตอย่างเดียวกัน "ค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดของค่าความเคลื่อนคลาดต่างจากมัชฌิม (Residuals) ที่ตรงกันกับชุดของการรังวัดนั้น ๆ ซึ่งผลคาดคะเนที่ค่าความเคลื่อนคลาดต่างจากมัชฌิมจะเกิดขึ้นต้องมีค่ามากที่สุด (Maximum)"

จาก (5) ข้อ เราเขียนได้ตามนิยามข้างบน คือ

$$P' = f(V_1), f(V_2), f(V_3) \,\ldots\ldots\, f(V_n)\,(dV)^n \qquad = \text{ มีค่าสูงสุด (Max.)}$$

และโดย (18) เราเขียนได้

$$P = k_n . e^{-h^2(V_1^2 + V_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + V_n^2)}\,(dV)^n \qquad = \text{ มีค่าสูงสุด (Max.)}$$

เนื่องจากกำลังของ e มีเครื่องหมายเป็น – ดังนี้ P จะมีค่าสูงสุดได้เมื่อ

$$V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + V_n^2 = \sum_{i=1}^{i=n} V_1^2 \qquad = \text{ มีค่าต่ำสุด (Min.)}$$

ฉะนั้น ในการปรับค่าให้กับการรังวัด หรือสังเกตใด ๆ โดยระเบียบวิธีอนุจัตุรัส หรือผลรวมของค่ากำลัง 2 ต่ำสุดย่อมขึ้นอยู่กับหลักการที่ว่าค่ารังวัดที่น่าเชื่อที่สุดของการวัด หรือการสังเกตนั้น ย่อมทำให้ผลรวมของความเคลื่อนคลาดต่างจากมัชฌิมยกกำลังสองมีค่าต่ำสุด (Min.)

เนื่องจาก ø (·) = CV ดังนั้นใน (10) จะเขียนได้ดังนี้ (คือนำค่า CV แทน แล้วเอา C ออก)

$$V_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial Z_1} + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial Z_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + V_n \frac{\partial V_n}{\partial Z_1} = 0$$

$$V_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_2} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial Z_2} + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial Z_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + V_n \frac{\partial V_n}{\partial Z_2} = 0$$

....
..............(4)
....

$$V_1\frac{\partial V_1}{\partial Z_q} + V_2\frac{\partial V_2}{\partial Z_q} + V_3\frac{\partial V_3}{\partial Z_q} + \dots\dots\dots + V_n\frac{\partial V_n}{\partial Z_q} = 0$$

สมการ (4) นี้เรียกสมการนอร์มาล (Normal equations) หรือสมการปกติ

เดยทำนองเดียวกันเราอาจหาจำนวนแก้ที่น่าเชื่อที่สุดนำไปแก้กับค่าที่รังวัด หรือสังเกตมาเพื่อให้ได้ค่าที่รังวัดเป็นค่าน่าเชื่อที่สุดได้ ถ้าการรังวัด หรือสังเกตมาเป็นเชิงถ่วงน้ำหนัก เราดำเนินกรรมวิธีคล้ายกับที่กล่าวมาแล้ว ต่างกันแต่ที่ประกอบสมการนอร์มาลจะต้องคำนึงถึงจำนวนครั้งของการรังวัด (น้ำหนัก) ด้วย คือ

จาก (4) เราอาจหาสมการนอร์มาลเชิงถ่วงน้ำหนัก (Weighted normal equations) ได้ โดยให้ P เป็นน้ำหนักโดย Partial Derivation

$$P_1V_1\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} + P_2V_2\frac{\partial V_2}{\partial Z_1} + \dots\dots\dots + P_nV^n\frac{\partial V_n}{\partial Z_n} = 0$$

$$P_1V_1\frac{\partial V_1}{\partial Z_2} + P_2V_2\frac{\partial V_2}{\partial Z_2} + \dots\dots\dots + P_nV_n\frac{\partial V_n}{\partial Z_n} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots.(5)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_1V_1\frac{\partial V_1}{\partial Z_q} + P_2V_2\frac{\partial V_2}{\partial Z_q} + \dots\dots\dots + P_nV_n\frac{\partial V_n}{\partial Z_q} = 0$$

และใน (18) ข้อ 6. ก็จะกลายเป็น

$$P = k_1e^{-h_1^2V_1^2}.k_2e^{-h_2^2V_2^2}k_3e^{-h_3^2V_3^2}.\dots\dots\dots k_ne^{-h_n^2V_n^2}.(\partial V)^n$$

ผลคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดของ "V'S" ซึ่งเป็นตัวไม่รู้ (Unknowns) ก็คือ P จะต้องมีค่าสูงสุด (Maximum) และ P จะมีค่าสูงสุดก็ต่อเมื่อ

$h_1^2V_1^2 + h_2^2V_2^2 + \dots\dots\dots + h_n^2V_n^2$ มีค่าต่ำสุด (Minimum) ....(6)

จากนี้สมการนอร์มาลคงเป็นดังนี้

$$h_1 h_v V_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} + h_2 h V_2 \frac{\partial V_2}{\partial Z_1} + \dots\dots\dots + h_n^n V_n \frac{\partial V_n}{\partial Z_1}\ 0$$

$$h_1^2 V_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_2} + h^2 V_2 \frac{\partial V_2}{\partial Z_2} + \dots\dots\dots + h_n^2 V_n \frac{\partial V_n}{\partial Z_2} = 0$$

....

....(7)

....

$$h_1^2 V_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_q} + h_2^2 V_2 \frac{\partial V_2}{\partial Z_q} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + h_n^2 V_n \frac{\partial V_n}{\partial V_q} = 0$$

เมื่อเปรียบเทียบ (7) กับ (5) และ (6) แล้ว คืออันเดียวกัน และ

$P_1 : P_2 : P_3 : \dots\dots : P_n = h_1^2 : h_2^2 : h_3^2 : \dots\dots\dots\dots h_n^2$

ฉะนั้น จาก (6) จึงเขียนได้

$P^1 V_1^2 + P^2 V_2^2 + P_3 V_3^2 + \dots\dots + P_n V_n^2$ มีค่าต่ำสุด (Min.) ....(8)

จากสมการนอร์มาลใน (4), (5) เป็นสมการที่เราใช้หาค่าที่น่าเชื่อของการรังวัดใด ๆ โดยเพียงประกอบสมการรังวัด (Observation equations) แล้วทำการหาอนุพันธ์จากสูตร (4) หรือ (5) เพื่อประกอบสมการนอร์มาล แล้วแก้สมการหา V'S เพื่อให้ได้ค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดของความเคลื่อนคลาดต่างจากมัชฌิม (Residual quantities) นำไปปรับค่าที่รังวัดหรือสังเกตมา จะทำให้ได้ค่าที่รังวัดที่ใช้แทนตัวไม่รู้เป็นค่าที่น่าเชื่อที่สุด ซึ่งในการสังเกตหรือรังวัดในงานที่มีความละเอียดสูงนั้น แม้บางทีเราหามัชฌิมจากค่าที่รังวัดมาแล้วก็ตาม ยังถือว่ามีความเคลื่อนคลาดอันเกิดจากเครื่องมือ คน และสภาพของธรรมชาติเข้ามาเกี่ยวข้องที่จะต้องกำจัดออกไป หรือหากไม่สามารถกำจัดออกไปได้อีกแล้ว ก็ต้องแจกจ่ายความเคลื่อนคลาดให้กับค่าที่รังวัดตามเงื่อนไขที่เกิดขึ้นให้เหมาะสมที่สุด ซึ่งเรามักใช้วิธีการปรับค่าด้วยอนุจัตุรัสวิธี หรือวิธีกำลังสองต่ำสุด (The Method of Least Squares) วิธีนี้เป็นที่นิยมกันเพราะลดงานคำนวณได้มาก เพราะในการรังวัด หรือการสังเกตใด ๆ เราอาจต้องใช้การรังวัดหรือสังเกตเป็นจำนวนมาก การหาผลคาดคะเนที่น่าเชื่อจากตัวความเคลื่อนคลาดต่างจากมัชฌิมนั้น บางทีเราเรียกว่า "การหาผลคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดของจำนวนแก้" (The Most Probable Corrections)

ตัวอย่าง ในการทำระดับได้กำหนดสูงของจุดต่าง ๆ จากพื้นระดับน้ำทะเลปานกลาง เป็นผลดังนี้

$E_1 = 5730.08$, $E_2 \quad E_1 = 2.60$, $E_2 = 575.27$

$E_3 - E_2 = 167.33$, $E_4 - E_3 = 3.80$, $E_4 - E_2 = 170.28$

$E_4 - E_5 = 425.00$, $E_5 = 319.91$, $E_5 = 319.75$

ค่าเหล่านี้ทำจากกล้องระดับชนิดต่าง ๆ จงหากำหนดสูงที่น่าเชื่อที่สุดของ E_1, E_2, E_3, E_4 และ E_5 ตามลำดับ

วิธีทำ ให้ V_1, V_2, V_3 V_4 และ V_5 เป็นค่าความเคลื่อนคลาดต่างจากมัชฌิม (Residuals) หรือจำนวนแก้ (Corrections) ที่น่าเชื่อที่สุดที่จะนำไปปรับค่ากำหนดสูงของ E_1, E_2, ... E_5 ตามลำดับ

เมื่อพิจารณาค่ารังวัดเหล่านี้แล้วเราอาจเขียนได้ดังนี้

$$\left.\begin{array}{ll} E_1 = 573 + V_1 & E_2 = 575 + V_2 \\ E_3 = 742 + V_3 & E_4 = 745 + V_4 \\ E_5 = 320 + V_5 & \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

ซึ่ง V_1, V_2 .... V_5 เป็นจำนวนแก้ที่มีขนาดเล็ก ถ้าหากได้ค่าจำนวนแก้ที่น่าเชื่อที่สุดแล้ว ค่ารังวัดที่น่าเชื่อที่สุดก็หาได้

15.1 **ประกอบสมการรังวัด** (Observation Equations)

$573 + V_1 - 573.08 = 0$ หรือ $V_1 - 0.08 = R_1$ ....(1)

$575 + V_2 - 573 - V_1 - 2.60 = 0 \qquad V_2 - V_1 - 0.60 = R_2$ ....(2)

$575 + V_2 \quad 575.27 = 0 \qquad V_2 - 0.27 = R_3$ ....(3)

$742 + V_3 \quad 575 \quad V_2 - 167.33 = 0 \qquad V_3 \quad V_2 - 0.33 = R_4$ ....(4)

$745 + V_4 - 742 - V_3 - 3.80 = 0 \qquad V_4 - V_3 - 0.80 = R_5$ ....(5)

$745 + V_4 - 575 - V_2 - 170.28 = 0 \qquad V_4 - V_2 - 0.28 = R_6$ ....(6)

$745 + V_4 - 320 - V_5 - 425.00 = 0 \qquad V_4 - V_5 = R_7$ ....(7)

$320 + V_5 - 319.91 = 0 \qquad V_5 + 0.09 = R_8$ ....(8)

$320 + V_5 - 319.75 = 0 \qquad V_5 + 0.25 = R_9$ ....(9)

15.2 ประกอบสมการนอร์มาล (Normal Equations)

โดยใช้ (4) ข้อ 15. คือ โดย Partial Differentiation (1), (2) ....(9) โดยมุ่งต่อ V_1 แล้วรวมกัน เช่น

จาก (1) $\dfrac{\partial R_1}{\partial V_1} = 1$ จาก (2) $\dfrac{\partial R_2}{\partial V_1} = -1$ จาก (3) $\dfrac{\partial R_3}{\partial V_1} = 0$

จาก (4) $\dfrac{\partial R_4}{\partial V_1} = 0$ จาก (5) $\dfrac{\partial R_5}{\partial V_1} = 0$ จาก (6) $\dfrac{\partial R_6}{\partial V_1} = 0$

จาก (7) $\dfrac{\partial R_7}{\partial V_1} = 0$ จาก (8) $\dfrac{\partial R_8}{\partial V_1} = 0$ และจาก (9) $\dfrac{\partial R_9}{\partial V_1} = 0$

โดยใช้สูตร (4) เอาผลที่ได้นี้รวมกันจะได้

$$R_1 \frac{\partial R_1}{\partial V_1} + R_2 \frac{\partial R^2}{\partial V_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + R_n \frac{\partial R_n}{\partial V_1} = 0$$

$$\therefore (V_1 - 0.08)(1) + (V_2 - V_1 - 0.60)(-1) + 0 + 0 + \ldots\ldots + 0 = 0$$

$$2V_1 - V_2 \ldots\ldots\ldots + 0.52$$

ทำนองเดียวกันโดย Partial Differentiation (1), (2), (3) ....(9) มุ่งต่อ V_2, V_3, V_4, ... V^9 ตามลำดับ เราจะได้สมการนอร์มาลทั้งหมดมา 5 สมการ ซึ่งเท่ากับตัวที่ไม่รู้ (Unknowns) หรือตัวที่เราจะใช้แทนตัวไม่รู้นั่นเอง ดังนั้นสมการนอร์มาลจึงมีรูปดังข้างล่างนี้

$2V_1 - V_2 \qquad + 0.52 = 0$ ....(a)

$-V_1 + 4V_2 - V_3 - V_4 \qquad - 0.26 = 0$ ....(b)

$-V_2 + 2V_3 - V_4 \qquad + 0.47 = 0$ ....(c)

$-V_2 - V_3 + 3V_4 - V_5 \qquad - 1.80 = 0$ ....(d)

$-V_4 + 3V_5 \qquad + 0.34 = 0$ ....(e)

แก้สมการ (a), (b), (c), (d) และ (e) ข้างบนอย่างธรรมดา จะได้ผลลัพธ์ของ V'S ต่อไปนี้

$$V_1 = -0.19$$
$$V_2 = +0.14$$
$$V_3 = +0.05$$
$$V_4 = +0.43$$
$$V_5 = +0.03$$

ค่า V'S ที่หาได้นี้เป็นจำนวนแก้ที่ให้แก่ค่ากำหนดสูงที่รังวัดมา และเป็นค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุด ซึ่ง

$$\sum_{i=1}^{i=5} V_i^2 = 0.2440$$ ซึ่งมีค่าต่ำสุด (A Minimum)

15.3 กำหนดสูงที่น่าเชื่อที่สุด (The Most Probable Elevations)

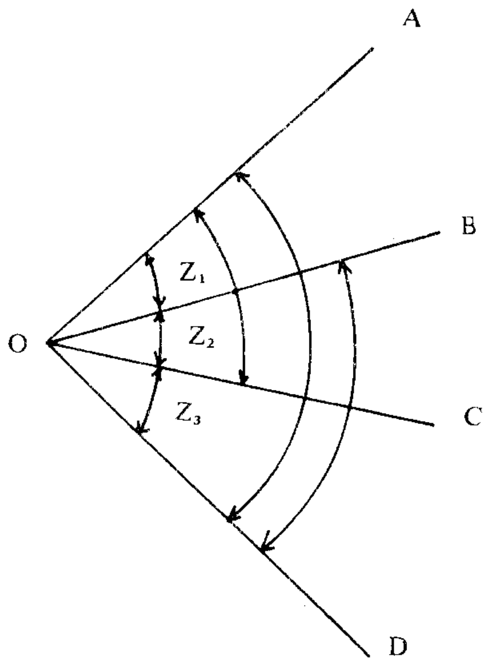
จาก (A)

$$E_1 = 573 + V_1 = 573 - 0.19 = 572.81$$
$$E_2 = 575 + V_2 = 575 + 0.14 = 575.14$$
$$E_3 = 742 + V_3 = 742 + 0.05 = 742.05$$
$$E_4 = 745 + V_4 = 745 + 0.43 = 745.43$$
$$E_5 = 320 + V_5 = 320 + 0.03 = 320.03$$

นอกจากตัวอย่างดังกล่าวอาจนำไปใช้ในการหาค่าที่น่าเชื่อของการรังวัดมุม และอื่น ๆ ได้ เช่น

ตัวอย่าง ในรูปถ้าต้องการทราบค่าของมุม Z_1, Z_2 และ Z_3 ซึ่งได้ทำการรังวัดมาหลาย ๆ ครั้ง แล้วหามัชฌิมเลขคณิต

จงหาค่าของมุม AOB, BOC และ COD ที่น่าเชื่อที่สุดโดยวิธีหาจำนวนแก้ที่น่าเชื่อที่สุด (The Most Probable Corrections)



รูป 11.6

มุมที่รังวัดได้ผลดังนี้

$$Z_1 = 31^\circ\ 10'\ 17''.0$$
$$Z_2 = 40\ \ 50\ \ 10.0$$
$$Z_3 = 42\ \ 10\ \ 19.7$$
$$Z_1 + Z_2 = 72\ \ 00\ \ 26.0$$
$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 114\ \ 10\ \ 46.0$$
$$Z_2 + Z_3 = 83\ \ 00\ \ 30.2$$

วิธีทำ ให้ v_1, v_2 และ v_3 เป็จำนวนแก้ที่แก้ให้กับมุม AOB, BOC และ COD ตามลำดับ ซึ่ง v_1, v_2 และ v_3 เป็นจำนวนแก้ที่น่าเชื่อที่สุด (The Most Probable Corrections)

1) สมการรังวัด (Observation Equations)

$$V_1 = R_1 \qquad \text{.................}(1)$$

$$V_2 = R_2 \qquad \text{.................}(2)$$

$$V_3 = R_3 \qquad \text{.................}(3)$$

$Z_1 = 31° \ 10' \ 17''.0$ และ $Z_2 = 40° \ 50' \ 10''.0$

$\therefore \ Z_1 + Z_2 = 72° \ 00' \ 27''.0$

แต่ผลรังวัดอีกครั้งหนึ่งเป็น

$$Z_1 + Z_2 = 72° \ 00' \ 26''.0$$

$$V_1 + V_2 + (72° \ 00' \ 27''.0) - (72° \ 00' \ 26''.0) = 0$$

$\therefore \ V_1 + V_2 + 01.0 = 0$ หรือ $V_1 + V_2 + 01.0 = R_4$ ....(4)

โดยทำนองเดียวกัน

$$V_1 + V_2 + V_3 + \left\{ (31° \ 10' \ 17''.0 + 40° \ 50' \ 10''.0 + 42° \ 10' \ 19''.7) - (114° \ 10' \ 46''.0) \right\} = 0$$

หรือ $V_1 + V_2 + V_3 + 0.7 = R_5$ ....(5)

และ $V_2 + V_3 + \left\{ (40° \ 50' \ 10''.0 + 42° \ 10' \ 19''.7) - (83° \ 00' \ 30''.2) \right\} = 0$

หรือ $V_2 + V_3 - 0.5 = R^6$ ....(6)

2) ประกอบสมการนอร์มาล (Normal Equations)

จาก (1), (2), ...(6) โดย Partial Differentiation โดยมุ่งต่อ

$$\frac{\partial R_1}{\partial V_1} = 1, \quad \frac{\partial R_2}{\partial V_1} = 0, \quad \frac{\partial R_3}{\partial V_1} = 0, \quad \frac{\partial R_4}{\partial V_1} = 1$$

$$\frac{\partial R_5}{\partial V_1} = 1 \quad \frac{\partial R^6}{\partial V_1} = 0$$

$$\therefore \ R_1 \frac{\partial R_1}{\partial V_1} + R_2 \frac{\partial R_2}{\partial V_1} + \ldots\ldots\ldots + R_n \frac{\partial R_n}{\partial V_1} = 0$$

$V_1(1) + V_2(0) + V_3(0) + (V_1 + V_2 + 01.0)(1) + (V_1 + V_2 + V_3 + 0.7)(1) +$
$(V_2 + V_3 - 0.5)(0) = 0$

หรือ $3V_1 + 2V_2 + V_3 + 1.7 = 0$ ....(7)

โดยทำนองเดียวกันจาก (1), (2), ...(6) โดย Partial Differentiation มุ่งต่อ V_2 และ V_3 จะได้สมการนอร์มาลมาอีก 2 สมการ คือ

$2V_1 + 4V_2 + 2V_3 + 1.2 = 0$ ....(8)

และ

$V_1 + 2V_2 + 3V_3 + 0.2 = 0$ ....(9)

โดยการแก้สมการ (7), (8) และ (9) ธรรมดาจะได้

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= -0.55 \\ V_2 &= -0.125 \\ V_3 &= +0.20 \end{aligned}\right\} , \quad \sum_{i=1}^{i=3} V_i^2 = 0.358125$$ เป็นค่าต่ำสุด

3) ค่าของมุม Z_1, Z_2 และ Z_3 ที่น่าเชื่อที่สุด คือ

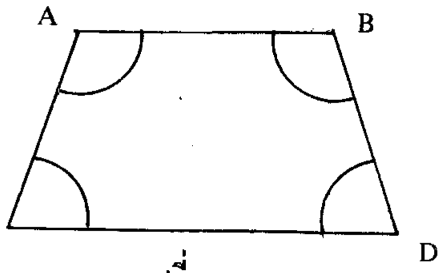
$Z_1 = 31° \; 10' \; 16''.45$

$Z_2 = 40 \; 50 \; 09.875$

$Z = 42 \; 20 \; 19.90$

ตัวอย่างที่กล่าวมานี้ ความละเอียดประณีต เครื่องมือที่ใช้ในการปฏิบัติงาน น้ำหนักการรังวัด เป็นอย่างเดียวกัน และสภาพดินฟ้าอากาศคล้ายคลึงกัน ถ้าการรังวัดเชิงถ่วงน้ำหนัก การหาจำนวนแก้ที่น่าเชื่อที่สุดไปปรับให้กับค่าที่รังวัดกระทำละม้ายคล้ายคลึงกัน ดังจะได้ยกตัวอย่างพอเป็นแนวทางดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าที่น่าเชื่อที่สุดของมุมที่รังวัดจากรูป โดยหาจำนวนแก้ที่น่าเชื่อที่สุดดังต่อไปนี้



รูปที่ 11.7

A = 101° 13′ 22″ น้ำหนัก 3

B = 93° 49′ 17″ น้ำหนัก 2

C = 87° 05′ 39″ น้ำหนัก 2

D = 77° 52′ 40″ น้ำหนัก 1

วิธีทำ ให้ V_1, V_2, V_3 และ V_4 เป็นจำนวนแก้ที่น่าเชื่อที่สุดที่จะปรับให้มุม A, B, C และ D ตามลำดับ

$$A + B + C + D = 360° \; 00' \; 58.''0.$$

โดยทฤษฎีนั้น

A + B + C + D = 360° ที่เกินไป 58.″0 คือ ความเคลื่อนคลาดและหากจะทำการรังวัดมาได้มุม A + B + C + D = 360 ก็ถือว่าเป็นสิ่งโดยบังเอิญแท้ ๆ ตามความเป็นจริงจะต้องมีความเคลื่อนคลาดแฝงอยู่ด้วยกับค่ารังวัดมาเสมอ

1) ประกอบสมการรังวัด (Observation Equations)

$$\left.\begin{array}{ll} V_1 = R_1 & \text{น้ำหนัก 3} \\ V_2 = R_2 & \text{น้ำหนัก 2} \\ V_3 = R_3 & \text{น้ำหนัก 2} \\ V_4 = R_4 & \text{น้ำหนัก 1} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

สำหรับการรังวัดเชิงเงื่อนไข (Conditioned Observations) จะต้องนำมาพิจารณาด้วยซึ่งหมายถึงค่ารังวัดที่ตัวไม่รู้ (Unknown Quantities) จะถูกกำหนดหามาไม่เพียงแต่เพื่อให้สมจริง หรือใกล้สมการรังวัดเท่าที่จะใกล้ได้ แต่ยังต้องให้สมจริงต่อเงื่อนไขเฉพาะอื่น ๆ ที่รู้ได้อีกด้วย เงื่อนไขเหล่านี้ต้องมีจำนวนน้อยกว่าจำนวนตัวไม่รู้ ทั้งนี้เพื่อตัวไม่รู้อาจกำหนดหาได้จากเงื่อนไขเหล่านั้นเอง

ในการนี้จะต้องมีสมการเชิงเงื่อนไขเกิดขึ้น โดยเหตุนี้เราสามารถกำจัดตัวไม่รู้ออกไปได้มากเท่า ๆ กับกำจัดเงื่อนไขอื่น ๆ ที่มีอยู่ ซึ่งการประกอบสมการเชิงเงื่อนไขคงมีลักษณะคล้ายกับการประกอบสมการรังวัด

2) ประกอบสมการเชิงเงื่อนไข (Conditioned Equations)

$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + (360°\ 00'\ 58''.0) - 360° = 0$

หรือ $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + 58.0 = 0$

กำจัด V_4 โดยอาศัย (A) ได้

$V_1 + V_2 + V_3 + R_4 + 58.0 = 0$

หรือ $-V_1 - V_2 + V_3 - 58.0 = R_4$

ฉะนั้น สมการที่ได้ซึ่งจะต้องไปหาสมการนอร์มาลจึงเป็นดังนี้

$V_1 = R_1$ น้ำหนัก 3 ....(1)

$V_2 = R_2$ น้ำหนัก 2 ....(2)

$V_3 = R_3$ น้ำหนัก 2 ....(3)

$-V_1 - V_2 - V_3 - 58.0 = R_4$ น้ำหนัก 1 ....(4)

3) ประกอบสมการนอร์มาล (Normal Equations)

โดย (5) ด้วยวิธี Partial Differentiation ใน (1), (2), (3) และ (4) มุ่งต่อ V_1 ได้

$$\frac{\partial R_1}{\partial V_1} = 1, \quad \frac{\partial R_2}{\partial V_1} = 0, \quad \frac{\partial R_3}{\partial V_1} = 0, \quad \frac{\partial R_4}{\partial V_1} = -1$$

นำแทนใน (5) คือ

$$P_1R_1 \frac{\partial R_1}{\partial V_1} + P_2R_2 \frac{\partial R_2}{\partial V_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + P_nR_n \frac{\partial R_n}{\partial V_1} = 0$$

$$3V_1(1) + 2V_2(0) + 2V_3(0) + (-V_1 - V_2 - V_3 - 58.0)(-1) = 0$$

$$4V_1 + V_2 + V_3 + 58.0 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(5)$$

โดยทำนองเดียวกันเราจะได้สมการนอร์มาลมาอีก 2 สมการ คือ

$$V_1 + 3V_2 + V_3 + 58.0 = 0 \qquad \text{..........(6)}$$

$$V_1 + V_2 + 3V_2 + 58.0 = 0 \qquad \text{..........(7)}$$

โดยการแก้สมการ (5), (6) และ (7) ธรรมดาจะได้

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= -\ \ 8.29 \\ V_2 &= -\ 12.43 \\ V_3 &= -\ 12.43 \\ \text{และ } V_4 &= -\ 24.85 \end{aligned}\right\} \text{ จำนวนแก้ที่น่าเชื่อที่สุด}$$

ซึ่ง $\sum\limits_{i=1}^{i=4} P_i V_i^2 = 995.2564$ มีค่าต่ำสุด

4) ค่าของมุม A, B, C และ D ที่น่าเชื่อที่สุด คือ

A = 101° 13″.71

B = 93 49 04.57

C = 87 05 26.57

D = 77 52 15.15

ข้อควรสังเกต

การหาค่าที่น่าเชื่อของการรังวัดใด ๆ นอกจากจะหาโดยวิธีการดังกล่าวแล้วอาจคำนวณหาค่าที่น่าเชื่อที่สุดของการรังวัด หรือการสังเกตใด ๆ ได้โดยตรงเลยทีเดียว คือประกอบสมการการรังวัด และสมการนอร์มาลออกมาโดยมิต้องคำนึงถึงตัว V'S โดยใช้สูตร (4) หรือ (5) แล้วแต่กรณี ต่อไปทำการแก้สมการหาค่าที่น่าเชื่อออกมาเลย

หากค่ารังวัดมีจำนวนมากหลาย มีตัวที่ต้องการทราบอยู่หลายตัว การกระทำดังกล่าวจะทำให้ชักช้าเสียเวลา และยุ่งสับสน เราจึงนิยมไปใช้วิธีแก้สมการโดยวิธีของ Doolittle ซึ่งจะลดจำนวนสมการลงน้อยกว่าตัวไม่รู้ ไม่ต้องประกอบสมการเท่ากับตัวไม่รู้ดังข้างบน ฉะนั้น Doolittle Method จึงเป็นที่นิยมกันโดยทั่วไป

ข้อควรระวังในการใช้อนุจัตุรัสวิธี

ในการใช้หลักการต่าง ๆ ตามที่กล่าวมาแล้วควรระลึกว่าการปรับแก้ธรรมดาด้วยวิธีอนุจัตุรัสนั้น เกี่ยวข้อง หรือกระทำกับ**ความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญ**เท่านั้น และไม่เกี่ยวข้องใด ๆ กับความเคลื่อนคลาดคงที่ (Constant error) หรือ**ความเคลื่อนคลาดเป็นระเบียบ** (Systematic error) ที่จะกระทบกระเทือนต่อผลการรังวัด

ความเคลื่อนคลาดคาดคะเน (Probable error) อาจไกลจากความเคลื่อนคลาดจริงเพราะความเคลื่อนคลาดคงที่เข้ามาแฝงอยู่ เราจึงควรคิดถึงมาตรความละเอียดประณีตตามที่ได้กล่าวไว้เรื่องของผลที่เบี่ยงเบนออกไปจากผลปานกลางของจำนวนการรังวัดมากครั้งยิ่งกว่าการเบี่ยงเบนจาก**ค่าจริง** (True Value) โดยปกติความจริง**ความเคลื่อนคลาดคงที่** หรือ**ความเคลื่อนคลาดเป็นระเบียบ** มีความสับสนสลับซับซ้อนยิ่งกว่าความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญ (Accidental errors) ซึ่งผู้รังวัดควรเฝ้าดู ความเคลื่อนคลาดคงที่เหล่านี้อย่างต่อเนื่องที่จะกระทบกระเทือนต่อผลของเขา ตราบใดที่เงื่อนไขต่าง ๆ ซึ่งการวัดกระทำภายใต้เงื่อนไขนั้นยังคงได้ความเคลื่อนคลาด**เป็นระเบียบ**อย่างเดียวกัน ดังนั้นจึงไม่ต้องวัด การมีความเคลื่อนคลาดชนิดนั้นอยู่ที่น่าจะรังวัดต่อเมื่อสภาวะต่าง ๆ แปรเปลี่ยนไปอย่างมากเท่าที่จะแปรเปลี่ยนได้ หากการรังวัดกระทำ ณ อุณหภูมิแตกต่างกัน หรือใช้เครื่องมือต่างกัน ความแปรเปลี่ยนของผลที่ได้รับปกติจะโตกว่าเมื่อสภาวะต่าง ๆ นั้นไม่แปรเปลี่ยน ความแปรเปลี่ยนเหล่านี้ชี้ให้เห็นว่ามีความเคลื่อนคลาดเป็นระเบียบแฝงอยู่ และมักอาจทำให้ผู้รังวัดคาดคะเนถึงขนาดได้

การคำนวณค่าคาดคะเนที่น่าเชื่อที่สุดน่าจะได้ผลลัพธ์ดีขึ้น เมื่อคำนึงถึงเฉพาะความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญ แต่ก็ได้ทิ้งรูปลักษณะของความเคลื่อนคลาดที่เรามิได้เข้าไปเกี่ยวข้องออกไปอย่างมาก การขาดประสิทธิผลจากการรังวัดเพิ่มขึ้น และการปรับค่าเพื่อความมุ่งหมายขจัดความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญขนาดเล็ก และในขณะเดียวกันไม่อาจขจัดความเคลื่อนคลาดคงที่ขนาดใหญ่ได้นั้น อาจแสดงให้เห็นภาพได้จากผลอันได้จากผู้ยิงเป้าซึ่งกระชับปืนเล็กอย่างมั่นคง แล้วยิงกระสุนรวมเป็นกลุ่มขนาดเล็กสู่เป้า แต่การเล็งปืนแนวเล็งเฉจากแนวทำให้กระสุนไม่ตรงเป้า สิ่งที่น่าพิจารณาคือ ต้องยิงเป็นจำนวนมากภายใต้ภาวะการเหล่านั้น การปรับค่าโดยวิธีอนุจัตุรัสย่อมเหมือนกันกับความพยายามเพื่อหาศูนย์กลางของกลุ่มกระสุนของเขา และไม่อาจบอกอะไรได้ถึงระยะจากวงเป้าการศึกษาสาเหตุของความเคลื่อนคลาดก็

เพื่อเขาสามารถทำการปรับแนวเล็งที่จะยิงให้ถูกเป้ามากกว่าจะยิงกันด้วยจำนวนนัดเป็นอนันต์ภายใต้ภาวะการเช่นนั้น แน่ละ อนึ่งการเปรียบเทียบกันก็ไม่น่าเป็นจริง คนถือเป้ารู้ว่าเป้าของเขาอยู่ที่ไหน ส่วนผู้ยิงจะไม่ทราบค่าแท้จริงของจำนวนกระสุนที่ผู้ถือเป้ากำลังวัด

ส่วนวิธีอนุจัตุรัสอาจไม่แสดงถึงความมีอยู่ของความเคลื่อนคลาดคงที่ การศึกษาความละเอียดของผลที่ได้รับ และความรู้เกี่ยวกับกฎเกณฑ์จะใช้ควบคุมพฤติกรรมของความเคลื่อนคลาดโดยบังเอิญอาจทำให้ผู้รังวัด หรือผู้สังเกตสืบหาความเคลื่อนคลาดคงที่ที่มีอยู่ได้ หรืออย่างน้อยที่สุดก็ตัดสินได้ว่าบางทีอาจมีติดอยู่ และต่อไปก็เพื่อดัดแปลงวิธีของเขาในการสังเกต หรือวัดเพื่อลดผลอันเกิดจากความเคลื่อนคลาดคงที่นั้น ความแปรเปลี่ยนของผลที่ได้รับซึ่งโตกว่าความเคลื่อนคลาดของการรังวัดแสดงได้โดยการวัดที่มีความละเอียดซึ่งดูเหมือนจะหมายถึงว่าความเคลื่อนคลาดคงที่มีอยู่ การติดตามค้นหาความเคลื่อนคลาดไปถึงแหล่งของความเคลื่อนคลาดนั้น และการดัดแปลงเครื่องมือ และวิธีการต่อไปอาจทำให้ใช้อนุจัตุรัสวิธีอันเป็นวิธีที่สำคัญที่สุด

ปัญหาโจทย์

1. มุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเป็นดังนี้

$$A = 61^\circ\ 07'\ 52.''00$$

$$B = 76\ \ 50\ \ 54.00 \quad \text{และ}$$

$$C = 42\ \ 01\ \ 12.15$$

เศษทรงกลม 02."11 น้ำหนักที่กำหนดให้แก่มุมรังวัดเป็น 3,2 และ 1 ตามลำดับ จงปรับแก้มุมเหล่านี้ตามความสัมพันธ์อันคงที่ คือ $A + B + C = 180^\circ\ 00'\ 02.''11$

2. ในการโยนลูกเต๋าคู่หนึ่ง เมื่อโยนขึ้นไปครั้งหนึ่งนั้นผลคาดคะเนที่สี่โพดำ หรือหน้าขึ้นเหมือนกันจะไม่ปรากฏนั้นเป็นเท่าไร?

3. โยนลูกเต๋าคู่หนึ่งขึ้นไปครั้งหนึ่ง จงหาผลคาดคะเนที่จะทำให้จุดบนหน้าลูกเต๋าที่ขึ้นรวมกันปรากฏเป็น 5?

4. ในการวัดเส้นฐาน 5 ครั้งด้วยการอ่านค่าโซ่ลานเหล็กกล้าถึงทศนิยมตัวที่ 2 ของฟุต และอ่านค่าที่วัดด้วยโซ่ธรรมดาถึงทศนิยมตัวที่ 1 ของฟุตได้ผลดังนี้

ด้วยโซ่ลานเหล็กกล้า 741.17, 741.09, 741.22, 741.12 และ 741.10

ด้วยโซ่ธรรมดา 741.2, 741.4, 741.0, 741.3 และ 741.1

จงคำนวณหาความเคลื่อนคลาดคาดคะเน และน้ำหนักสำหรับการรังวัดครั้งเดียวในแต่ละกรณี และหาระยะที่ปรับแก้แล้วตลอดจนความเคลื่อนคลาดคาดคะเนของระยะนั้นด้วย

5. ในการหาจำนวน 2 จำนวน L ได้รับดังนี้

$$L_1 = 427.320 \pm 0.040,\ L_2 = 427.30 \pm 0.16$$

จงหาน้ำหนักเชิงสัมพัทธ์ และค่าที่น่าเชื่อที่สุดของ L และความเคลื่อนคลาดคาดคะเนด้วย

6. อนุกรมของการวัดค่า M ได้ความต่างลองจิจูดระหว่างสองสถานี และน้ำหนักดังนี้

M	P	หมายเหตุ
1° 4′ 30″	4	จงคำนวณหาค่า
41	1	M_0 (หรือ $\bar{X}$), μ, μ_0
43	1	r, r_4, a.d., r_o,
37	9	และ A.D. (Average Devia-
48	4	tion of Mean)
34	16	
25	9	
46	1	
28	25	
24	4	