บทที่ 10
การคำนวณตำแหน่งทางยีออเดซี

1. การคำนวณตำแหน่งทางยีออเดซี

ในการสำรวจชั้นสูงที่ครอบคลุมพื้นที่กว้างใหญ่ไพศาล ตำแหน่งของจุดยอดมุมสามเหลี่ยมเรานิพจน์ หรือบอกเป็นละติจูด (Latitudes) และลองจิจูด (Longitudes) ส่วนในอาณาบริเวณอันจำกัดอาจใช้ระบบพิกัดทรงกลมฉากเพื่อให้ได้เปรียบกว่าการบอกเป็นพิกัดดังกล่าวก็ได้ สำหรับประเทศสหรัฐ และประเทศไทยการสำรวจนิยมใช้ระบบละติจูด และลองจิจูด

ละติจูด และลองจิจูดของตำบลหนึ่งตำบลใด หมายถึงจุดนั้นได้แสดง หรือชี้บอกตำแหน่งของมันว่าอยู่บนพื้นผิวที่ใช้เป็นฐานในการคำนวณ นั่นคือ จุดทั้งหลายที่สร้าง หรือกำหนดขึ้นบนผิวพิภพจริงถูกทอนลงไปไว้บนพื้นผิวสเฟียรอยด์ การจะคำนวณหาตำแหน่งของจุดใด ๆ จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งจำเป็นต้องทราบขนาด (Dimensions) ของสเฟียรอยด์ที่ใช้เป็นพื้นฐานการคำนวณ และควรทราบว่าตำแหน่งของจุดประกอบกับทิศทาง หรือภาคของทิศที่คำนวณได้ที่จะเข้าไปเชื่อมโยงเข้ากับสถานีในโครงข่ายสามเหลี่ยมอื่น ๆ อีกด้วย นอกจากดังกล่าวจำเป็นต้องทราบระยะ และภาคของทิศ หรือทิศทางจากสถานีหนึ่งไปยังอีกสถานีหนึ่ง เพื่อจะได้สามารถขยายโครงข่ายสามเหลี่ยมสำหรับใช้ในการสำรวจบริเวณท้องถิ่นนั้น ฉะนั้น ตำแหน่งของจุดใด ๆ ที่สมบูรณ์ก็คือ จุดนั้นทราบค่าละติจูด, ลองจิจูด, ภาคของทิศ กับระยะ ซึ่งระยะนี้ ได้ทอนลงหาพื้นระดับทะเลปานกลางแล้ว

ตำแหน่งของจุดที่เลือกขึ้นพร้อมกับทิศทางจะให้ค่าตำแหน่งของจุดอื่น ๆ ในโครงข่ายเชิงสัมพัทธ์ โดยอ้างอิงถึงสเฟียรอยด์ที่นำมาใช้เป็นพื้นฐานการคำนวณ และสถานีดังกล่าวที่เลือกขึ้นจะกลายเป็นจุดกำเนิดทางยีออเดติก (Geodetic Datum) การสำรวจของประเทศต่าง ๆ อาจใช้สเฟียรอยด์ไม่เหมือนกัน หรือถ้าใช้สเฟียรอยด์อย่างเดียวกันแต่อาจได้ตำแหน่ง

ของจุดที่ไม่ตรงตำแหน่งเดียวกันจริง ๆ ส่วนต่าง ๆ ของการสำรวจในประเทศใดประเทศหนึ่งจะไม่เข้ากันได้แท้จริงในสเฟียรอยด์อันเดียวกันจนกว่าจะได้มีการต่อเชื่อม หรือโยงยึดกันด้วยการสามเหลี่ยม

ประเทศไทยใช้สเฟียรอยด์ของเอเวอเรสท์ (Everest Spheroid) สเฟียรอยด์อื่น ๆ เช่น Bessel 2384 และ Clarke 2409 มีที่ใช้กันอย่างกว้างขวางที่สุดในการใช้เป็นพื้นฐานการสำรวจชั้นสูง Bessel Spheroid ที่ใช้คำนวณโดยอาศัยข้อมูลส่วนใหญ่ที่ได้มาจากยุโรป ปรากฏว่าเข้ากันได้ดีกับความโค้งของส่วนผิวพิภพส่วนนั้น สเฟียรอยด์นี้ยังใช้กันอยู่ในยุโรป Clarke Spheroid 2409 (1866) ได้ใช้คำนวณจากส่วนโค้งในบริเวณส่วนพื้นผิวพิภพอันกว้างใหญ่ไพศาล แสดงให้เห็นถึงอัตรายุบของขั้วมีมากกว่า Bessel Spheroid อยู่มาก และต่อมาจึงใช้กับความโค้งของพื้นผิวที่ค่อนข้างราบในบริเวณละติจูดของยุโรปกับสหรัฐ

แต่ก่อนการคำนวณงานสำรวจชั้นสูงของสหรัฐใช้ Bessel Spheroid การคำนวณกระทำโดย Coast and Geodetic Survey ปรากฏเมื่อการสำรวจขยายออกไปทีละน้อยชักเกิดความคลาดเคลื่อนมากขึ้น จนกระทั่งถึงปี 2423 (1880) ทางสหรัฐจึงตัดสินใจเปลี่ยนเป็นใช้อวัยวะของ Clarke Spheroid ซึ่งปรากฏว่า Clarke Spheriod ที่ใช้คำนวณเข้ากันได้กับความโค้งของพื้นผิวพิภพในส่วนของประเทศสหรัฐใกล้เคียงมากขึ้น

การคำนวณหาตำแหน่งของจุดใดเชิงสัมพัทธ์ หมายถึงต้องทราบค่าพิกัดภูมิศาสตร์จุดใดจุดหนึ่งพร้อมทั้งทิศทางจากจุดนั้นไปยังจุดที่ต้องการคำนวณหาตำแหน่ง เช่น ตำบล A ทราบค่าพิกัดภูมิศาสตร์ คือ ละติจูด และลองจิจูด กับแอซิมัธ หรือภาคของทิศ และระยะจากจุด A ไปยังจุด B สามารถคำนวณหาพิกัดภูมิศาสตร์ของจุด B และแอซิมัธ หรือภาคของทิศกลับจากจุด B ไปยังจุด a ได้ แอซิมัธไปกับแอซิมัธกลับจะต่างกันไม่เท่ากับ 180° จริง ๆ ความต่างอันนี้เราให้เป็นค่าที่เกิดจากการที่เส้นเมริเดียนซึ่งผ่านจุดทั้ง 2 ที่พิจารณามิได้ขนานกัน แต่จะลู่เข้าไปหากันที่ขั้ว เรียก "เมริเดียนรวม" (Convergence of the Meridians) เส้นเมริเดียนใด ๆ จะขนานกันที่ศูนย์สูตร (Equator)

วิธีการคำนวณละติจูด และลองจิจูด กับ แอซิมัธ และระยะที่ใช้กันโดยทั่วไปมี 4 วิธี คือ

1) สำหรับระยะจากจุดถึงจุดยาวมากใช้สูตรของ Clarke
2) ระยะสั้น ๆ และปานกลางใช้สูตรของ Clarke
3) ใช้สูตรของ Puissant
4) ใช้สูตรละติจูดกึ่งกลาง (Mid - Latitude)

สูตรของ Clarke เหมาะสำหรับระยะที่ยาวที่สุดในการสำรวจชั้นสูง แต่ก็มีข้อเสียเปรียบอยู่เหมือนกัน เพราะต้องใช้ค่าพระจณิตจำนวนตัวเลข 6 - 10 ตัว สูตรนี้ให้ความละเอียดถูกต้องถึงระยะประมาณ 200 ไมล์ทีเดียว ส่วนสูตรใช้คำนวณสำหรับระยะสั้น ๆ และระยะปานกลางเหมาะกับระยะยาวถึง 70 ไมล์ มีที่ใช้กว้างขวางในประเทศอังกฤษ

สูตร Puissant สะดวก และเหมาะต่อการใช้คำนวณและอาจดัดแปลงนำไปใช้กับระยะยาวถึงประมาณ 70 หรือ 80 ไมล์ได้ มีที่ใช้กว้างขวางในอินเดีย และในสหรัฐ เฉพาะในงานที่ใช้ความยาวขนาดต่าง ๆ ยกเว้นด้านที่ยาวที่สุด สูตรละติจูดกึ่งกลางง่ายกว่าสูตรอื่นในหลายประการ อาจนำไปใช้กับงานธรรมดาบริเวณที่มีละติจูดต่ำกว่า 60° ระยะไม่เกิน 20 ถึง 25 ไมล์ ความเสียเปรียบในสูตรนี้ที่สำคัญ คือ

- ความแตกต่างระหว่างแอซิมัธไป - กลับ
- มุมเมริเดียนรวม
- การเกี่ยวข้องกับมุมขนาดเล็ก
- ความยุ่งยากในการเทียบค่า

2. เดตัมอเมริกาเหนือ (The North American Datum) หรือศูนย์กำเนิด

ปี 2444 กรมสำรวจชายฝั่ง และทำแผนที่ได้นำเอาค่า "เดตัมมาตรฐานสหรัฐ" (U.S. Standard Datum) โดยกำหนดใช้สถานี Meades Ranch ซึ่งมีค่าของตำแหน่งต่อไปนี้ จากรูป Clarke Spheroid

ละติจูด	(φ)	39°	13′	26.″686
ลองจิจูด	(λ)	98	32	30.506
แอซิมัธไปยัง Waldo	(α)	75	28	14.52

รัฐบาลแคนาดา และเม็กซิโกได้ดัดแปลงเดตัม (Datum) อันนี้จนเป็นที่ทราบกันแล้วทั่วไปคือ "เดตัมอเมริกาเหนือ" (North American Datum) ในการตัดสินใจที่จะใช้จุดใดเป็นเดตัมการสำรวจชั้นสูง จำเป็นต้องพิจารณาถึงสิ่งสำคัญ 2 ประการ

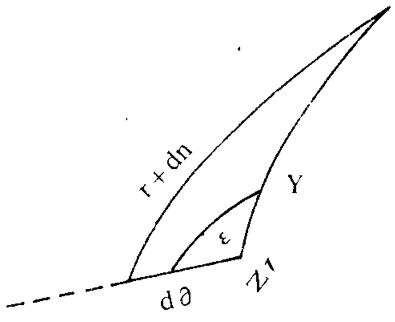
- ควรเลือกเดตัมในลักษณะที่ลดงานคำนวณตำแหน่งเชิงยีออเดติคให้เหลือน้อยที่สุด

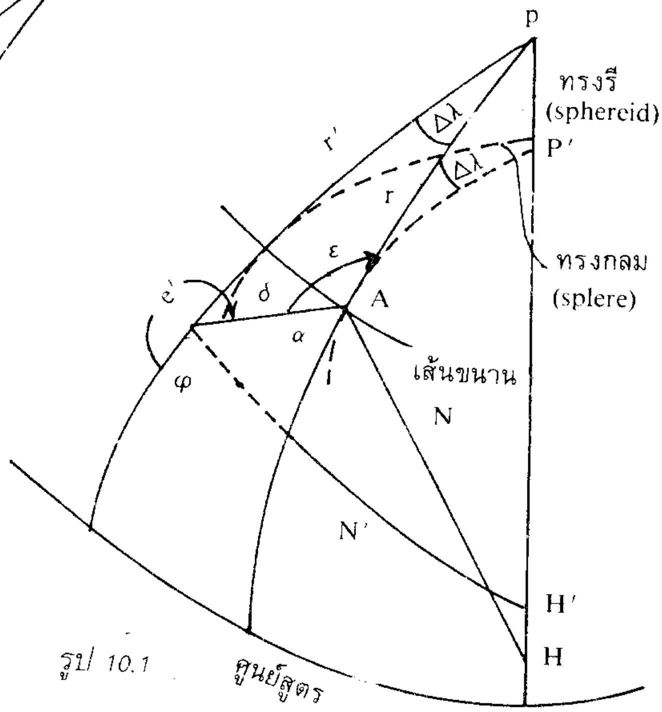
- เมื่อได้วางโครงข่ายสามเหลี่ยมลงไปแล้วต้องอยู่ในตำแหน่งที่ไม่มีความเคลื่อนคลาดร้ายแรงเกิดขึ้น ณ ส่วนใด ๆ ของระบบโครงข่ายสามเหลี่ยมนั้น

ขณะที่เดตัมนี้ได้เลือกขึ้น จำนวนจุดของโครงข่ายสามเหลี่ยมมีอยู่อย่างมากหลายแล้วตามฝั่งมหาสมุทรแอตแลนติค จากการเลือกเดตัมนี้ปรากฏว่า Meades Ranch สมนัยมั่นคงดีกับเดตัมเก่า ซึ่งการสามเหลี่ยมก็ได้คำนวณขึ้นจากเดตัมนี้ จึงทำให้ไม่ต้องทำการคำนวณงานอันมากมายนั้นขึ้นใหม่อีก ขณะเดียวกันปรากฏว่าที่นี่การสามเหลี่ยมที่วางลงไปทำให้ได้ตำแหน่งที่ใกล้เคียงกับตำแหน่งที่ดีที่สุดทางทฤษฎี

3. วิธีการคำนวณละติจูด และลองจิจูด

ในรูปสมมุติทราบค่าละติจูด (φ) และลองจิจูด (λ) ของจุด A ตลอดจนระยะและแอซิมัธจาก A ไป B แล้ว ต่อไปเราจะได้ปรับปรุงสูตรซึ่งจำเป็นเพื่อคำนวณค่าละติจูดและลองจิจูดของตำบล B ในการดำเนินการเรื่องนี้เราจะต้องแก้รูปสามเหลี่ยมทรงกลมเชิงดิฟเฟอเรนเชียล ซึ่งประกอบกันขึ้นด้วยการที่ด้านนั้นโยงจาก 2 จุดไปยังขั้วพิภพ





รูป 10.1

4. ความต่างละติจูด

ให้ P′ เป็นจุดขั้วของสเฟียรอยด์

P เป็นขั้วของรูปทรงกลมที่สัมผัสสเฟียรอยด์ตามเส้นขนานผ่านตลอดจุด A

N เป็นรัศมีของทรงกลมซึ่งมีศูนย์กลางอยู่ที่ H

A เป็นจุดทราบค่าพิกัด และแอซิมัธแล้ว

B ต้องการทราบ

λ ระยะเชิงมุมจากขั้วถึงจุด A

λ' เป็นระยะยังไม่ทราบของจุด B

δ คือส่วนโค้ง AB

α เป็นแอซิมัธ และ

$\in$ คือ 180°

ถ้า λ' คำนวณโดยแก้รูปสามเหลี่ยมทรงกลมโดยตรง ABP ความละเอียดที่ต้องการนั้นให้ใช้ค่าพละคณิตเพียงประมาณ 10 ตำแหน่ง เพื่อสะดวก และให้ได้ความละเอียดอย่างแท้จริงสำหรับระยะสั้น ๆ ในเชิงปฏิบัติ เพื่อใช้สูตรความต่างละติจูด นั่นคือ หาค่า $\lambda - \sigma'$-

สูตรการแก้ หรือหา λ' โดยตรงในสามเหลี่ยมทรงกลม คือ

$$\cos\lambda' = \cos\lambda.\cos\sigma + \sin\lambda.\sin\sigma.\cos\in \qquad \ldots\ldots(1)$$

เนื่องจาก λ' เป็นฟังก์ชั่นของ σ ค่าของ λ' นี้อาจนิพจน์ หรือแสดงออกเป็นอนุกรมลู่เข้า (อันดับตีบ) โดยอาศัย Maclaurin's Formula ดังนี้

$$\lambda' = \lambda'_{\sigma=0} + \left.\frac{d\lambda}{d\sigma}\right|_{\sigma=0} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\lambda'}{d\sigma^2}\right|_{\sigma=0}.\sigma^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3\lambda'}{d\sigma^3}\right|_{\sigma=0}.\sigma^3 + \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

เมื่อพิจารณาหาสูตรของ Machaurin จะพบว่าสัมประสิทธิ์ดิฟเฟอเรนเชียลมีอยู่ 3 แห่ง ฉะนั้นจึงต้องหาค่าอนุพันธ์สมการ (1) ต่อเนื่องกัน 3 ครั้ง และในแต่ละครั้งให้แทนด้วย $\sigma = 0$ ผลของค่าอนุพันธ์ 2 ครั้งแรก คือ

โดย Differentiate (1) มุ่งต่อ σ และถือ $\cos\lambda$ กับ $\cos\in$ เป็นตัวคงที่

$$-\sin\lambda'\frac{d\lambda'}{d\sigma} = -\cos\lambda\sin\sigma + \sin\lambda\cos\in\cos\sigma \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

Differentiate (3) เป็นครั้งที่ 2

$$-\sin\lambda'\frac{d^2\lambda'}{d\sigma^2} - \cos\lambda'\left(\frac{d\lambda'}{d\sigma}\right)^2 = -\cos\lambda\cos\sigma - \sin\lambda\sin\sigma\cos\in \qquad \ldots\ldots(4)$$

$$= -\cos\lambda' \text{ โดย (1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

ก่อนจะทำการ Differentiate (5) เป็นครั้งที่ 3 จะต้องเขียน (5) เสียใหม่ดังนี้ คือนำเอาค่า $\cos\gamma'$ หารตลอดได้

$$\tan\lambda \frac{d^2\lambda'}{d\delta^2} + \left(\frac{d\lambda'}{d\delta}\right)^2 = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots(6)$$

โดย Differentaite (6) จะได้

$$\tan\lambda' \frac{d^3\lambda}{d\delta} + \sec^2\lambda' \frac{d\lambda'}{d\delta} \cdot \frac{d^2\lambda'}{d\delta} + 2 \cdot \frac{d\lambda}{d\delta} \cdot d\lambda' = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(7)$$

เมื่อ $\delta = 0$, $\lambda' = \lambda$ ใน (3) จึงเป็น

$$-\sin\lambda \frac{d\lambda'}{d\delta} = \sin\lambda\cos\in$$

ฉะนั้น

$$\frac{d\lambda'}{d\delta} = -\cos\in \qquad \ldots\ldots\ldots(8)$$

นำแทน (6) ได้

$$\tan\lambda \frac{d^2\lambda'}{d\delta^2} + \cos^2\in = 1$$

หรือ $$\frac{d^2\lambda'}{d\delta^2} = \frac{1-\cos^2\in}{\tan\lambda} = \sin^2\in\ \cot\lambda \qquad \ldots\ldots\ldots(9)$$

นำ (8) และ (9) แทนใน (7) จะได้

$$\tan\lambda \frac{d^3\lambda'}{d\delta^3} + \sec^2\lambda(-\cos\in)(\sin^2\in\cot\lambda) + 2(-\cos\in)(\sin^2\in\cot\lambda) = 0$$

$$\frac{d^3\lambda'}{d\delta^3} = \cos\in\sin^2\in\cot^2\lambda\,(2+\sec^2\lambda)$$

$$= \cos\in\sin^2\in(2\cot^2\lambda + \cot^2\lambda\sec^2\lambda)$$

$$= \cos\in\sin^2\in(2\cot^2\lambda + \frac{\cot^2\lambda}{\sin^2\lambda}\cdot\frac{1}{\cos^2\lambda}$$

$$= \cos \in \sin^2 \in (2 \cot^2 \lambda + \operatorname{cosec}^2 \lambda)$$

$$= \cos \in \sin^2 \in (2 \cot^2 \lambda + 1 + \cot^2 \delta)$$

$$(1 + 3 \cot^2 \lambda) \cos \in \sin^2 \in \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

นำค่าใน (8), (9) และ (10) แทนใน (2) จะได้

$$\lambda' = \lambda - \delta \cos\in + \frac{\delta^2}{2} \sin^2 \in \cot \lambda + \frac{\delta^3}{6} (1 + 3 \cot^2 \lambda) \cos \in \sin^2 \in + \ldots(11)$$

ให้เปลี่ยนเป็นเทอมของละติจูด และแอซิมัธโดยให้ (ในรูป)

$$\lambda' = 90° - \varphi'$$

$$\delta = 90° - \varphi$$

$$\in = 180° - \alpha$$

ใน (11) จึงเป็น

$$\varphi - \varphi' = \delta \cos(180 - \alpha) + \frac{\delta^2}{2} \sin^2(180 - \alpha) \cot(90 - \varphi) +$$

$$\frac{\delta^3}{6} \{1 + 3\cot^2(90 - \varphi)\} \cos(180 - \alpha) \sin^2(180 - \alpha) + \ldots$$

$$= \delta \cos\alpha + \frac{\delta^2}{2} \sin^2\alpha \tan\varphi - \frac{\delta^3}{6} (1 + 3\tan^2\varphi) \cos\alpha \sin^2\alpha + \ldots(12)$$

ความต่างละติจูดบนทรงกลมคิดเป็นเรเดียนส์ (Radians) เพื่อแปลงพิกัดของจุดยอดสามเหลี่ยมจากทรงกลมลงบนสเฟียรอยด์ ควรสังเกตว่าถ้ารัศมีทรงกลมเท่ากับ N (คือเส้นนอร์มาล) และศูนย์กลางอยู่ที่ H และแกนหมุนของทรงกลมกับสเฟียรอยด์ย่อมทับกัน

เดียวกันละติจูด (φ) ก็จะเป็นอย่างเดียวกันกับพื้นผิว 2 พื้นผิวนี้ และระยะกับแอซิมัธของ AB บนพื้นทั้ง 2 จะแตกต่างจากกันเป็นจำนวนที่แลเห็นได้ชัด ฉะนั้นเราอาจให้

$$\frac{S}{N} = \varsigma \quad \text{(เรเดียนส์)}$$

ซึ่ง S คือ ระยะคิดเป็นหน่วยเส้นตรง ดังนั้น (12) จึงเป็น

$$\varphi - \varphi' = \frac{S \cos \alpha}{N} + \frac{S^2}{2N^2} \sin^2\alpha \tan\varphi - \frac{S^3}{6N^3} \sin^2 \cos\alpha (1 + 3\tan^2\varphi) \ldots(13)$$

อย่างไรก็ดีความต่างละติจูดควรรังวัดกันบนโค้งเมริเดียน ซึ่งมีรัศมีเป็น R_m เพราะเราวัดตามแนว P'A ความแตกต่างละติจูดเชิงเส้นตรงสำหรับบนพื้นผิวทั้ง 2 นั้นเกือบจะไม่มี คือ มีค่าใกล้เคียงกันมาก และความต่างระยะเชิงมุมทางละติจูดย่อมจะแปรเปลี่ยนในเชิงผกผันกับรัศมี นั่นคือ

$$\frac{S}{N} = (\varphi - \varphi')$$

$$S = (\varphi - \varphi')N = \Delta\varphi'' R_m \text{arc } 1''$$

$$\therefore \Delta\varphi'' = \frac{(\varphi - \varphi')N}{R_m \text{arc } 1''} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

$\Delta\varphi''$ เป็นค่าฟิลิบดาบนเมริเดียนของทรงรี และ R_M เป็นรัศมีความโค้งของเมริเดียนที่จุดกึ่งกลาง (Middle Point) ระหว่างเส้นขนานผ่านจุด A และ B ฉะนั้นความต่างทางละติจูด (จงจำไว้ว่าค่าบวกของ $\cos\alpha$ ตรงกันกับการลดลงทางละติจูด) จึงได้

$$-\Delta\varphi'' = \frac{S\cos\alpha}{R_m \text{arc } 1''} + \frac{S^2\sin^2\alpha\tan\varphi}{2NR_M \text{arc } 1''} - \frac{S^3\sin^2\alpha\cos\alpha(1 + 3\tan^2\varphi)}{6N^2R_M \text{arc } 1''} \ldots\ldots(15)$$

นำเอาเครื่องหมาย – มาใช้เพราะเมื่อ α อยู่ในจุตรางคดลที่ 1 และที่ 4 ค่าของ $\cos\alpha$ เป็นบวก ความต่างละติจูดมีค่าเป็น –

เนื่องจากละติจูดกึ่งกลางนั้นขณะเริ่มการคำนวณยังไม่ทราบ จะสะดวกยิ่งขึ้นตอนเริ่มแรกด้วยการเปลี่ยนที่ค่า R_m สำหรับละติจูดที่ทราบแล้วของจุด A ออกไปซึ่งจะให้ค่าความต่างละติจูดโดยประมาณ และอาจเรียกว่า $\delta\varphi''$ และแล้วจึงเปลี่ยนให้เป็นความต่างที่ตรงกันกับรัศมี R_M โดยคูณอัตราส่วนผกผันของรัศมีดังนี้

$$\frac{\delta\varphi''}{R_M} = \frac{\Delta\varphi''}{R_m}$$

$$\Delta\varphi'' = \delta\varphi''.\frac{R_m}{R_M} = \delta\varphi''(1 - \frac{R_M - R_m}{R_M})$$

$$= \delta\varphi''(1 - \frac{dR_M}{R_M} \qquad \text{(โดยประมาณ)}$$

ซึ่ง $\delta\varphi'' \dfrac{dR_M}{R_M}$ คือ จำนวนแก้ที่จะต้องหักลบจากค่าเทอมที่ 1 คือ $\delta\varphi''$

$$\text{เนื่องจาก} \quad R_m = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

$$\text{ฉะนั้น} \quad dR_m = a(1 - e^2).\frac{d}{d\varphi}(1 - e^2\sin^2\varphi)^{-3/2}$$

$$= -a(1 - e^2).\frac{3}{2}(1 - e^2\sin^2\varphi)^{-5/2}.\frac{d}{d\varphi}\,e^2\sin^2\varphi$$

$$= -a(1 - e^2).\frac{3}{2}(1 - e^2\sin^2\varphi)^{-5/2}.2e^2\sin\varphi - \cos\varphi d\varphi$$

$$= \frac{a(1 - e^2).3e^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{5/2}}.d\varphi \qquad \text{.........(16)}$$

เนื่องจาก dR_m เป็นจำนวนเปลี่ยนจากจุดเริ่มไปยังจุดกึ่งกลาง ความต่าง $d\varphi$ (ขนาดเล็ก) นี้ให้มีค่า $= \frac{1}{2}$ ของความต่างละติจูด นั่นคือ

$$d\varphi = \frac{\delta\varphi''.\text{arc } 1''}{2}$$

ฉะนั้นถ้านำ $\delta\varphi''$ คูณ (16) ทั้ง 2 ข้าง และหารเสียด้วย R_m จะได้

$$\delta\varphi''.\frac{dR_m}{R_m} = \frac{a(1 - e^2).3e^2\sin\varphi\cos\varphi}{2(1 - e^2\sin^2\varphi)^{5/2}}.\text{arc } 1''\,\frac{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}{a(1 - e^2)}.(\delta\varphi'')^2$$

$$= \frac{3e^2\sin\varphi\cos\varphi.\text{arc } 1''}{2(1 - e^2\sin^2\varphi)}(\delta\varphi'')^2$$

$$= D.(\delta\varphi'')^2 \qquad \text{.........................(17)}$$

$D = \dfrac{3e^2\sin\varphi\cos\varphi.\text{arc } 1''}{2(1 - e^2\sin^2\varphi)}$ และถ้าให้ $B = \dfrac{1}{R_m.\text{arc } 1''}$, $C = \dfrac{\tan\varphi}{2NR_m\text{arc } 1''}$

$h = \dfrac{S\cos\alpha}{R_m\text{arc}1''}$ (เทอมแรกใน (15)) และ $E = \dfrac{1 + 3\tan^2\varphi}{6N^2}$ สมการ (15) จะได้

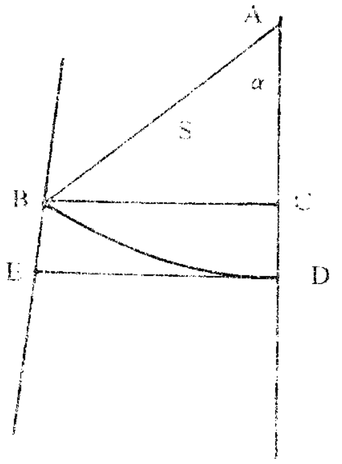
$$-\Delta\varphi'' = S.B.\cos\alpha + S^2.C.\sin^2\alpha + (\delta\varphi'')^2.D - h.S^2.E.\sin^2\varphi \qquad \text{........(18)}$$

ความต่างละติจูดขณะนี้เป็นพีลิบดา ฉะนั้นละติจูดของ B คือ

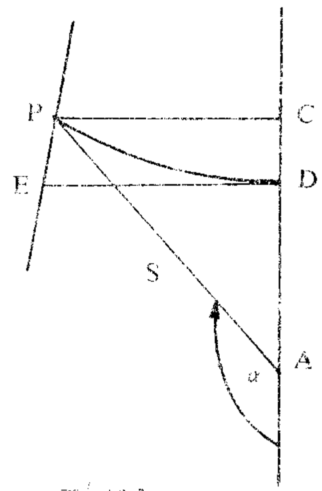
$$\varphi' \quad = \quad \varphi + \Delta\varphi''$$

ค่าพละคณิตของแฟคเตอร์ B, C, D และ E คำนวณไว้ในตารางสำเร็จ

เทอม D จัดไว้หน้าเทอม E เพราะธรรมดาเทอมนี้มีค่าเล็กกว่าเทอม D เมื่อพละคณิตของ S เล็กกว่า 4.23 ..... อาจตัดเทอม E ออกเสียได้ และ h^2 อาจใช้แทน $(d\varphi'')^2$ เมื่อพละคณิตของ S น้อยกว่า 4.93 .....



รูป 10.2



รูป 10.3

เทอมที่ 4 ใน Maclaurin อาจตัดทิ้ง นอกจากระยะยาวมากที่สุดไม่ว่า α จะมีค่าเล็กกว่า 90° หรือโตกว่า 270° (SW หรือ SE) เทอม B มีค่าเป็น + เนื่องจากเทอม C และ D มีค่ากำลัง 2 ฉะนั้นจึงเป็น + เสมอ และดังนั้นจึงนำไปบวกเข้ากับเทอมของ B เทอม E (ก็เป็น +) นำไปลบ เมื่อ α อยู่ระหว่าง 90° และ 270° (SW หรือ NE) เทอม B มีค่าเป็นลบ และเทอม C กับ D ถูกนำไปลบจากสมการ ส่วนเทอม E ให้บวกเข้าไป

หากเส้นตั้งได้ฉากถูกลากจาก B ไปยังเมริเดียนผ่าน A ปรากฏชัดว่าเทอมแรกของอนุกรม (เทอม B) อยู่ใกล้ หรือเท่ากับเส้นฉาย AC อันนี้มีลักษณะเดียวกับละติจูดที่ใช้ในการ

สำรวจพื้นราบ แต่ต้องแปลงออกเป็นฟิลิบดาโดยใช้ตัวประกอบ B ความต่างในทางละติจูดระหว่างตำบล A และ B มิใช่ AC แต่เป็นระยะจาก A ถึงเส้นขนานที่มีค่าละติจูดผ่านจุด B จึงจำเป็นต้องบวกระยะ CD ซึ่งมีค่าใกล้ หรือเกือบเท่ากับการชดใช้ ณ จุดจากเส้นสัมผัส (DE) กับเส้นขนาน นี่คือ เทอม C เทอมนี้ได้ส่วนสัมพันธ์กับกำลังสองของระยะนอก (BC และหรือ DE) และเป็นระยะชดเชยใช้ในการสร้างเส้นขนานที่มีค่าละติจูดในการสำรวจของที่ดินสาธารณ

5. ความต่างทางลองจิจูด

ความต่างทางลองจิจูดที่เป็นมุมชนิดมีขนาดเล็ก ซึ่งเราสามารถจะหาได้ด้วยความละเอียดอย่างเพียงพอ โดยการแก้สามเหลี่ยม PAB โดยตรง (ดูรูปข้อ 5.4) แต่ต้องอาศัยทรงกลมซึ่งเป็นพื้นต่างออกไปจาก Spheroid เข้าช่วย ใช้ค่าพละคณิต 7 ตำแหน่ง

โดยใช้สูตร หรือกฎของ sines

$$\frac{\sin \Delta \lambda}{\sin \varsigma} = \frac{\sin(180 - \alpha)}{\sin(90 - \varphi')}$$

$$\sin \Delta \lambda = \frac{\sin\alpha \sin 6}{\cos \varphi'} \qquad \text{...........(19)}$$

บนทรงกลมซึ่งจุดต่าง ๆ ที่ฉายลงไปก็คือ จุดที่มีรัศมีเป็น N′ และมีศูนย์กลางอยู่ที่ H′ ซึ่งตรงกับจุด B

จากที่กล่าวมาแล้ว $\frac{\text{ระยะ}}{N'} = 6$ (เรเดียนส์)

นำแทนค่าใน (19) ได้

$$\sin \Delta \lambda = \sin \frac{S}{N'} . \sin \alpha \qquad \text{..............(20)}$$

เพื่อให้สะดวกยิ่งขึ้นในการแก้สมการในเชิงปฏิบัติ

$$\Delta \lambda''.\text{arc } 1'' = \frac{S}{N'}.\sin\alpha\sec\varphi' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

และแล้วเพื่อหาจำนวนแก้สำหรับความต่างระหว่างส่วนโค้ง (arc) และค่า sine จึงเขียนสมการ (21) เสียใหม่ได้ดังนี้

$$\Delta\lambda'' - \underset{\log \Delta\lambda}{\text{corr.}} = \frac{2}{N' \text{ arc } 1''}.\sin\alpha\sec\varphi' - \underset{\log S}{\text{corr.}} \quad \ldots\ldots(22)$$

เนื่องจากแต่ละด้านของสมการมีค่าโตไปเท่ากับความต่างระหว่าง arc กับ sine

สมมติให้ $\frac{1}{N' \text{ arc } 1''} = A'$ สมการ (22) จะเขียนได้ดังนี้

$$\Delta\lambda'' = A'.S.\sin\alpha\sec\varphi' + \underset{\log\Delta\lambda}{\text{Corr.}} - \underset{\log S}{\text{Corr.}} \quad \ldots(23)$$

ซึ่งจำนวนแก้นำไปใช้ต่อค่าพละคณิตของ log A' จะคำนวณไว้ในตารางสำเร็จรูป จากที่ทราบแล้ว $\log \frac{S}{R} - \log \sin \frac{S}{R} = \frac{MS^2}{6R^2}$ ....(A)

ซึ่ง S คือ ระยะของแนวใด (วงกลมใหญ่) บนพื้นผิวทรงกลม

ถ้า $\frac{S}{R}$ เป็นมุมบอกค่าออกมาเป็นฟิลิบดา แล้ว (A) จะกลายเป็น

$$\log \frac{S}{R} - \log \sin \frac{S}{R} = M\left(\frac{S''}{R}\right)^2 \frac{.\text{arc}^2\, 1''}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

จาก (B) ใส่ log เข้าไปทั้ง 2 ข้าง

$$\log (\text{ความต่างของ logs}) = \log\left(\frac{M \text{ arc}^2\, 1''}{6}\right) + 2\log\left(\frac{S''}{R}\right) \ldots(C)$$

นำสูตรนี้ใช้กับค่า $\Delta\lambda''$ เราได้

$$\log (\text{ความต่างของ logs}) = \left[\frac{0.4342945 \times (484813681109536 \times 10^{-6})^2}{6}\right] + 2\log\left(\frac{S''}{R}\right)$$

$$= \quad 8.2308 + 2\log\Delta\lambda'' \quad \text{..........(D)}$$

หมายถึงความต่างระหว่าง $\log \frac{S}{R}$ (โค้ง) กับ $\log \sin \frac{S}{R}$ (sin) มีค่าที่จะต้องแก้ให้กับ $\Delta\lambda''$ เป็น $8.2308 + 2\log \Delta\lambda$ จะสร้างเป็น Table ไว้โดยใช้ $\Delta\lambda$ เป็น Argument เพื่อหา Corr'n ของ arc – sine ค่านี้เป็น + (ดู (23))

และจะนำสูตร (D) ไปใช้กับ $\frac{S}{N'}$ ดูบ้าง ใน (23) มี $\text{Corr.}_{\log S}$ ติดอยู่ ฉะนั้นใน (D) จะได้

$$\begin{aligned}
\log\ (\text{ความต่างของ logs}) &= 8.2308 + 2\log \frac{S}{N'\ \text{arc}\ 1''} \\
&= 8.2308 + 2\left[\log S - \log \frac{1}{N'\ \text{arc}\ 1''}\right] \\
&= 8.2308 + 2\log S + 2\log A' \\
&= 8.2308 + 2\log S + 2 \times 8.5090 \\
&= 5.2488 + 2\log S \quad \text{.........(E)}
\end{aligned}$$

ตัวอย่างการใช้ Table (จำนวนแก้ $\Delta\lambda''$) และจำนวนแก้ log S ทางระยะ

$$\begin{aligned}
\log(\text{diff}_{\log S}) = \log(\text{ความต่างของ}\ \log S) &= 8.2308 + 2\log S \\
\text{สมมติให้}\ \log \Delta\lambda'' &= 3.035\ \text{เมื่อนำแทนจะได้} \\
\log(\text{diff}\qquad) &= 8.2308 + 2 \times 3.035 \\
&= 8.2308 + 6.070 = \bar{4}.3008 \\
\text{ความต่าง} &= 0.000001996 \ldots = 0.0000020\ ..(F)
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\log(\text{diff}_{\log S}) = \log(\text{ความต่างของ}\ \log S) &= 5.2488 + 2\log S \\
\text{สมมติให้}\ \log S &= 4.536 \\
\log(\text{diff}\qquad) &= 5.2488 + 2 \times 4.536 \\
&= 5.2488 + 9.0720 = 4.3208 \\
\text{ความต่าง} &= 0.00000209 \ldots = 0.0000021\ ..(G)
\end{aligned}$$

ค่า (G) ต้องนำไปลบเนื่องจากส่วนโค้ง $\frac{S}{N'}$ โตกว่า $\sin(\frac{S}{N'})$ ใน Table หรือตารางสำเร็จ จำนวนแก้จะมีอยู่ในตารางเพื่อแสดงค่าของ log S และ log $\Delta\lambda''$ สำหรับค่าความต่างของ log อันเดียวกัน

จำนวนแก้สำหรับ log S มีค่าเป็น − และ log $\Delta\lambda''$ มีค่าเป็น + ผลรวมทางพีชคณิตของจำนวนแก้ทั้งสองให้นำไปบวกเข้ากับ log $\Delta\lambda''$ วิธีหาจำนวนแก้เหล่านี้จะได้แสดงไว้เป็นตัวอย่างต่อไป ค่าของลองจิจูดใหม่จะได้

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda''$$

ในสูตร $$\Delta\lambda'' = \frac{S}{N'\text{arc }1''}.\sin\alpha\sec\varphi' \qquad \ldots\ldots\ldots(24)$$

จะพบว่า $S.\sin\alpha$ คือ ดีพาร์ตเจอร์ (Departure) หรือค่าความต่างทางออก-ตก (ในการสำรวจพื้นรวม หรือในทางเดินเรือ) นิพจน์ออกมาเป็นหน่วยความยาวค่านี้จะทอนให้เป็นฟิลิบดาของโค้งวงกลมใหญ่ได้ด้วยค่าของแฟคเตอร์ N' arc 1'' ผลอันนี้แปลงเป็นฟิลิบดาของโค้งขนานโดยแฟคเตอร์ sec φ'

ลองจิจูดตะวันตกจะให้เครื่องหมาย + สำหรับ sin ของ α (α อยู่ระหว่าง 0° → 180°) ค่าความต่างของลองจิจูดมีเครื่องหมาย + มี α อยู่ระหว่าง 180° → 360° ค่าlog sin α เป็นและลองจิจูดลดลง

๘. ภาคของทิศไป และกลับ (Forward and Back Azimuths)

เนื่องจากเส้นเมริเดียนพิภพไปรวมกันอยู่ที่ขั้ว ความเฉไปของเมริเดียนจะทำให้ภาคของทิศแนวใดแนวหนึ่งที่พิจารณาไป-กลับ ต่างกันไม่เท่ากับ 180° เหมือนอย่างกับพิกัดฉาก ความต่างระหว่างภาคของทิศไป-กลับของแนวผ่านจุด 2 จุดที่พิจารณาเรียก "มุมเมริเดียนรวม" (Convergence)

อาจคำนวณหามุมเมริเดียนรวมได้โดยการคำนวณดังนี้ ในรูปข้อ 5.4 โดยสูตรของ Napier's Analogies

$$\tan \tfrac{1}{2}(A + B) = \cot \tfrac{1}{2}\Delta\lambda . \frac{\cos \frac{1}{2}(\lambda' - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\lambda' + \delta)}$$

เนื่องจาก $\Delta\alpha = 180 - (A + B)$ นำแทนข้างบน (และ $\Delta\lambda$ เพิ่ม $\Delta\alpha$ ลดลง)

$$-\cot \tfrac{1}{2}\Delta\alpha = \cot \tfrac{1}{2}\Delta\lambda . \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}$$

หรือ

$$-\tan \tfrac{1}{2}\Delta\alpha = \tan \tfrac{1}{2}\Delta\lambda . \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}$$

$$= \tan \tfrac{1}{2}\Delta\lambda . \frac{\sin \varphi_m}{\cos \frac{\Delta\varphi}{2}}$$

ดังนั้น

$$-\frac{\Delta\alpha}{2} = \tan^{-1}\left(\tan \frac{\Delta\lambda}{2} . \frac{\sin \varphi_m}{\cos \frac{\Delta\varphi}{2}} \right)$$

จากอนุกรม (Series)

$$-\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots\ldots\ldots$$

จึงได้

$$-\tfrac{1}{2}\Delta\alpha =$$

$$\left[\tan \frac{\Delta\lambda}{2} . \frac{\sin \varphi_m}{\cos \frac{\Delta\varphi}{2}} \right] - \frac{1}{3} \left[\tan \frac{\Delta\lambda}{2} . \frac{\sin \varphi_m}{\cos \frac{\Delta\varphi}{2}} \right]^3 +$$

$$\frac{1}{5} \left[\tan \frac{\Delta\lambda}{2} . \frac{\sin \varphi_m}{\cos \frac{\Delta\varphi}{2}} \right]^5 - \ldots\ldots\ldots$$

และอนุกรมของ $\tan \frac{\Delta\lambda}{2}$ ได้

$$\frac{1}{2}\Delta\lambda + \frac{(\frac{\Delta\lambda}{2})^3}{3} + \frac{(\frac{\Delta\lambda}{2})^3}{15} - \ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore -\frac{\Delta\alpha}{2} = \left[(\frac{\Delta\lambda}{2} + \frac{\Delta\lambda^3}{24}).\frac{\sin\varphi_m}{\cos\frac{\Delta\varphi}{2}} \right] - \frac{1}{3}\left[(\frac{\Delta\lambda}{2}) + \frac{\Delta\lambda^3}{24}.\frac{\sin\varphi_m}{\cos\frac{\Delta\varphi}{2}} \right]^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{\Delta\lambda}{2}.\frac{\sin\varphi_m}{\cos\frac{\Delta\lambda}{2}} + \frac{\Delta\lambda^3}{24} - \frac{\sin\varphi_m}{\cos\frac{\Delta\varphi}{2}} - \frac{\Delta\varphi^3}{24}.\frac{\sin^3\varphi_m}{\cos^3\frac{\Delta\varphi}{2}} - \ldots\ldots$$

$$-\Delta\alpha = \Delta\lambda\frac{\sin\varphi_m}{\cos\frac{\Delta\varphi}{2}} + \frac{(\Delta\lambda)^3}{12}.(\frac{\sin\varphi_m}{\cos\frac{\Delta\varphi}{2}} - \frac{\sin^3\varphi_m}{\cos^3\frac{\Delta\varphi}{2}}) - \ldots\ldots\ldots$$

เนื่องจาก $\frac{\Delta\varphi}{2}$ มีขนาดเล็ก ค่า $\cos\frac{\Delta\varphi}{2} = 1$ เฉพาะเทอมที่มีขนาดเล็กแล้ว ตัดทอน $\Delta\alpha$ และ $\Delta\lambda$ เป็นพิลิบดา

$$-\Delta\alpha'' = \Delta\lambda''.\frac{\sin\varphi_m}{\cos\frac{\Delta\varphi}{2}} + \frac{(\Delta\lambda'')^3}{12}.\sin\varphi_m.\frac{1}{\cos\frac{\Delta\varphi}{2}}.\text{arc}^2 1''$$

$$= \Delta\lambda''.\sin\varphi_m \in \sec\frac{\Delta\varphi}{2} + \frac{(\Delta\lambda'')^3}{12}.\sin\varphi_m.\sec^2\frac{\Delta\varphi}{2}.\text{arc}^2 1'' -$$

$$\frac{(\Delta\lambda'')^3}{12}.\sin^3\varphi_m.\sec^3\frac{\Delta\varphi}{2}.\text{arc}^2 1'' + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \Delta\lambda''.\sin\varphi_m.\sec\frac{\Delta\varphi}{2} + (\Delta\lambda)^3.F., \ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

ซึ่ง F มีค่าเป็น $\frac{1}{12}\sin\varphi_m.\sec^2\frac{\Delta\varphi}{2}.\text{arc}^2 1''$ จะคำนวณไว้เป็นตารางสำเร็จรูป ค่าของ F มีเพียง 0."01 เท่านั้น เมื่อ $\log\Delta\lambda'' = 3.36$ ....

แอซิมัธกลับจะได้ $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha'' + 180°$ ....(26)

จะพบว่าเทอมแรกใน (25) สำหรับ $\Delta\alpha$ จะเหมือนกับสูตรการคำนวณหาค่าเมริเดียน (ถ้าเราตัดตัวคูณ $\sec\frac{\Delta\varphi}{2}$ ออกเสีย เพราะใกล้กับ 1 อยู่แล้ว) ในกรณีเมื่อต้องการสร้างเมือง และวางแนวตัด หรือกำหนดหาแอซิมัธตรวจสอบผลงานในการวงรอบ

จากรูปปรากฏว่า ถ้า $\alpha < 180°$, B อยู่ตะวันตกของ A และ $\Delta\alpha$ จะต้องหักออกจาก α (และ 180° บวก) เพื่อให้ได้ค่า α'

ในการคำนวณหาตำแหน่งพิกัดภูมิศาสตร์ของจุด แอซิมัธของแนวที่พุ่งไปสู่จุดนั้น ทราบได้จากแอซิมัธที่ทราบแล้วจากด้านของสามเหลี่ยม โดยใช้มุมสามเหลี่ยมทรงกลมที่ทราบแล้ว มิใช่จากมุมพื้นราบของสามเหลี่ยมช่วย การคำนวณหา φ' และ λ' อาจพิสูจน์ความจริงโดยคำนวณตำแหน่งของจุดจากด้าน 2 ด้านของรูปสามเหลี่ยม และควรสังเกตว่าเมื่อใดจึงจะได้รับ φ' และ λ' จาก 2 แนวนั้น แอซิมัธวงรอบตรวจสอบได้โดยสังเกตความแตกต่างเท่ากันกับมุมทรงกลม หรือไม่ที่สถานีใหม่ โดยวิธีนี้การคำนวณสามเหลี่ยมแต่ละรูปอาจกระทำขึ้นเพื่อตรวจสอบตัวเอง

7. สูตรที่ใช้คำนวณ

เพื่อสะดวกต่อการอ้างอิงสูตรใช้งานได้นำมาเขียนรวมไว้ด้วยกัน คือ

$$-\Delta\varphi = S.B.\cos\alpha + S^2.\sin^2\alpha.C + (\delta\varphi'')^2.D - h.S^2.\sin^2\alpha.E \quad \text{......(18)}$$

$$\Delta\lambda = A'.S.\sin\alpha.\sec\varphi' \left(A' = \frac{1}{N'\text{arc }1''}\right) \quad \text{........................(24)*}$$

$$\left(\text{หรือ } \log\Delta\lambda'' = \log S + \log\sin\alpha + \log A + \log\sec\varphi' + C\log\Delta\lambda - C\log S\right) \quad \text{..........................(23)*}$$

$$-\Delta\alpha'' = \Delta\lambda''\sin\left(\frac{\varphi+\varphi}{2}\right).\sec\frac{\Delta\varphi}{2} + (\Delta\lambda'')^3.F \quad \text{........................(25)*}$$

ซึ่ง $h = S.\cos\alpha.B$

$$-\delta\varphi'' = S.\cos\alpha.B + S^2.\sin^2\alpha.C - h.S^2.\sin^2\alpha.E$$

ตำแหน่งของจุดใหม่ และแอซิมัธกลับจึงได้

$$\varphi' = \varphi + \Delta\varphi'' \qquad \text{.............(A)}$$

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda'' \qquad \text{.............(B)}$$

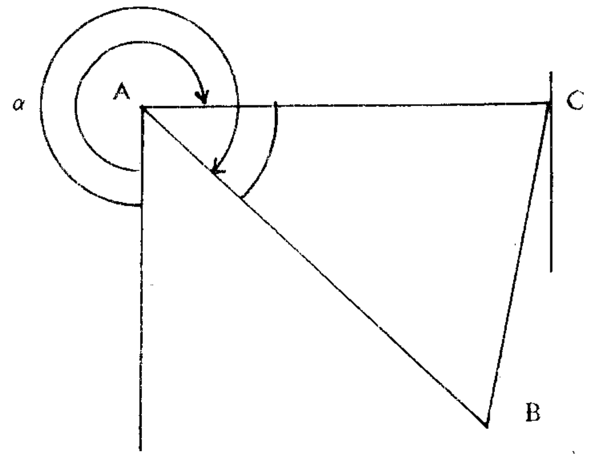
$$\alpha' = \alpha + \Delta\alpha'' + 180^\circ \qquad \text{.............(C)}$$

สำหรับ $-\Delta\varphi$* นั้นอาจคำนวณให้ละเอียดยิ่งขึ้นโดยเพิ่มเทอมต่อไปนี้เข้าไปอีก คือ $-\frac{1}{2}S^2.k.E + \frac{3}{2}.S^2.\cos^2\alpha.k.E + \frac{1}{2}.S^2.\cos^2\alpha.\sec^2\varphi.A^2.k.\text{arc}^2 1''$

ซึ่ง $k = S^2.\sin^2\alpha.C$

จะได้ยกตัวอย่างในการคำนวณโดยใช้สูตรดังกล่าวข้างบน สูตรการคำนวณจะนำไปสร้างแบบคำนวณขึ้นเพื่อช่วยในการคำนวณง่าย และเป็นระเบียบเรียบร้อยดี

ตัวอย่างที่ 1 เมื่อทราบพิกัดภูมิศาสตร์ของจุด A อยากทราบพิกัดของ B และ C



ที่ A, $\varphi = 39^\circ\ 09'\ 55''.654$

$\lambda = 98^\circ\ 49'\ 50''.128$

แอซิมัธ (α) จาก A → C = $255^\circ\ 17'\ 17''.52$

$C\hat{A}B = 86^\circ\ 20'\ 54''.50$

ระยะ AB เป็น 34,407.64 เมตร

ระยะ BC เป็น 41,661.11 เมตร

α	จาก A ไป C			255° 17′ 17″.52
$\measuredangle$	ที่ a ระหว่าง C ไป B			86 20 54.50
α	จาก A ไป B			341 38 12.02
$\Delta\alpha$				+ 4 43.09
				− 180
α'	จาก B ไป A			161 42 55.11
	ที่ B ระหว่าง A กับ C			38 08 34.02
φ	39° 09′ 55″.654	ระยะจาก A ไป B	λ	98° 49′ 50″.128
$\Delta\varphi$	− 17 39.209	S = 34,407.64	$\Delta\lambda$	− 07 29.652
φ'	38 52 16.436	เมตร	λ'	98 42 20.476

	(I)		(II)		(III)		(IV)
S	4.536 6549	S^2	9.07331	$(\delta\varphi)^2$	6.0499	− h	3.0249 n
$\cos\alpha$	9.977 3018	$\sin^2\alpha$	8.99674			$S^2\sin^2\alpha$	8.0700
B	8.510 9150	C	1.31553	D	2.3832	E	6.0871
h	3.024 8717		9.38558		8.4331		7.1820 n
(I)	1058″.9409	(III)	+0.0271			$(\Delta\lambda)^3$	7.959
(II)	0.2429	(IV)	−0.0015			F	7.872
(III)	0.0271		+0.0256				5.831
(IV)	−0.0015	S	4.5366 549				
$-\Delta\varphi$	1059.2094	$\sin\alpha$	9.4983 680 n	Arg.		$\Delta\lambda$	2.652 877 n
		A′	8.5091 469	S	−21	$\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$	9.799 043
$\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$	39° 01 06.04	$\sec\varphi'$	0.1987 088	$\Delta\lambda$	+03	$\sec\frac{1}{2}\Delta\varphi$	1
			2.6528 786 n	แก้	−18		2.451 921 n
			−18			$-\Delta\alpha$	−283″.09
			2.6528 768 n				
		$\Delta\lambda$	−449.652				

ตัวอย่างข้างต้นนี้จุด A เป็นตำบลที่ทราบ

1) ค่าละติจูด (φ) กับลองจิจูด (λ)
2) ระยะจาก A ไป B
3) แอซิมัธจาก A ไป G และมุมที่จุด A ระหว่าง B กับ C

ข้อมูลที่ได้นี้ทำให้หาพิกัดของจุด B ได้ พร้อมทั้งแอซิมัธกลับจาก B ไป A เนื่องจากค่า $\Delta\alpha$ ขึ้นอยู่กับค่า $\Delta\lambda$ และ $\Delta\lambda$ ก็ขึ้นอยู่กับ φ' โดยเหตุนี้การคำนวณจึงได้จัดระเบียบแบบคำนวณขึ้นเป็น 3 ส่วนดังข้างบน

การคำนวณค่า $\Delta\varphi$ ให้หาค่า B, C, D และ E ตามค่าละติจูด φ ที่ทราบแล้ว ส่วน ($\delta\varphi$) ที่นำไปร่วมในการคำนวณของเทอม D มักใช้ 2 เทอมแรกบวกกันตามเครื่องหมาย และเทอม E มีค่าโตจึงควรนำไปใช้ในการคำนวณด้วย สำหรับ h ในเทอม E คือเทอมแรกของค่า B เครื่องหมายทางพีชคณิตของฟังก์ชั่นส์ของ α นับว่าสำคัญ ควรระวัง และพิจารณาให้ถูก มิฉะนั้นอาจผิดพลาดได้ง่าย

เมื่อคำนวณ $\Delta\lambda$, φ' ทราบ และแฟคเตอร์ log A′ เอาจากค่าละติจูด φ' ใหม่นี้ มิใช่นำค่า φ ไปใช้เปิดหา เครื่องหมาย (′) บนตัว φ เพื่อใช้เป็นเครื่อง**เตือนใจ** ในการคำนวณ การแก้ความต่างระหว่าง**ส่วนโค้ง** (arc) และค่า sine ใช้ตารางสำเร็จโดยใช้ log $\Delta\lambda$ กับ log S เป็น**ตัวเปลี่ยนอิสระ** (Arguments) ผลบวกเชิงพีชคณิตหรือตามเครื่องหมาย 2 ค่าของ**พละคณิตความต่าง** (log diff.) เป็นตัวจำนวนแก้ที่จะต้องนำไปทำกับ log $\Delta\lambda$ ค่าของ $\Delta\alpha$ ก็จะคำนวณหาได้ในที่สุด

ค่า φ' กับ λ ตรวจสอบได้โดยสังเกตจากผลคำนวณ 2 ครั้งเป็นค่าอย่างเดียวกันหรือไม่ แอซิมัธกลับ 2 ค่าควรต่างกันเป็นมุมทรงกลม ณ ตำบลใหม่ ซึ่งจะลงเอยอันเดียวกันกับผลการคำนวณ $\Delta\alpha$

แบบคำนวณ

α	จาก C ไป A	75° 28′ 14″52
$\measuredangle$	ที่ C ระหว่าง a กับ B	55 30 33.73
α	จาก c ไปหา B	19 57 40.79
$\Delta\alpha$		− 06 11.66
		×[illegible]:
α'	จาก B ไป C	199 51 29.13

		ระยะจาก C ไปB	
φ	39° 13′ 26.686	λ 98° 32′ 30″506	
$\Delta\varphi$	− 21 10.250	S = 41,661.11 เมตร	$\Delta\lambda$ + 09 49.969
φ'	38 52 16.436		λ'98 42 20.475
	(I)	(II) (III)	(IV)

S	4.619 7308	S^2	9.23946	$(\delta\varphi)^2$6.2076	− h	3.1037 n
cos α	9.973 0924	$\sin^2\alpha$	9.06649		S $\sin^2\alpha$	8.3060
B	8.510 9105	C	1.31644	D 2.3835	E	6.0882
h	3.103 7337		9.62239	8.5911		7.4979 n
(I)	+1269.765	(III)	+0.0390		$(\Delta\lambda)^3$	8.312
(II)	0.419	(IV)	−0.0031		F	7.871
	+1270.214		+0.0359			6.183
(III) และ (IV)	+ 0.036	S	4.6197308			
− $\Delta\varphi$	+1270.250	sin α	9.5332455	Arg.	$\Delta\lambda$	2.770830
		A′	8.5091469	S − 31	$\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$	9.799317
$\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')$	39° 02′	secφ'	0.1087088	$\Delta\lambda$ + 06	$\sec\frac{1}{2}(\Delta\varphi)$	2
	51″56					
			2.7708320	Corr.n − 25		2.570149
			− 25			
			2.7708295		− $\Delta\alpha$	371″66
		$\Delta\lambda$	+589″9694			

8. สามเหลี่ยมเล็ก (หรือสามเหลี่ยมย่อย)

ในการคำนวณหาตำแหน่งของจุดโครงข่ายสามเหลี่ยมเล็กค่อนข้างจะง่ายขึ้น เพราะไม่จำเป็นต้องใช้เทอมที่มีค่าเล็กมาก เช่น เทอม E ในสมการละติจูด จำนวนแก้ให้กับลองจิจูด หรือ sec $\frac{\Delta\varphi}{2}$ และเทอม F ในสมการแอซิมัธ

สูตรในการคำนวณคงเหลือเพียง

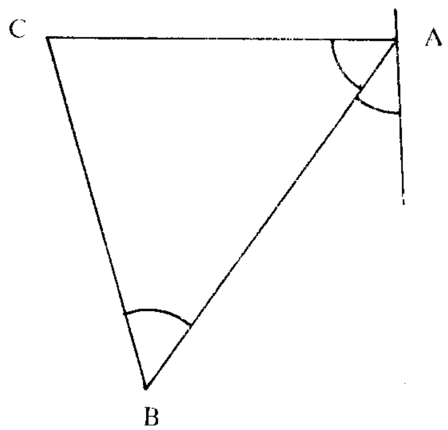
$$-\Delta\varphi'' = S.B.\cos\alpha + S^2.C.\sin^2\alpha + (\delta\varphi'')^2.D$$

$$\Delta\lambda'' = A'.S.\sin\alpha.\sec\varphi'$$

$$-\Delta\alpha'' = \Delta\lambda''.\sin\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$$

การคำนวณกระทำต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2 ทราบพิกัดของจุด A ดังนี้ $\varphi = 28^\circ\ 35'\ 02''.377$ $\lambda = 96^\circ\ 26'\ 59''.604$ และแอซิมัธ (α) จาก A ไป B เป็น $8^\circ\ 43'\ 54''.0$ ระยะ AB เป็น 3.909 175 มุมระหว่าง B กับ C เป็น $44^\circ\ 46'\ 17''.3$ จงหาพิกัดของ C และแอซิมัธกลับ



แบบคำนวณ

α	จาก A ไป B				$8° 43' 54''.0$	
∢	ที่จุด A ระหว่างจุด B กับ C				+ 44 46 17.3	
α	จาก A ไปหา C				53 30 11.3	
$\Delta\alpha$					− 1 54.7	
					180 00 00.0	
α'					233 28 16.6	
	มุมที่ C				77 56 09.6	
φ	$28° 35' 02''.377$ จุด A			λ	$96° 26' 59''.604$	
$\Delta\varphi$	− 2 36.805			$\Delta\lambda$	+ 3 59.900	
φ'	28 32 25.572 จุด C			λ'	96 30 59.504	
$\frac{1}{2}(\varphi+\varphi)$	$28° 33' 44$	S	3.909175	S^2	7.818	h^2 4.39
		$\cos\alpha$	9.774355	$\sin^2\alpha$	9.810	D 2.32
(I) +	156.7458	B	8.511666	C	1.142	6.71
(II) และ (III) +	0.0594	h	2.195196		8.770	.005
$-\Delta\varphi$	+ 156.8052				.0589	
S	3.909715		$\Delta\lambda$		2.38004	
$\sin\alpha$	9.905196		$\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$		9.67953	
A′	8.509391				2.05956	
$\sec\varphi'$	0.056268		$-\Delta\alpha$		$+114''.7$	
$\Delta\lambda$	$+239''.900$					

ตัวอย่างที่ 3 จงคำนวณหาตำแหน่งของจุด C เมื่อทราบพิกัดของจุด A

เป็น $\varphi = 26° \; 27 \; 00.''537$ และแอซิมัธ (α) จาก A ไป B เป็น 317° 41 11.″45
$\lambda = 98 \; 53 \; 03.821$

ระยะจาก A ไป B = 3.920 9092 เมตร และคำนวณหาแอซิมัธกลับด้วย

แบบคำนวณ

α	จาก $\overset{(2)}{\text{A}}$ ไป $\overset{(3)}{\text{B}}$						317° 41′ 11.″45
∢	จาก B ไป $\overset{(1)}{\text{C}}$					+	47 22 41.41
α	จาก A ไป C						5 03 52.86
$\Delta\alpha$						−	11.81
							180
α'	จาก C ไป A						185 03 41.05
			มุมที่ A				69 29 07.33
φ	26° 27′ 00.″537	(2) A		λ			98° 53′ 03.″821
$\Delta\varphi$	− 4 29.783	S =		$\Delta\lambda$		+	26.543
φ'	26 22 30.754	(1) C		λ''			98 53 30.364
S	3.920 9092	S^2	7.84182			-h	2.4310
cos α	9.998 3010	$\sin^2\alpha$	7.89173	$(\delta\varphi)^2$	4.8620	$S^2\sin^2\alpha$	5.7335
B	8.511 8008	C	1.10257	D	2.2935	E	5.8530
h	2.431 0110		6.83612		7.1555		4.0175
(I)	+269″.7808	(III)	$0_9.0014$	$(\Delta\lambda)^3$			
(II)	+ 0.0007	(IV)	0.0000	F			
	+269.7829						
	+ 0.0014	S	3.9209092				

$-\Delta\varphi$	$+269.7829$	$\sin\alpha$	8.9458639	Arg.	$\Delta\lambda$	1.4239476
$\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$	$26° 24' 45_9.65$A′		8.5094363	S-1	$\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$	9.6481973
		$\sec\varphi'$	0.0477385	0	$\sec\frac{1}{2}\Delta\varphi$	———
						———
			1.42394788	-1		1.0721449
		$\Delta\lambda$	$+26_9.5429$	$-\Delta\alpha$	+	$11_9.907$

สูตรการคำนวณ Puissant เป็นผู้ให้กำเนิด เหมาะสำหรับนำไปใช้ในการคำนวณหาตำแหน่งของจุด และอาจใช้ได้ถึงระยะที่ยาวประมาณ 112 หรือ 128 กิโลเมตร มีที่ใช้อย่างกว้างขวางในประเทศอินเดีย และในสหรัฐอเมริกาในทุกกรณี (ยกเว้นระยะที่ยาวที่สุดจึงจะเปลี่ยนไปใช้สูตรการคำนวณอื่น) ปกติผลจากการใช้สูตรนี้นับว่าได้รับความละเอียดอย่างน่าพอใจยิ่ง

9. สูตรการคำนวณหาตำแหน่งของคลาร์ค (Clark's Formula)

ในบางกรณีก็จำเป็นต้องใช้สูตรที่ให้ความละเอียดสูงกว่าเพื่อใช้คำนวณหาตำแหน่ง หนังสือ Geodesy ของ Clarke และในรายงานการเตรียมการสำรวจแผนที่ราชการของ Great Britain ปี 2401 ได้ให้สูตรคำนวณแก้ปัญหาที่ระยะระหว่างจุดมีความยาวมาก

สูตรนี้ใช้คำนวณรูปเหลี่ยมเดวิดสัน (Davidson) ในรัฐแคลิฟอร์เนียกับรัฐเนวาดา หารูปสามเหลี่ยมเกิดจากด้าน 2 ด้านบรรจบกันที่ขั้ว และอีกด้านหนึ่งเชื่อมสถานี 2 สถานี ดังในรูปข้อ 3. มาโดยตรงเพื่อจักได้มุมที่ B กับความต่างลองจิจูดมาพร้อมกัน ใช้ค่าพละคณิต (Logarithms) 10 ตำแหน่ง ใช้มุมภายในแทนแอซิมัธในการคำนวณ ขั้นสุดท้ายจะได้ค่าความต่างละติจูด เช่นดังในรูปจะได้

$$\sigma'' = \frac{S}{N.\sin 1''} + \frac{e_2\sigma^3\sin^2 1''}{6(1-e^2)}.\cos^2\varphi.\cos^2\alpha \qquad \text{..........(26)}$$

$$\zeta'' = \frac{e^2\delta^2 \sin 1''}{4(1 - e^2)} .\cos^2 \varphi .\sin 2\alpha \qquad \text{...........(27)}$$

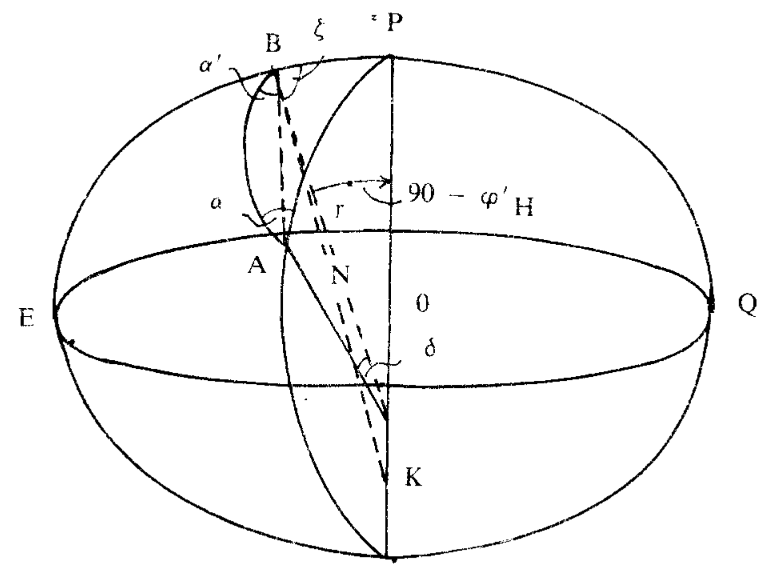
$$\tan \tfrac{1}{2}(\alpha' + \zeta + \Delta\lambda) = \frac{\cos \frac{1}{2}(\lambda - \delta)}{\sin \frac{1}{2}(\lambda + \delta} .\cot \frac{a}{2} \qquad \text{...........(28)}$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(\alpha' + \zeta - \Delta\lambda) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\lambda - \delta)}{\sin \frac{1}{2}(\lambda + \delta)} .\cot \frac{a}{2} \qquad \text{...........(29)}$$

$$\frac{S}{R_M \sin 1'} . \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha' + \zeta - \alpha)\, j}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' + \zeta + \alpha)} \left[1 + \frac{\delta^2 \sin^2 1''}{12} . \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)\right]$$

...........(30)

สูตรนี้ ζ เป็นมุมที่มีขนาดเล็กมาก (ที่ B) ระหว่างโค้งบิดคู่ (Plane Curves) α และ $\alpha' + \zeta$ เป็นมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม PAB การคำนวณดำเนินตามสูตรที่ให้ไว้ข้างบน ตำแหน่งที่ใช้สูตรนี้คำนวณใช้ได้ระยะระหว่างจุดประมาณ 320 กิโลเมตร หรือ 200 ไมล์



รูป 10.4

ในรูป φ คือ ค่าละติจูดของจุด A

λ คือ ค่าลองจิจูดของจุด A

S เป็นระยะจาก A ถึง B

α คือ มุมระหว่างโค้ง AB กับ AP

φ' ละติจูด B ที่ต้องการทราบ

λ' ลองจิจูด B ที่ต้องการทราบ

α' แอซิมัธกลับจากจุด B ไปยังจุด A

โค้ง AB ที่เป็นเส้นโค้งหนาทึบต่อเชื่อมจุด A กับจุด B นั้นเป็นโค้งบิดคู่ (Plane Curve) ถูกตัดจากผิวสเฟียรอยด์ด้วยพื้นดิ่งที่สุด A และผ่านตลอดจุด B (พื้น AHB) เส้นตั้งฉากจุก B ไปตัดแกนหมุนที่ K เส้นโค้งประเป็นโค้งเกิดจากรอยตัดระหว่างพื้น BKA กับผิวสเฟียรอยด์ มุม α เป็นมุมที่จุด B จาก BP ทางขวาไปยังโค้งประนั้น มีค่าเล็กกว่ามุมไปยังเส้นทึบอยู่เท่ากับจุดมุมขนาดเล็ก ζ มุมที่ B ระหว่างพื้น BKP และ BKA คือ $\alpha' + \zeta$

เราจะหามุมที่ H ที่อยู่ตรงข้ามกับพื้นโค้ง S = AB, เชื่อม B และ H สมมุติให้ P′ เป็นจุดใด ๆ บน AB และ S แทนระยะจาก A ถึง P และ δ คือ มุมที่ H ระหว่าง HA กับ HP สมมุติให้ HP = r, HA = N คือ เส้นดิ่งตั้งได้ฉากกับพื้นผิวพิภพสมมุติ และ φ_H เป็นมุมระหว่าง HP กับพื้นอีเควเตอร์ (ค่านี้เกือบเท่ากับละติจูดของจุด P′ แต่ไม่เท่ากันอย่างแท้จริง)

พิกัดของจุด P′ ในพื้นเมริเดียนของ P′ คือ

$$X = r \sin 90° - \varphi'_H = r \cos \varphi'_H$$

$Y = HO'' - HO$ ซึ่งจุด 0″ สมมุติเป็นจุดเชิงเส้นตั้งได้ฉากในแนวแกนหมุนลากมาจากจุด P′

$$HO = HO' - OO' = N \sin \varphi - n \sin \varphi$$

$$= N \sin \varphi - N(1 - e^2)\sin \varphi$$

$$= N \sin \varphi \left[1 - (1 - e^2) \right] = Ne^2 \sin \varphi$$

และ $HO'' = r \sin \varphi_H$

$\therefore \quad Y = r \sin \varphi_H - Ne^2 \sin \varphi$

จากสมการวงรี $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ ....(A)

นำค่า X และ Y แทน

$$\frac{r^2 \cos^2 \varphi_H}{a^2} + \frac{(r \sin \varphi_H - Ne^2 \sin \varphi)^2}{b^2} = 1$$

จากที่ทราบแล้ว

$a^2 = N^2(1 - e^2 \sin^2 \varphi)$ นำมาคูณ และเปลี่ยน $b^2 = a^2(1 - e^2)$ จะได้

$$r^2 \cos^2 \varphi_H + \frac{r^2 \sin^2 \varphi_H'}{1 - e^2} - \frac{2e^2 r.N.\sin \varphi_H' \sin \varphi}{1 - e^2} + \frac{e^4 N^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2} = N^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi)$$

$$r^2(1 - \sin^2 \varphi_H) + \frac{r^2 \sin^2 \varphi_H'}{1 - e^2} - \frac{2e^2 r.N.\sin \varphi_H \sin \varphi}{1 - e^2} + \frac{e^4 N^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2} =$$

$$N^2 - N^2 e^2 \sin^2 \varphi$$

$$r^2 - r^2 \sin^2 \varphi_H + \frac{r^2 \sin^2 \varphi_H'}{1 - e^2} - \frac{2e^2 r.N.\sin \varphi_H \sin \varphi}{1 - e^2} + \frac{e^4 N^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2} =$$

$$N^2 - N^2 e^2 \sin^2 \varphi$$

$$r^2 - r^2 e^2 - r^2 \sin^2 \varphi_H' + r^2 e^2 \sin^2 \varphi_H' + r^2 \sin^2 \varphi_H' - 2e^2 r.N.\sin \varphi_H \sin \varphi + e^4 N^2 \sin^2 \varphi$$
$$= N^2 - e^2 N^2 - N^2 e^2.\sin^2 \varphi + N^2 e^4.\sin^2 \varphi$$

$$r^2 + \frac{r^2 e^2 \sin^2 \varphi_H'}{1 - e^2} - \frac{2e^2 r.N.\sin \varphi_H \sin \varphi}{1 - e^2} + \frac{e^2 N^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2} = N^2$$

หรือ $r^2 - N^2 + \dfrac{e^2}{1 - e^2} (r^2 \sin^2 \varphi_H' - 2r.N.\sin \varphi_H \sin \varphi + N^2 \sin^2 \varphi) = 0$

$$r^2 - N^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} (r.\sin \varphi_H - N.\sin \varphi)^2$$

$$\therefore \quad r = \left[N^2 - \frac{e^2}{1 - e^2} (r.\sin \varphi_H - N.\sin \varphi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

และโดยการกระจาย

$$r = N - \frac{1}{2N} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} (r \sin \varphi_H{}' - N \sin \varphi)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= N - \frac{e^2}{2(1 - e^2)} \left(\frac{r^2}{N} \sin^2 \varphi_H{}' - 2r \sin \varphi_H{}' \sin \varphi + N \sin^2 \varphi\right)$$

แทน r ด้วย N ในเทอมขนาดเล็ก

$$r = N - \frac{Ne^2}{2(1 - e^2)} (\sin \varphi_H{}' - \sin \varphi)^2$$

เพื่อหาค่าของ $\varphi_H{}'$ ให้แก้สามเหลี่ยมทรงกลมที่ประกอบขึ้นด้วยเส้นสามเส้น คือ HA, HB และ HP ซึ่งด้านของสามเหลี่ยมนี้เป็น $90 - \varphi$, $90 - \varphi_H{}'$ และ δ มุม $\Delta \lambda$ ที่ขั้ว, α ที่ A และ $\alpha' + \zeta$ ที่ B ดังนั้นโดยตรีโกณมิติ

$$\sin \varphi_H{}' = \sin \varphi \cos\delta + \cos \varphi \sin\delta \cos \alpha$$

แทนในสมการสำหรับ r

$$r = N - \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \frac{N}{2} (\sin \varphi \cos\delta + \cos \varphi \sin\delta \cos\alpha - \sin \varphi)^2$$

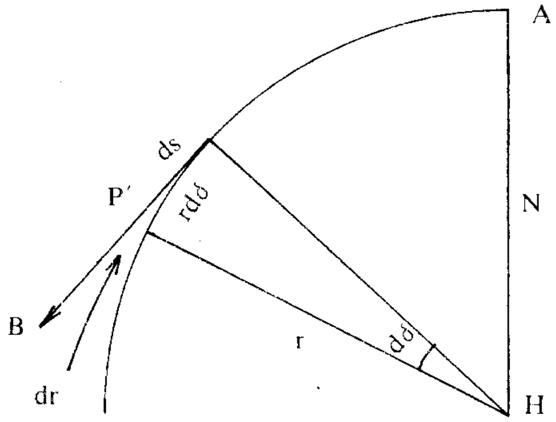
รวมเทอมของ $\sin \varphi$ และแทนสำหรับ $\cos\delta$ สองเทอมในอนุกรม, ยกกำลังสอง และแทน $\delta = \sin\delta$ เราอาจได้

$$\frac{r}{N} = 1 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{1 - e^2} \left(\delta^2 \cos^2 \varphi \cos^2\alpha - 2. \frac{\delta^3}{2} \sin \varphi \cos \varphi \cos\alpha + \ldots\ldots.\right)$$

$$= 1 + P\delta^2 + Q\delta^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

ซึ่ง $P = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} . \cos^2\alpha \cos^2 \varphi$

$Q = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} . \cos\alpha \sin{}_3\varphi$



รูป 10.5

จากรูปข้างบนเราได้จากรูปสามเหลี่ยมดิฟเฟอเรนเชียล

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\delta)^2$$

$$ds = \left[(dr)^2 + (rd\delta)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{ds}{d\delta} = \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\delta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= r + \frac{1}{2r}\left(\frac{dr}{d\delta}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

โดยอินติเกรต

$$s = \int_0^{\delta}\left[r + \frac{1}{2r}\left(\frac{dr}{d\delta}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\right]d\delta$$

$$= \int_0^{\delta} rd\delta + \int_0^{\delta}\frac{1}{2r}\left(\frac{dr}{d\delta}\right)^2 d\delta$$

$$s = N\int_0^{\delta}(1 + P\delta^2 + \ldots..)d\delta + \int_{1/2}^{\delta}(2NP^2\delta^2 + \ldots..)d\delta$$

$$\frac{s}{N} = \delta + \frac{P}{3}\delta^3 + \frac{2}{3}P^2\delta^3 + \dots\dots\dots$$

$$= \delta + \frac{P}{3}(1 + 2P)\delta^3 + \dots\dots\dots$$

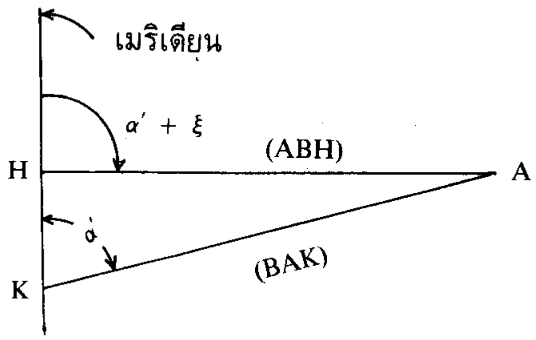
แทน $\delta = \frac{s}{N}$ ในเทอมขนาดเล็ก และตัด P^2

$$\delta = \frac{s}{N} + \frac{1}{6} . - \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2\varphi \cos^2\alpha \frac{s^3}{N^3}$$

ทอนลงเป็นพิลิบดาจะได้

$$\delta'' = \frac{s}{N \sin 1''} + \frac{e^2\delta^3\sin^2 1''}{6(1 - e^2)} .\cos^2\varphi \cos^2\alpha \quad \dots\dots\dots(31)$$

เพื่อหา ξ มุมระหว่างโค้งแบน พิจารณารูปสามเหลี่ยมทรงกลมซึ่งกำหนดหาได้โดยด้าน BA, BH และ BK ดูรูปข้างล่างแสดงถึงรูปสามเหลี่ยมเมื่อมองลงไปจาก B



รูป 10.6

โดยกฎของ sines : -

$$\frac{\sin(\alpha' + \xi)}{\sin \alpha'} = \frac{\sin ABK}{\sin ABH}$$

ในสามเหลี่ยมพื้นราบ ABH

$$\frac{HB}{HA} = \frac{\sin HAB}{\sin HBA}$$

หรือ
$$\frac{1}{\sin HBA} = \frac{HB}{HA \sin HAB}$$

$$\frac{\sin(\xi + \alpha')}{\sin \alpha} = \frac{HB \sin ABK}{HA \sin HAB} + \frac{r \sin \mu'}{N \sin \mu}$$

ซึ่ง $\mu = 90° -$ มุมกดไปยัง B และ $\mu' = 90° -$ มุมกดไปยังจุด A กระจาย $(\xi - \alpha')$ และแทน $\mu = \mu'$ (โดยประมาณ) เราได้

$$1 + \xi \cos \alpha' = \frac{r}{N}$$

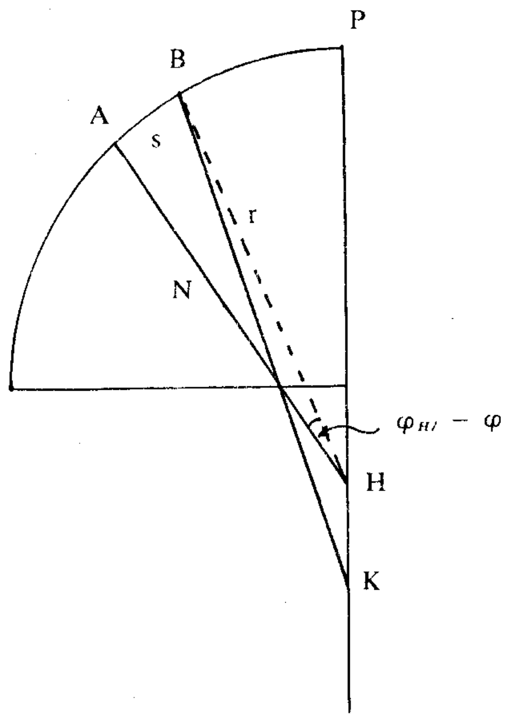
$$= 1\ 1\ \frac{1}{a}. \frac{e^2}{1 - e^2} .\delta^2 \cos^2\alpha \cos^2 \varphi$$

เนื่องจาก α มีค่าเกือบเท่า α'

$$\xi . \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{1}{2}. \frac{e^2}{1 - e^2} .\delta^2 \cos^2\alpha \cos^2 \varphi$$

และ
$$\xi = -\frac{1}{4}. \frac{e^2}{1 - e^2} .\delta^2 \sin 2\alpha \cos^2 \varphi$$

หรือ
$$\xi 0 = -\frac{e^{22} \sin 1''}{4(1 - e^2)} .\cos^2 \varphi'' \sin 2\alpha$$



รูป 10.7

ความต่างทางลองจิจูดหาได้พร้อมกันกับมุมต่าง ๆ จากสูตร

$$\left\{\begin{aligned} \tan\tfrac{1}{2}(\alpha' + \xi + \Delta\lambda) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(\lambda - \delta)}{\vartheta o\varsigma\frac{\times}{||}[\lambda + \delta)} .\cot\frac{\alpha}{||} \\ \tan\tfrac{1}{2}(\alpha' + \xi - \Delta\lambda) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\lambda - \delta)}{\sin\frac{1}{2}(\lambda + \delta)} .\cot\frac{a}{2} \end{aligned}\right.$$

เพื่อหาความต่างทางละติจูดเราสมมุติให้ว่า

$$\frac{S}{s} = \frac{\varphi_{H}' - \varphi}{\delta} \qquad \text{(โดยใกล้เคียง)}$$

Clarke แสดงถึงความเคลื่อนคลาดเป็น $\frac{1}{48}$ $e^2 \delta^3 \sin^2 2a \sin 2\varphi$ S เป็นระยะระหว่างเส้นขนานของจุด A และจุด B หากเราหมุนพื้นเมริเดียนของ D เป็นพื้นเมริเดียนของ A เราจะได้ดังในรูปข้างต้น หากเราหา $\varphi_{H'} - \varphi$ โดยกระบวนการอย่างเดียวกันที่ใช้ในการหา δ เราได้

$$\varphi_{H'} - \varphi = \frac{S}{N} [1 + \frac{1}{6} . \frac{e^2}{1 - e^2} .\cos^2\alpha \cos^2 \varphi (\frac{S}{N})^2]$$

มุม $\varphi_{H'} - \varphi$ อาจหาได้จากสูตรทรงกลม

$$\tan \tfrac{1}{2} (\varphi_{H'} - \varphi) = \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha' + \xi - \alpha)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha' + \xi + a)} .\tan \frac{\delta}{2}$$

$$= k \tan \frac{\alpha}{2}$$

ฉะนั้น

$$\tfrac{1}{2} (\varphi_{H'} - \varphi) = \tan^{-1} (k \tan \frac{\delta}{2})$$

แทนค่าสำหรับมุม $\frac{\delta}{2}$ และสำหรับอนุกรม $\tan^{-1} (k + \tan \frac{\delta}{2})$

$$\tfrac{1}{2} (\varphi_{H'} - \varphi) = k(\frac{\delta}{2} + \frac{\delta^3}{24}) - \frac{1}{3} (k \frac{\delta}{2} + k \frac{\delta^3}{24})^3 + \dots\dots\dots$$

$$= k \frac{\delta}{2} (1 + \frac{\delta^2}{12}) - \frac{1}{3} . k^3 \frac{\delta^3}{8} + \dots\dots\dots$$

$$\varphi_{H'} - \varphi = k\delta [1 + \frac{\delta^2}{12} (1 - k^2)]$$

$$\therefore \quad S = sk [1 + \frac{\delta^2}{12} (1 - k^2)]$$

$$= s . \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha' + \xi - \alpha)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha' + \xi + \alpha)} [1 + \frac{\delta^2}{12} \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)]$$

ความต่างละติจูดจริง $\varphi' - \varphi$ อาจหาได้โดยการหาร S ด้วยรัศมีความโค้งของเมริเดียนสำหรับละติจูดกึ่งกลาง, R_m ความเคลื่อนคลาดในการสมมุตินี้เป็น

$$-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 e^2 \cos 2\varphi$$

สูตรขั้นสุดท้ายของละติจูด คือ

$$\varphi' - \varphi \stackrel{=}{=} \frac{s}{R_m \sin 1''} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha' + \xi - \alpha)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' + \xi + \alpha)} \left[- + \frac{\delta^2}{12} \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \right] \text{..........(32)}$$

10. ทฤษฎีของ Dalby

ในการหาสูตร (25) และ (28), (29) ได้สมมุติว่าสูตรทรงกลม (Napier's analogies) จะให้ความต่างระหว่างอะซิมุทไป และกลับบนพื้นผิว Spheroid Dalby ได้ชี้ว่าความเคลื่อนคลาดในการสมมุตินี้ไม่คำนึงถึงเสียได้ และปกติทราบกันว่าเป็นทฤษฎีของ Dalby Helmert แสดงว่าความเคลื่อนคลาดอาจนิพจน์ในแบบ

$$\alpha_{BA} - \alpha_{AB} = \alpha'_{BA} - \alpha'_{AB} + \frac{e^4}{4 \text{ arc } 1''} \left(\frac{S}{N}\right) \sin^2\Delta\varphi . \Delta\varphi . \cos^4\varphi \text{ ....}$$

และว่าเทอมขนาดเล็กนี้ปกติเล็กกว่า 1 ใน 1,000 ของพิลิบดา อะซิมุทบนพื้น Spheroid แสดงด้วย α_{AB} และ α_{BA} อะซิมุทบนผิวทรงกลมแสดงด้วยอักษรมีขีด

Clarke แสดงว่าถ้า α และ α' เป็นมุมภายในบนผิว Spheroid และ β กับ β' เป็นมุมที่ตรงกันบนผิวทรงกลมแล้ว

$$\alpha - \alpha' = \beta + \beta' + \frac{e^4}{4 \text{ arc } 1''} . \left(\frac{k}{a}\right)^3 \sin\alpha \cos^2\alpha \sin\varphi \cos^3\varphi \text{ ....}$$

k เป็นระยะชยา อันนี้มีค่าใกล้เคียงกับอันก่อน เทอมเล็กมีขนาดเล็กกว่า $\frac{10}{1,000}$ ของพิลิบดาสำหรับแนวยาวที่สุด เช่น สถานีต่าง ๆ ในปัญหานี้

11. ปัญหาการคำนวณกลับ

มักจะมีอยู่บ่อย ๆ ที่ต้องการหาระยะ และอะซิมุทร่วมกันระหว่างสองสถานีซึ่งทราบละติจูด และลองจิจูด

หากให้ $X = S \sin \alpha$ และ $Y = S \cos\alpha$ แล้วสมการ (23) และ (18) เราได้

$$X = \frac{\Delta\lambda'' \cos \varphi'}{A'} \qquad \text{...............(32)}$$

และ $$Y = -\frac{1}{B}\left[\Delta\varphi'' + CX^2 + d(\delta\varphi'')^2 + E(\Delta\varphi'')X^2 \right] \qquad \text{...............(33)}$$

จากสมการนี้

$$\tan \alpha = \frac{X}{Y} = \frac{\Delta\lambda \cos \varphi'.B}{A'.h} \qquad \text{...............(34)}$$

และ $$\left.\begin{aligned} S &= Y.\sec \alpha \\ &= X.\mathrm{cosec}\ \alpha \end{aligned}\right\} \qquad \text{...............(35)}$$

การคำนวณกลับอาจคำนวณในแบบเดียวกันซึ่งใช้สำหรับคำนวณจากทางตรง แต่ระเบียบของกระบวนการคำนวณได้รับการดัดแปลงดังนี้

ในขั้นแรกคำนวณ X ด้วยสมการ (32) แล้วเทอม C, D (และ E) ใน (33) จะได้ค่า Y ในที่สุด ต่อมาหาอะซิมุทได้โดยอาศัย $\tan\alpha$ S อาจคำนวณได้จากเทอม X หรือจากเทอม Y ไม่ว่าคำนวณจากอันไหนจะได้ความละเอียดด้วยกันทั้งสิ้น เมื่อคำนวณ $\Delta\alpha$ จะให้ α'

ในตัวอย่างการคำนวณกลับต่อไปนี้ เราทราบสองละติจูด และสองลองจิจูด และ S, α และ α' จะคำนวณหาความแตกต่างแท้จริงระหว่างแบบฟอร์มนี้กับแบบฟอร์มก่อน คือการคำนวณ $\tan \alpha$ และ S ในมุมล่างขวา

การคำนวณตำแหน่ง, การสามเหลี่ยมชั้นที่ 2
การคำนวณกลับ

α	ถึง	° ′ ″
∡	และ	+
α		53 30 11.5
$\Delta\alpha$		− 1 54.7
		180 00 00.00
α'	1 Indianola ถึง 2 Sand Point	233 28 16.8
	มุมที่สามของสามเหลี่ยม	

φ	18° 35 02.377	2 Sand Point	λ	96 26 59.604
$\Delta\varphi$	− 2 36.805	$\Delta\lambda$		+ 3 59.900
φ'	28 32 25.572	1 Indianola	λ	96 30 59.504

$\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$	28° 33′ 44″ S	}3.683 529	S^2	}7.6387	h^2	4.39
เทอมที่ 1	+ 156″.7455 cos α		$\sin_2\alpha$		D	2.32
เทอมที่ 2			C	1.1419		6.71
และ 3	+ 0.0595 B	8.511 666		8.7706		
$-\Delta\varphi$	+ 156.8050 h	2.195 195		0.0590		0.005

				$S \sin \alpha$ =	3.814 371
				$S \cos \alpha$ =	3.683 529
S	} 3.814 371			$\tan \alpha$ =	0.130 842
$\sin \alpha$		$\Delta\lambda$	2.380 03	α =	53° 30′ 11″.5
A′	8.509 391	$\sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$	9.679 53	$\cos \alpha$ =	9.774 355
$\sec \varphi'$	0.056 268		2.059 56	S =	3.909 174
	2.380 030				
$\Delta\lambda$	+ 239″.900		+ 114″.8		

ปัญหาโจทย์

1. ตำแหน่งจุด B { ละติจูด 39° 13′ 26″.686 ; ลองจิจูด 98 32 30.506

ตำแหน่งจุด C { ละติจูด 38° 51′ 50″.913 ; ลองจิจูด 98 29 15.508

อะซิมุท B ถึง C = 353° 17′ 21″.81 ระยะ B ถึง C = 40232.35 เมตร, (log = 4.604 5374)

อะซิมุทกลับ = 173° 19′ 24″.64

มุมทรงกลม คือ A = 57° 53′ 14″.39

B = 62 23 31.40

C = 59 43 17.93

ซึ่ง A อยู่ทางตะวันออกของ BC จงคำนวณละติจูด และลองจิจูดของจุด A จากแนวทั้งสอง และอะซิมุทกลับ AB และ AC

2. จงคำนวณค่าของเทอมตัดทิ้งในทฤษฎีของ Dalby เมื่อระยะเท่ากับ 200 ไมล์,- φ = 40° และ α = 45°

จงคำนวณตำแหน่งจุด B โดยใช้สูตร (18) ถึงสูตร (c) หน้า 5 - 19 โดยสูตร (27) ถึง (30)

ละติจูด	A	=	41° 01′ 17.″240 N
ลองจิจูด	A	=	114° 04′ 36.″286 W
ระยะ	AB	=	237 770.57 เมตร (log = 5.3761 5810)
อะซิมุทจาก A ถึง B		=	303° 40′ 16.″608