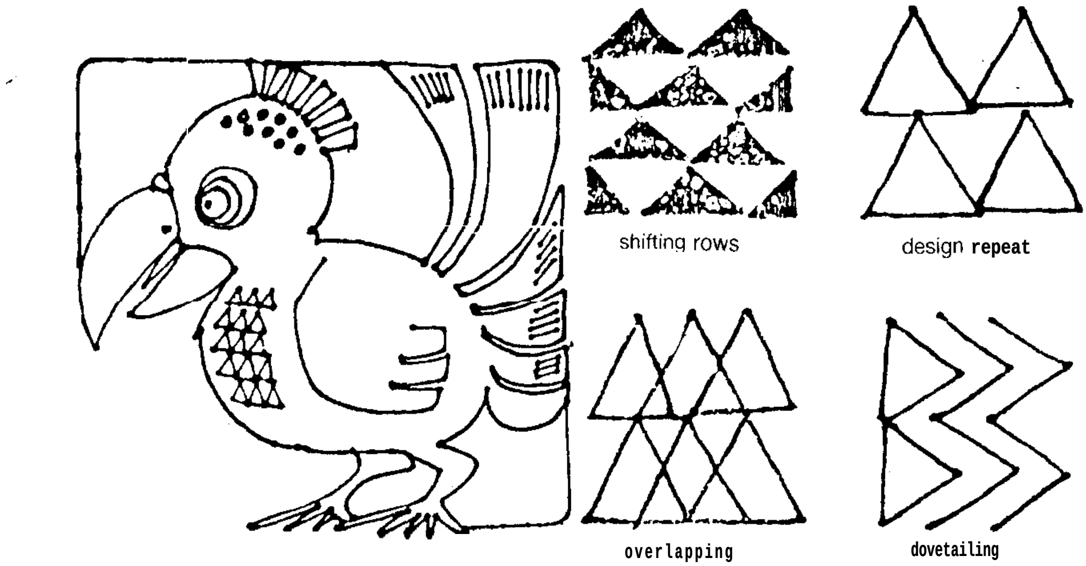


บทที่ 6
การสอนแก้ปัญหาและรูปแบบของคณิตศาสตร์

การสอนวิธีการแก้ปัญหา (Teaching problem - solving)

ในบทนี้เขียนขึ้นเพื่อจะให้เกิดความเข้าใจวิธีการแก้ปัญหา เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบายและแนะนำให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับขบวนการของการแก้ปัญหา จะให้ท่านได้พิจารณาปัญหาต่อไปนี้

1. มีรูป $\boxed{\text{จ}}$ อยู่กี่รูปในกระดานหมากรุกแบบมาตรฐาน 8×8 คำตอบไม่ใช่ 64 รูป โดยปกติแล้วจะมีมากกว่า 200 รูป
2. พื้นที่ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุในวงกลมรัศมี a หน่วย เท่ากับเท่าไร ?

ปัญหา คืออะไร (What is problem ?)

เพื่อเป็นการพัฒนานิยามของคำว่า "ปัญหา" ลองพิจารณาคำถามต่อไปนี้

- ทำไมเด็กอายุ 5 ขวบ ส่วนใหญ่จะบอกเวลาไม่ค่อยได้ ?
- ทำไมผู้ใหญ่จึงบอกเวลาได้รวดเร็ว ?

- ไม่น่าเป็นไปได้ ทำไมการเตะ field goals ของฟุตบอลอเมริกันจึงเป็นปัญหาที่ตอบยาก สำหรับ Albert Einstein

คนจำนวนมากเชื่อว่าปัญหานั้นประกอบด้วยคำถามที่ให้ตอบ อย่างไรก็ดี ผู้ที่ช่างสังเกตเชื่อว่า ไม่ใช่ทุกคำถามที่เป็นปัญหา ตัวอย่างเช่น "เวลาเท่าไรแล้ว ?" แน่นอนสิ่งนี้เป็นปัญหาสำหรับเด็กอายุ 5 ขวบ เด็กที่มีอายุอยู่ในช่วงนี้สนใจที่จะบอกเวลาและมีเพียง 2 - 3 คนเท่านั้นที่สามารถบอกเวลาโดยเหลียวไปดูนาฬิกาเพียงเล็กน้อย มันเป็นการยากสำหรับเขาเพราะว่าเขายังขาดความรู้และประสบการณ์ที่จะมีผลต่อระบบการบอกเวลา ในขณะที่ผู้ใหญ่มีทั้งความรู้และประสบการณ์ที่ใช้ปฏิบัติในการบอกเวลาเพียงแต่ชำเลืองดูเท่านั้น ดังนั้นสิ่งหนึ่งที่ควรพิจารณา คือว่า คำถามเป็นปัญหาบนพื้นฐานของความรู้ที่กำหนดโดยแต่ละบุคคล สำหรับคนหนึ่งคำถาม อาจถูกตอบโดยการพิจารณาเช่นกับงานปกติ สำหรับคนอื่น ๆ คำถามเดียวกันนี้อาจต้องใช้การพิจารณาอย่างสุขุม ถ้าความรู้นั้นจะไม่ตรงกับการตอบคำถามนั้น

เช่นตัวอย่าง การหาจำนวนเฉพาะ 10 ตัวแรก สำหรับผู้อ่านตำรานี้ คำถามไม่ได้น่าสนใจมากนัก แต่สำหรับเด็กชั้น ม.1 คำถามนี้ต้องการพิจารณา และทดลองอย่างรอบคอบ เราจะกำหนดเงื่อนไขว่า คำถามที่จะเป็นปัญหานั้น ต้องท้าทายที่ไม่สามารถตัดสินใจโดยผลจากการพิจารณาจากความรู้ของนักเรียน ดังนั้นคำถามอาจจะเป็นปัญหาสำหรับนักเรียนคนหนึ่งและอาจไม่เป็นปัญหาสำหรับอีกคนหนึ่ง

และยังมีเงื่อนไขอื่นอีกที่เหมาะสม ถ้าคำถามนั้นเป็นตัวปัญหา เป็นไปได้อย่างไรที่การเตะ field goals จึงเป็นปัญหาสำหรับ Albert Einstein ทั้งหมดนี้น่าจะเป็นจริง Einstein ไม่มีความชำนาญในการเตะ field goals แต่มันไม่ได้เป็นปัญหาเพราะว่าการเตะ field goals นั้นไม่เป็นที่สนใจของเขา นั่นคือปัญหานั้นต้องมีการท้าทาย แต่ถ้าคำถามนั้นไม่ได้รับความสนใจ คำถามนั้นก็ไม่ใช่ปัญหา

ค่าของ i^i เป็นตัวอย่าง ผู้อ่านอาจจะไม่ทราบและไม่แน่ใจว่าจะเริ่มการหาค่าอย่างไร การหาค่าของ i^i เป็นปัญหาสำหรับผู้อ่านหรือไม่ มันอาจเป็นการท้าทายที่จะหาค่าของ i^i ถ้าการท้าทายนี้ไม่ได้รับการยอมรับ คำถามนี้ก็ไม่เป็นปัญหา คำถามที่ท้าทายนี้จะเป็นปัญหาต่อบุคคลถ้าการท้าทายนั้นถูกยอมรับโดยบุคคลนั้น นั่นคือ คำถามที่จะเป็นปัญหาของนักเรียนได้ต้องเป็นสิ่งจูงใจให้นักเรียนตอบคำถามนั้น

นิยามของคำว่า ปัญหา ที่กล่าวมานี้ ถือเป็นนิยามที่ใช้อ้างอิงทางการศึกษาได้ ในหลายกรณี ที่ปัญหา ถูกพิจารณาบางสิ่งบางอย่างก่อนถึงเป้าหมาย ในที่นี้ตำแหน่งที่ว่านั้นคือมันจะยังไม่เป็นปัญหาจนกว่านักเรียนจะสนใจมัน และตั้งจุดมุ่งหมายขึ้น จุดสำคัญทางการศึกษา

ที่แตกต่างกันไปก็คือ ถ้าคำถามนั้นเป็นองค์ประกอบของปัญหา มันจะต้องเสนอแนวทางที่จะนำไปสู่การยอมรับการท้าทาย นักเรียนมักจะสมัครใจที่จะยอมรับ การท้าทายที่เสนอโดยครูผู้ซึ่งตั้งอกตั้งใจที่จะแก้ปัญหา และผู้ซึ่งเสริมแรงให้นักเรียนพยายามแก้ปัญหานั้นมันจะเป็นไปไม่ได้ที่การท้าทายจะได้รับการยอมรับเมื่อนักเรียนมองเห็นการท้าทายและมันยากเกินความสามารถของเขา

จากนิยามของคำว่า ปัญหา การแก้ปัญหาหมายความว่าอย่างไร ? ง่ายมาก การแก้ปัญหาเป็นขบวนการที่ยอมรับการท้าทายและพยายามแก้ปัญหานั้น การสอนเกี่ยวกับการแก้ปัญหาเป็นการกระทำ ซึ่งครูจะช่วยเหลือนักเรียนให้ยอมรับการท้าทายจากคำถาม และแนะนำให้ไปสู่ข้อตกลงกัน ในบทนี้จะพูดถึงการสอนขบวนการทักษะทางสติปัญญา การแก้ปัญหาต้องการให้นักเรียนประสานขบวนการและความหวัง เพื่อให้ได้มาซึ่งทักษะในการเลือก และอธิบายความสัมพันธ์ของเงื่อนไขและ concept ค้นหากฎเกณฑ์ทั่ว ๆ ไป สร้างสูตร และใช้เวลาอย่างคุ้มค่าในการให้ได้มาซึ่งทักษะ

ความสำคัญของการสอนการแก้ปัญหา (Important of teaching problem solving)

นักคณิตศาสตร์ศึกษา (Mathematics educator) เชื่อว่า การแก้ปัญหาเป็นความสำคัญในกิจกรรมการเรียนการสอน ความเชื่อนี้ปกติยืนยันโดยข้อความ 2 ข้อความคือ สิ่งแรกเกี่ยวกับการค้นหาสมมติฐานที่จะสอนนักเรียน ให้สามารถแก้ปัญหา เขาจะได้มาซึ่งการวิเคราะห์ในการตัดสินใจในชีวิตของเขา ข้อความที่ 2 มุ่งไปสู่คุณค่าของปัญหาและการแก้ปัญหานั้นเป็นสิ่งสำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ เราลองมาพิจารณาความสัมพันธ์ 2 ประการ ที่มีความสำคัญต่อการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียน

ทุก ๆ คนในสังคมเรานั้นที่จริงแล้วมีการตัดสินใจเสมอ บางคนก็มีความสัมพันธ์เล็ก ๆ น้อย ๆ กับคนอื่น เช่น ในการเลือกอาชีพ ในการตัดสินใจโดยใช้สติปัญญา ประชาชนต้องมีความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล และมีจุดมุ่งหมาย โดยปกติแล้ว จุดมุ่งหมายของการสอนคณิตศาสตร์เพื่อช่วยให้นักเรียนคิดอย่างมีเหตุผล และมีจุดมุ่งหมาย เพราะมันเป็นธรรมชาติในการเรียนคณิตศาสตร์ สามารถจะได้มาซึ่งประสบการณ์ในการเก็บและวิเคราะห์ข้อมูลและสรุปจากความรู้ที่ได้นี้ การศึกษาคณิตศาสตร์สามารถจะช่วยเหลือในการสร้างผู้คิดที่ดี ข้อสรุปนี้ยังไม่แน่ชัดนัก เพราะมันเป็นการยากที่จะวัดคนที่สามารถปรับปรุงการตัดสินใจที่ดี

ลองพิจารณาข้อเสนอข้อที่ 2 มีการประชุมหลาย ๆ แห่ง ที่ให้ความสำคัญในบทบาทของปัญหา ที่มีต่อการเรียนการสอนและหลักสูตร จนในที่ประชุมนั้นกล่าวว่า ลำดับขั้นของ

ลำดับของปัญหาเป็นเรื่องใหญ่เรื่องหนึ่ง และเป็นงานที่สำคัญของการพัฒนาหลักสูตร นอกจากนี้แล้ว International Commission on Mathematical Instruction ได้เลือกหัวข้อเกี่ยวกับบทบาทของปัญหาในการพัฒนากิจกรรมทางคณิตศาสตร์ เป็น 1 ใน 3 ของหัวข้อที่ใช้อภิปรายกันที่ International Congress of Mathematics in Moscow, U.S.S.R. นอกจากนี้แล้วการประชุม Board of the Mathematical Sciences ของอเมริกาได้รายงานเกี่ยวกับ การแก้ปัญหาในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยกล่าวว่า

เราถือว่าการแก้ปัญหานั้นเป็นพื้นฐานของกิจกรรมคณิตศาสตร์ กิจกรรมทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ เช่น การทำให้เป็นรูปทั่ว ๆ ไป รูปแบบทางนามธรรม การสร้างทฤษฎี และการสร้าง concept นั้น อยู่บนพื้นของการแก้ปัญหาทั้งสิ้น

ดังนั้นถ้าเราจะพัฒนาทางด้านความคิดของเด็ก (mental development of child) จำเป็นต้องเริ่มจากทักษะในการแก้ปัญหา (problem solving skills) และทักษะดังกล่าว ต้องประกอบด้วย

1. เข้าใจขบวนการ (understanding process) เช่น

1.1 การคูณ 57 ด้วย 42 ต้องเข้าใจดังนี้

57		
42	×	
14		หลักหน่วยคูณหลักหน่วย 2×7
100		หลักหน่วยคูณหลักสิบ 2×250
280	+	หลักสิบคูณหลักหน่วย 40×7
2000		หลักสิบคูณหลักสิบ 40×50
2394		

1.2 การหารากกำลังที่สอง เช่น $\sqrt{1156}$

3	11,56	34
	9	
64	256	
	256	
	0	

1. แบ่งตัวตั้งจากด้านหลังไปครั้งละ 2 ตัว
2. หาจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วไม่เกิน 11 ซึ่งจะได้เท่ากับ 3
3. เขียน 3 ไว้ที่ตัวหารและผลลัพธ์

4. เอาผลลัพธ์กับตัวหารคูณกันแล้วลบออกจากตัวตั้ง
5. เขียนผลลัพธ์ที่ได้ตามด้วยตัวตั้งที่เหลือชักลงมา
6. เอา 2 คูณ ผลลัพธ์ที่ได้ครั้งแรก (ในที่นี้คือ 3) นำผลลัพธ์จากการคูณมาเป็นตัวหารตัวต่อไปคือ 6
7. เอา 6 ไป หารตัวตั้ง 2 ตัวแรก คือ 25 ได้ประมาณ 4 ครั้ง
8. นำ 4 ไปใช้ใส่ทั้งผลลัพธ์และตัวหาร แล้วนำ 4 มาคูณกับ 64 ได้ผลลัพธ์เท่าไร นำไปลบตัวตั้งได้ 0
9. จะได้รากกำลังที่สองของ 1156 คือ 34 เป็นต้น

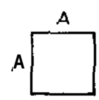
2. เข้าใจสิ่งที่เหมือนกันทั้งหมด (understanding thread) การเข้าใจ concept ที่เหมือนกันทั้งหมด ไม่ว่าจะเป็นเลขคณิต พีชคณิต หรือตรีโกนมิติ เช่น

2.1 การบวกเศษส่วน เมื่อเข้าใจว่า $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = ?$ แล้วก็ควรจะเข้าใจ

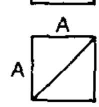
$\frac{x + 2}{x - 1} + \frac{x - 5}{x - 3}$ และ $\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}$ ด้วย

2.2 ถ้าเข้าใจว่า $\log (AB) = \log A + \log B$ แล้วก็ควรจะเข้าใจไปถึง $\log A^m = m \log A$ ด้วย

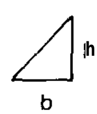
3. เข้าใจสูตร (understanding formulars) หมายถึง เข้าใจความเป็นมาของสูตรทางคณิตศาสตร์ เช่น

พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส 

$= A^2$

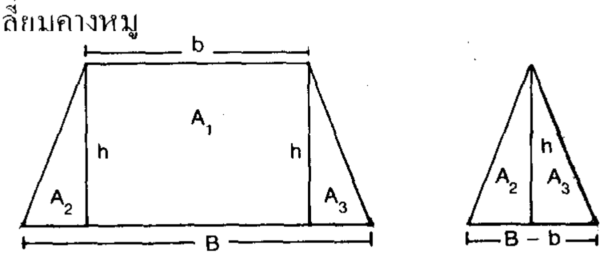
พื้นที่ของสามเหลี่ยม 

$= \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2} \times A \times A$

พื้นที่ของสามเหลี่ยมใด ๆ 

$= \frac{1}{2} \times h \times b$

พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู



พื้นที่ของสี่เหลี่ยม $A_1 = h \times b$

พื้นที่ของสามเหลี่ยม $A_2 + A_3$ $= \frac{1}{2} \times h \times (B - b)$

พื้นที่ $A_1 + A_2 + A_3$ $= (h \times b) + (\frac{1}{2} \times h \times (B - b)$

$$= hb + \frac{1}{2} h (B - b)$$

$$= hb + \frac{1}{2} hB - \frac{1}{2} hb$$

$$= \frac{1}{2} hb + \frac{1}{2} hB$$

$$= \frac{1}{2} h (b + B)$$

พื้นที่ $A_1 + A_2 + A_3$ = พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู

นั่นคือ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู $= \frac{1}{2} \times$ สูง $\times$ ผลบวกของด้านคู่ขนาน

หรือสูตรการหาพื้นที่ของวงกลม เราจะเริ่มจาก

π เป็นอัตราส่วนระหว่างเส้นรอบวงของวงกลมกับเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม (ในวงกลมเดียวกัน) เขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ว่า

$$\pi = \frac{\text{เส้นรอบวงของวงกลม}}{\text{เส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม}}$$

หรือ เส้นรอบวงของวงกลม $= \pi \times$ เส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม

แต่ เส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม = 2 เท่าของรัศมีของวงกลม

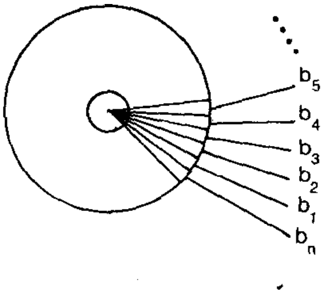
และถ้ารัศมีของวงกลมยาว = r หน่วย

เส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม $= 2r$

เส้นรอบวงของวงกลม $= \pi \times 2r$

$$= 2\pi r$$

เรามีวงกลมอยู่วงหนึ่ง ซึ่งรัศมียาว r หน่วย และต้องการหาพื้นที่ของวงกลมนี้



รูปที่ 10

เราแบ่งวงกลมออกเป็นสามเหลี่ยมเล็ก ๆ ดังรูปที่ 10

พื้นที่สามเหลี่ยมเล็กฐาน $b_1 = \frac{1}{2} rb_1$

พื้นที่สามเหลี่ยมเล็กฐาน $b_2 = \frac{1}{2} rb_2$

$\vdots \qquad \vdots$

พื้นที่สามเหลี่ยมเล็กฐาน $b_n = \frac{1}{2} rb_n$

พื้นที่สามเหลี่ยมเล็กรวมกัน = พื้นที่วงกลม $= \frac{1}{2} rb_1 + \frac{1}{2}$ rb, $+ \frac{1}{2}$ rb, + + 1 rb_n

$= \frac{1}{2} r(b_1 + b_2 + b_3 + \dots\dots\dots + b_n)$

$= \frac{1}{2} r \times$ (เส้นรอบวงของวงกลม)

$= \frac{1}{2} rx\ 2\pi r$

$= \pi r \times r$

$\therefore$ พื้นที่วงกลม $= \pi r^2$

4. **พัฒนาระบบต่าง ๆ ให้เป็นรูปแบบขึ้น (developing Systematics forms)** เช่น การแก้สมการต่าง ๆ เหล่านี้

1. $x + 6 = 10$
1. $2x = 12$
2. $2x + 6 = 18$
3. $5x + 4 = 4x + 11$
4. $7x + 3x + 7 = 2x + 5x + 6 - 3$
5. $\frac{3}{2}x - \frac{4}{5}x - 8 = \frac{7}{3}x + \frac{6}{4}x + 2$
6. $\frac{3}{4}(x - 1) + \frac{1}{4}(x + 6) = 3(\frac{x}{5} - 3)$

จากสมการต่าง ๆ เหล่านี้จะพบว่า ครูจะสอนให้นักเรียนรู้จักสมการในรูปแบบต่าง ๆ โดยเริ่มจาก รูปแบบง่าย ๆ ไปสู่รูปแบบที่ยากขึ้นตามลำดับ ส่วนเวลาจะให้นักเรียนแก้ปัญหา หรือแก้สมการ

นั้น ครูจะเริ่มจากสิ่งที่ยากไปสู่สิ่งที่ง่าย ๆ เช่น การแก้สมการ

6. $\frac{2}{3}(x + 1) + \frac{1}{4}(x + 6) \qquad = 3\left(\frac{x}{2} + 6\right)$

5. $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}x + \frac{6}{4} \qquad = \frac{3}{2}x + 18$

4. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \qquad = \frac{3}{2}x + 18$

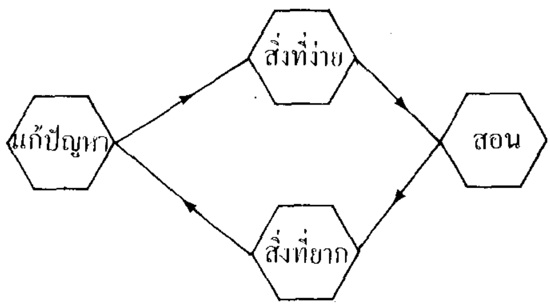
3. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}x \qquad = 18 - \frac{2}{3} - \frac{3}{2}$

2. $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right)x \qquad = \frac{108-4-g}{6}$

1. $\frac{7}{12}x \qquad = \frac{95}{6}$

1. $x \qquad = \frac{95}{6} \times \frac{12}{7} = \frac{190}{7}$

ขั้นตอนต่าง ๆ ของการแก้ปัญหานั้นกลับกันกับการสอน ซึ่งทั้งหมดนี้ถือว่าเป็นรูปแบบของระบบชนิดหนึ่ง อาจเขียน flow chart ได้ว่าการสอนนั้นเริ่มโดย



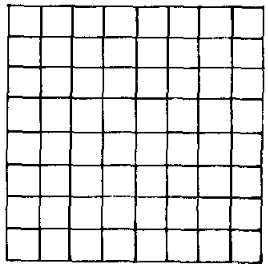
รูปที่ 11

การสอนวิธีแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นต้องให้นักเรียนรู้จากสิ่งต่อไปนี้

1. แยกแยะสิ่งต่าง ๆ ของปัญหา
2. วิเคราะห์ปัญหา
3. ศึกษาปัญหาพิเศษ
4. สร้างรูปแบบ (patterns)

ลองพิจารณาปัญหาต่าง ๆ เหล่านี้

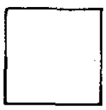
1. ในกระดานหมากรุกมีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอยู่กี่รูป



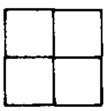
รูปที่ 12

คำตอบคงไม่ใช่ 64 รูป แน่ เท่าไรล่ะ ? คุณคิดอย่างไร?และถ้าเราแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้ไปเรื่อย ๆ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเล็ก เหล่านี้จะเพิ่มขึ้นอย่างไร

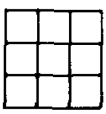
ถ้าเราจะพิจารณาดังนี้



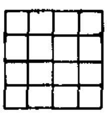
= 1 แบ่งด้าน 1 ส่วน = 1^2



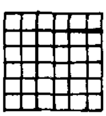
= 1 + 4 แบ่งด้าน 2 ส่วน = $1^2 + 2^2$



= 1 + 4 + 9 แบ่งด้าน 3 ส่วน = $1^2 + 2^2 + 3^2$



= 1 + 4 + 9 + 16 แบ่งด้าน 4 ส่วน = $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

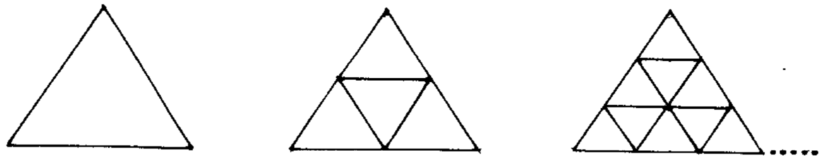


= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 แบ่งด้าน 5 ส่วน = $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

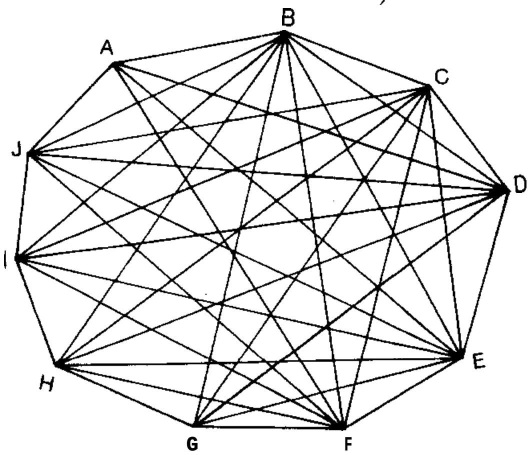
เพราะฉะนั้นถ้าแบ่งด้านเป็น ∞ ส่วน จำนวนสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมดเท่ากับ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots\dots\dots + \infty^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$$

ถ้าเป็นรูปสามเหลี่ยม และแบ่งด้านเช่นเดียวกับปัญหาที่แล้ว จำนวนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ ที่เกิดขึ้นจะมีรูปแบบเป็นอย่างไร ?



2. มีจุดอยู่ 10 จุด จะลากเส้นต่อจุดเหล่านั้นทั้งหมดได้กี่จุด ? (โดยไม่มี 3 จุดใด ๆ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และเส้นที่ซ้ำกันนับเป็น 1 เส้น)



รูปที่ 13

จากจุด A ลากเส้นไปยังจุดอื่น ๆ ได้ 9 เส้น = 9
จากจุด B ลากเส้นไปยังจุดอื่น ๆ ได้ 9−1 เส้น = 8
จากจุด C ลากเส้นไปยังจุดอื่น ๆ ได้ 9−2 เส้น = 7
จากจุด D ลากเส้นไปยังจุดอื่น ๆ ได้ 9−3 เส้น = 6
จากจุด E ลากเส้นไปยังจุดอื่น ๆ ได้ 9−4 เส้น = 5
จากจุด F ลากเส้นไปยังจุดอื่น ๆ ได้ 9−5 เส้น = 4
จากจุด G ลากเส้นไปยังจุดอื่น ๆ ได้ 9−6 เส้น = 3
จากจุด H ลากเส้นไปยังจุดอื่น ๆ ได้ 9−7 เส้น = 2
จากจุด I ลากเส้นไปยังจุดอื่น ๆ ได้ 9−8 เส้น = 1
จากจุด J ลากเส้นไปยังจุดอื่น ๆ ได้ 9−9 เส้น = 0

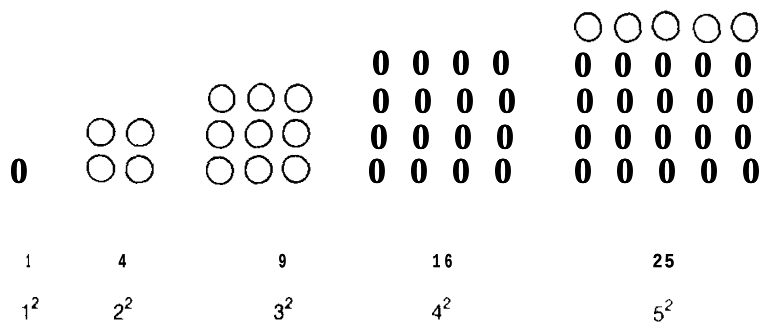
นั่นคือ จำนวนเส้นทั้งหมดเท่ากับ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$
$= 10\left(\frac{10-1}{2}\right)$ เส้น

หรือถ้าคิดจากการบวกจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง n $= \frac{n}{2}(n+1)$

$\therefore 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9\,(9+1)}{2} = \frac{9}{2} \times 10 = \mathbf{45}$

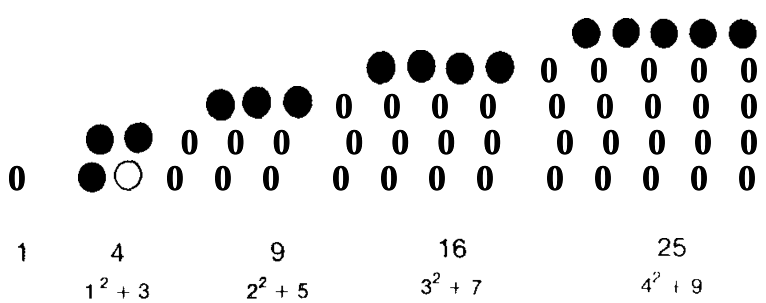
ในลักษณะเดียวกันอาจพิจารณาปัญหาที่มี pattern เดียวกันได้ เช่น

1. ทีมฟุตบอล 20 ทีม ถ้าจะแข่งแบบพบกันหมดทุกทีม จะมีการแข่งขันทั้งหมดกี่ครั้ง?
2. มีคน 11 คน ถ้าจะจับมือกันทุกคนโดยไม่ซ้ำกันเลย จะมีการจับมือกันทั้งหมดกี่ครั้ง?
3. กำลังสองสมบูรณ์ (perfect Squares)



รูปที่ 14 กำลังสองของจำนวนเต็มบวก

คุณสังเกตเห็นอะไรจากการยกกำลังสองตามรูปที่ 14 บ้าง ?
มีรูปแบบอะไรของการยกกำลังสองของจำนวนหนึ่งไปยังจำนวนอื่น ?

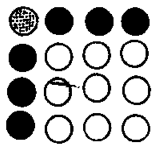


รูปที่ 15

จากรูปที่ 15 จะสังเกตเห็นว่า กำลังสองของจำนวนที่อยู่ข้างหน้าจะเกี่ยวข้องกับกำลังสองของจำนวนถัดไป โดยที่กำลังสองของตัวถัดไปจะเท่ากับกำลังสองของตัวหน้ารวมกับจุดรูปตัว L ของแถวและคอลัมน์

หลังจาก 1 แล้ว เราจะพบว่ากำลังสองสมบูรณ์ของแต่ละจำนวนนั้นประกอบด้วยจุดที่มีรูปเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส กับ 2 ชุดของจุดที่เท่ากัน รวมอีก 1 จุด ตัวอย่างเช่น

จุดต่าง ๆ ที่รวมเป็น 16 ประกอบด้วยสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีจุดด้านละ 3 จุด รวมกัน จุดของด้านอีก 3 จุด จำนวน 2 ชุด และรวมอีก 1 จุด พิจารณาจากรูป



$$4^2 = 16 = 3^2 + 2(3) + 1$$

จำนวนอื่น ๆ ครูก็สามารถแสดงให้นักเรียนเห็นเช่นเดียวกันอย่างนี้ได้ เช่น

$$5^2 = 25 = 4^2 + 2(4) + 1$$

$$6^2 = 36 = 5^2 + 2(5) + 1$$

$$\vdots$$

และถ้านักเรียนสามารถเขียนรูปแบบเช่นนี้ได้ไปเรื่อย ๆ เขาก็จะสามารถเขียนรูปกำลังสองสมบูรณ์ในรูปทั่ว ๆ ไปได้คือ......

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2(n) + 1$$

การวิเคราะห์ปัญหา

เพื่อให้ได้มาซึ่งจุดเริ่มต้นสำหรับคำตอบของปัญหา จะต้องใช้เทคนิคของการวิเคราะห์เพื่อเป็นสิ่งที่จะช่วยหาคำตอบ คำถามเหล่านี้น่าจะเป็นแนวทางที่ดี

1. ปัญหาที่ถามนั้นบอกอะไรแก่เราบ้าง ?
2. เราต้องการจะค้นหาอะไร ?
3. มีข้อมูลอะไรบ้างที่กำหนดไว้ให้เรา ?
4. เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ในลักษณะสมการได้ไหม ?
5. เราสามารถแก้สมการนั้นได้หรือเปล่า ?
6. คำตอบที่ได้นั้นถูกต้อง สมเหตุสมผลหรือไม่ ?

เราเชื่อว่านักเรียนจะสามารถตอบ 3 คำถามแรกได้ และก็จะเริ่มไม่รู้ว่าจะทำอะไรต่อ การสร้างเป็นรูปสมการนั้นต้องอาศัยการตัดสินใจอันเกิดจากการกระทำที่สร้างสรรค์และต้องการความอิสระในการคิด โดยปราศจากความกลัวและความล้มเหลว ที่จริงแล้วความเฉลียวฉลาดของนักเรียน ทำให้ครูประหลาดใจอยู่บ่อย ๆ และเขาเป็นผู้ช่วยเหลือให้เกิดพฤติกรรมเหล่านั้น

การมีส่วนช่วยชนิดนี้ไม่ได้ขึ้นอยู่กับความสำเร็จหรือความสามารถทางคณิตศาสตร์ในครั้งก่อน ๆ

การสอนทักษะทางคณิตศาสตร์

เราได้อธิบายถึงการสอนให้เกิดความรู้ความเข้าใจ นั่นคือความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาหรือความรู้อย่างอื่น ที่มีลักษณะเช่นเดียวกันนี้ concept, ประโยคเดี่ยว, และหลักเกณฑ์ต่าง ๆ ต่างก็เป็นความรู้ความเข้าใจ สิ่งเหล่านี้เป็นพื้นฐานของความรู้ความเข้าใจต่าง ๆ และความรู้ความเข้าใจแต่ละชนิดนี้เป็นการคิดในชั้นเรียน ความรู้เกี่ยวกับว่าเราจะทำบางสิ่งบางอย่างได้อย่างไร ตัวอย่างเช่น ครูคณิตศาสตร์แสดงให้นักเรียนเห็นถึงการยกกำลังของ binomial การประมาณค่าในช่วง, การแก้สมการ, การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงด้วยความรวดเร็วและแม่นยำ นี่เป็นเรื่องธรรมดาเมื่ออ้างถึงการสอนเพื่อให้เกิดทักษะ

การสอนให้เกิดทักษะนั้นมีบทบาทที่สำคัญต่อการสอนคณิตศาสตร์ ถ้าไม่มีการพัฒนาทักษะในงานที่ครูให้ทำเขาอาจจะมีอุปสรรคมากในการเรียนคณิตศาสตร์ ไม่เป็นการเพียงพอสำหรับนักเรียนที่จะรู้เพียงแต่การคำนวณเกี่ยวกับจำนวนตักยะเท่านั้น แต่เขาต้องมีทักษะในการทำด้วย นั่นคือความก้าวหน้าตามที่เราต้องการในการเรียนคณิตศาสตร์ ครูต้องคิดเสมอว่าการพัฒนาโปรแกรมการสอนนั้นต้องไม่อยู่บนพื้นฐานที่จะให้นักเรียนได้เกิดทักษะเพียงอย่างเดียว เพราะถ้าเป็นเช่นนั้นการเรียนรู้จะเป็นการทำแบบฝึกหัด ดังนั้นครูต้องแนะนำการฝึกหัดอย่างเพียงพอ สำหรับนักเรียนเพื่อให้เกิดทักษะที่จำเป็นทางคณิตศาสตร์ และต้องพยายามสอนให้เกิด concept, หลักเกณฑ์ทั่วไป, และทักษะด้วย

ธรรมชาติของทักษะ

ลักษณะของการเรียนรู้ว่าเราจะทำสิ่งใดสิ่งหนึ่งได้อย่างไรนั้นเป็นสิ่งที่สามารถเรียนโดยอาศัยการเลียนแบบได้ ลองพิจารณาทักษะของการว่ายน้ำและการยกกำลังสองของ binomial หลายคนเรียนรู้การว่ายน้ำโดยไม่มีใครสอน แต่อาศัยการสังเกตและเลียนแบบคนอื่น คล้ายกับนักเรียนที่เรียนพีชคณิตหลายคนที่เรียนว่าจะยกกำลังสอง binomial ได้อย่างไร โดยอาศัยการสังเกตและเลียนแบบครู หรือนักเรียนคนอื่น ซึ่งการปฏิบัติอย่างนั้นเขาจะสามารถปรับปรุงความสามารถของเขาในการยกกำลังสอง binomial และสามารถหาผลลัพธ์ได้อย่างถูกต้องและแม่นยำ ดังนั้นจึงเป็นการได้มาซึ่งทักษะที่ต้องการ

อย่างไรก็ดีบางคนอาจไม่สรุปว่ายุทธวิธีของการเลียนแบบโดยการปฏิบัตินั้นเป็นวิธีที่ดีที่จะได้มาซึ่งทักษะ เพราะไม่มีความรู้ทางทฤษฎี หรือหลักเกณฑ์ต่าง ๆ เลย การเลียนแบบและการฝึกหัดนั้นดูเหมือนจะเป็นเรื่องของการใช้เวลา และไม่คงเส้นคงวาในการเรียนรู้ทักษะ นักว่ายน้ำที่เข้าใจวิธีหายใจ การเตะขา การพุ่งตัว ดูเหมือนว่าจะเป็นการปรับปรุงที่ดีกว่า เช่น

เดียวกับนักเรียนที่เรียนพีชคณิตที่เข้าใจกฎเกณฑ์ทั่วไปทางคณิตศาสตร์ เกี่ยวกับการยกกำลังของ binomial และก็จะได้มาซึ่งความชำนาญ และเป็นความสมบูรณ์ขึ้น แม้ว่านักเรียนสามารถเรียนโดยการสังเกต แต่ก็จะต้องนำไปรวมกับความรู้ความเข้าใจที่เกี่ยวกับทักษะ และการฝึกหัดที่ถูกต้องจะทำให้เขาพัฒนาทักษะได้อย่างมีความหมาย ความต้องการของบทนี้ ก็คือต้องการให้นักเรียนได้มาซึ่งทักษะ เป็นการนำไปสู่ความเข้าใจว่าเขากำลังทำอะไรอยู่

ลักษณะอื่น ๆ ของทักษะ ก็คือความเร็วและความแม่นยำ ซึ่งถือว่าเป็นเกณฑ์ของการกระทำ Cronbach (1954) และนักจิตวิทยาการศึกษาคนอื่น ๆ ใช้คำว่า อัตโนมัติ, ทันทีทันใด, แม่นยำและราบเรียบ เป็นการอธิบายทักษะของการกระทำ คำว่า ความเร็ว และความแม่นยำนั้นบอกถึงความสามารถของคน ๆ นั้น ในการยกกำลังสองของ binomial แต่ไม่ได้หมายถึงความรู้ที่ดีของคนใดคนหนึ่งในการยกกำลังสองของ binomial

การที่จะทำสิ่งใดสิ่งหนึ่งให้ดีและรวดเร็วนั้นจำเป็นต้องมีการฝึกหัด เมื่อนักเรียนสามารถเรียนการใช้สูตรสมการกำลังสอง เขาจำเป็นต้องฝึกในการใช้สูตรเพื่อจะแก้ปัญหาสมการกำลังสองด้วยความเร็วและแม่นยำ การสอนทักษะให้ได้ผลนั้นครูต้องเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ฝึกหัด

การแยกแฟคเตอร์ (factoring)

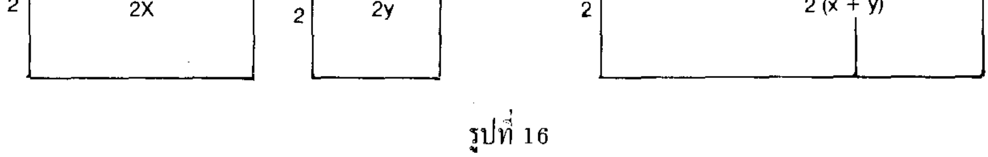
การสอนเกี่ยวกับแฟคเตอร์นั้น ถือว่าเป็นเรื่องสำคัญเรื่องหนึ่งในระดับมัธยมศึกษา ทั้งนี้เพราะว่าแฟคเตอร์เป็นพื้นฐานที่จะต้องนำไปใช้กับเรื่องอื่น ๆ อีกเป็นจำนวนมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งเรื่องของการแก้สมการ ลองพิจารณาปัญหาต่อไปนี้

คนเลี้ยงวัวมีรั้วยาว 100 ฟุต เขาต้องการสร้างรั้วล้อมเป็นคอกวัวเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ลองแนะนำเขาหน่อยซิว่าจะสร้างอย่างไรถึงจะมีพื้นที่มากที่สุด อะไรคือด้านของคอกสัตว์นี้

ในที่นี้เราจะพิจารณาในลักษณะของ polynomial ถ้า x และ y แทนความยาวและความกว้างของสี่เหลี่ยมผืนผ้า ความยาวรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้เท่ากับ 100 เราจะได้ว่า

$$2x + 2y = 100$$

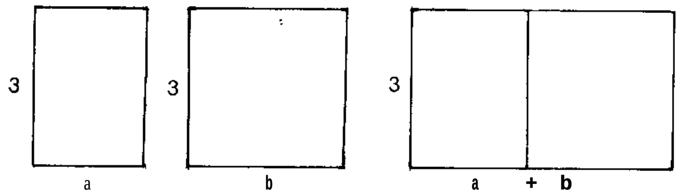
ถ้าเราจะหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้ ก็จะได้เป็นความกว้างคูณกับความยาว หรือ $x \times y$ แต่ถ้าเราจะพิจารณาจาก $2x + 2y$ เราจะได้ว่าพื้นที่ของ $2x$ ก็คือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านกว้าง 2 หน่วย ยาว x หน่วย ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแทนพื้นที่ของ $2y$ ได้ ดังรูป



รูปที่ 16

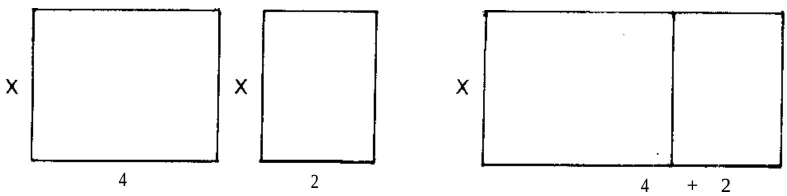
จากรูปทั้งสองนั้นจะพบว่า $2x + 2y = 2(x + y)$ หลังจากให้นักเรียนทำจนเกิดทักษะแล้ว เราอาจเขียนรูปเป็น $a(x + y) = ax + ay$ และนี่คือกฎการกระจายแต่จะไม่ใช่ $2x + 2y \neq 4xy$

รูปที่ 17



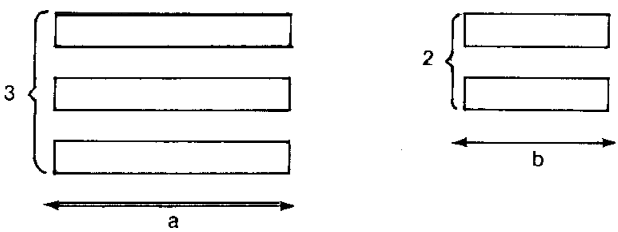
$3a + 3b = 3(a + b)$

รูปที่ 18



$4x + 2x = X(4 + 2) = 6X$

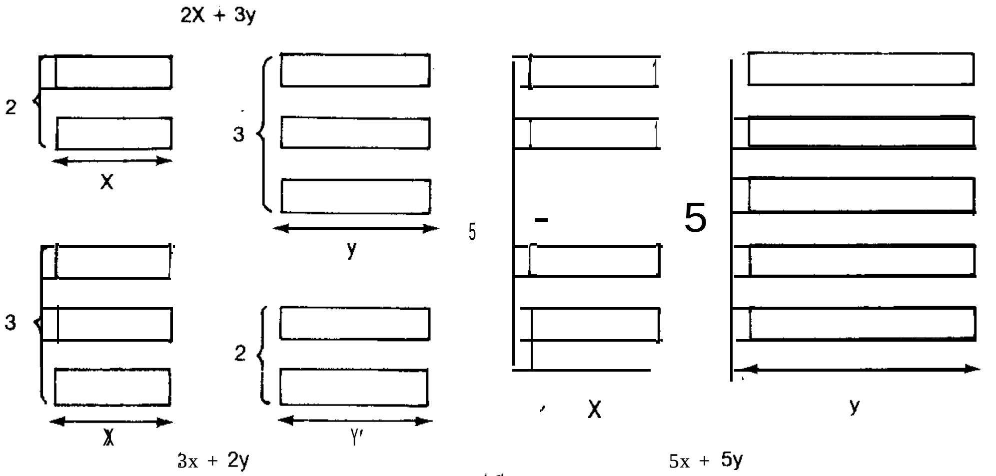
ในกรณีที่เป็น $3a + 2b$ บ่อยครั้งที่พบว่านักเรียนตอบว่าเท่ากับ $5ab$ ถ้าเราจะพิจารณาจากแนวคิดของ Sawyer ว่า



รูปที่ 19

$3a$ นั้นคือวัตถุชนิด a อยู่ 3 ชิ้น ส่วน $2b$ คือวัตถุชนิด b อยู่ 2 ชิ้น ซึ่งวัตถุ a และวัตถุ b นั้น แตกต่างกัน เพราะฉะนั้น $3a + 2b$ จะเท่ากับรูปเดิม

และถ้าเป็น $(2x + 3y) + (3x + 2y) = ?$ เราพิจารณาได้ดังนี้



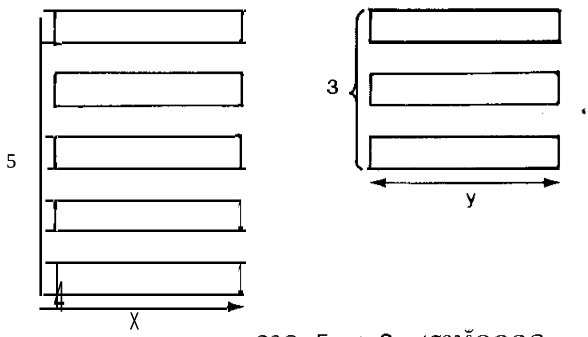
รูปที่ 20

ในกรณีที่เป็นการลบกัน เช่น

(5x + 3y)   (3x + 2y)

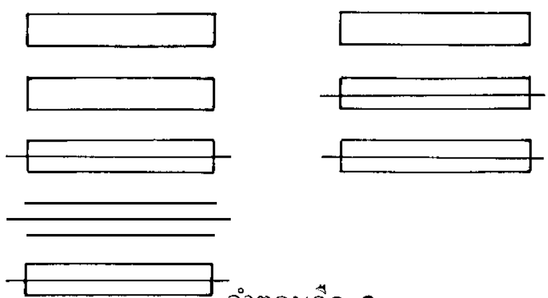
จะแสดงได้ดังนี้

รูปที่ 21



จาก 5x + 3y เราหักออก

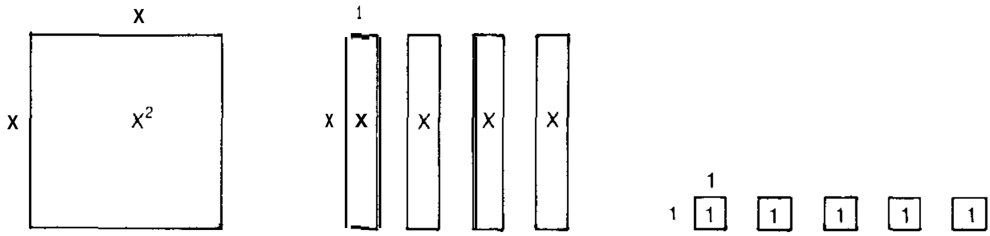
รูปที่ 22



คำตอบคือ 2x + y

ตัวประกอบแบบ trinomials

สำหรับ trinomials แต่ละเทอมนั้นเราแทนด้วยพื้นที่โดยใช้กระดาษบาง ๆ หรือ จะเขียนเป็นรูปก็ได้ ในที่นี้ถ้าเรากำหนด trinomial เป็น $x^2 + 4x - 5$ ซึ่งเราแทนโดย



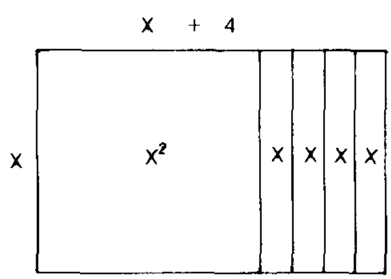
x^2 เราแทนด้วยพื้นของสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีด้านยาว x

4x แทนด้วยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 4 รูปขนาด x คูณ 1

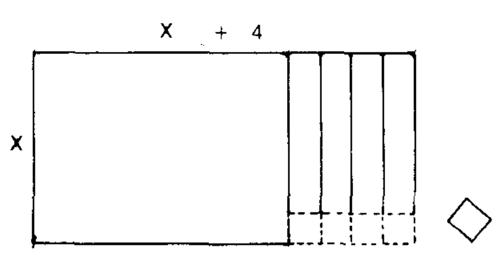
5 แทนด้วยสี่เหลี่ยมจัตุรัส 5 รูปขนาด 1 × 1

รูปที่ 23

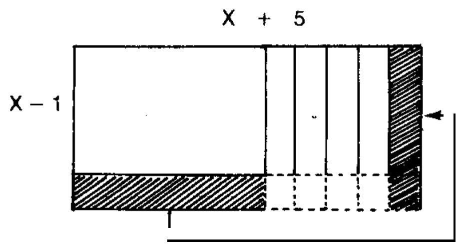
การบวก 2 พจน์ แรกนั้นไม่มีปัญหาสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 24 โดยการเพิ่มรูปสี่เหลี่ยมขนาด x คูณ 1 เข้าไปอีก 4 ชิ้น แต่จะมีปัญหาในพจน์สุดท้ายว่าเราจะลบอย่างไร ? เมื่อพจน์นี้แทนด้วยสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 คูณ 1 ห้าชิ้นด้วยกัน เราจะตัดออกจากส่วนที่เติมไปสี่ชิ้นหลังดังรูปที่ 25 ก็จะตัดออกไป 4 ชิ้น แล้วชิ้นที่ 5 ล่ะ ? เราก็จะตัดบางส่วนออกแล้วนำไปต่อที่ส่วนอื่นเพื่อไม่ให้พื้นที่เสียไป และเราก็จะได้ชิ้นที่ 5 จากส่วนนี้เอง เป็นส่วนที่เราจะตัดออกได้ ตามรูปที่ 26



รูปที่ 24 แสดง $x^2 + 4x$

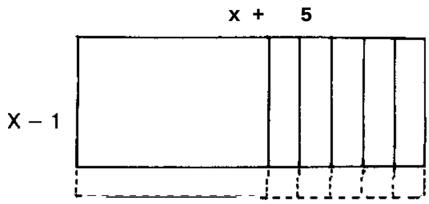


รูปที่ 25



รูปที่ 26

จากรูปที่ 26 เมื่อตัดส่วนที่ไม่ต้องการออกไปแล้ว และจัดรูปใหม่จะได้ตามรูปต่อไปนี้



รูปที่ 27 แสดงพื้นที่ (X + 5) (X – 1)

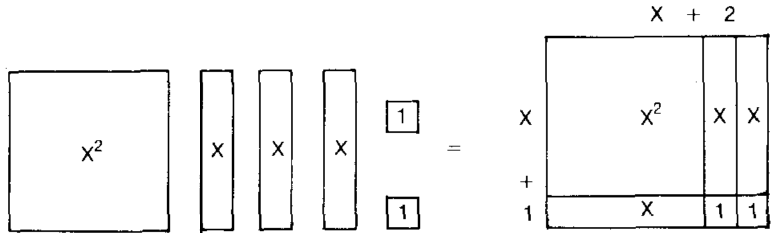
รูปที่ 27 นี้แสดงพื้นที่ของ trinomial $x^2 + 4x - 5$ และพบว่ามีค่าเท่ากับ $(x-1)(x+5)$ นั่นคือเราอาจสรุปได้ว่า

$$x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$$

หรือ กล่าวได้ว่า ตัวประกอบของ $x^2 + 4x - 5$ do $(x - 1)(x - 5)$

เครื่องมือดังกล่าวแล้วนั้นสามารถช่วยให้นักเรียนค้นพบตัวประกอบ ตัวอย่างที่จะเห็นต่อไปนี้ นักเรียนสามารถทำได้ด้วยตัวเอง และเครื่องมือดังกล่าวนั้นจะช่วยให้นักเรียนเห็นทางไปสู่การแยกตัวประกอบ บางครั้งอาจจะยังจัดไม่เรียบร้อย แต่ถ้านักเรียนสังเกตให้ดีก็สามารถพบคำตอบได้ เมื่อนักเรียนเข้าใจวิธีดังกล่าวดีขึ้นแล้ว การแยกตัวประกอบของ trinomial นั้นอาจจะยากขึ้น ๆ เรื่อย ๆ อาจเป็นเครื่องหมายลบเหมือนตัวอย่างที่แล้ว หรือสัมประสิทธิ์ของ x^2 อาจมากกว่า 1

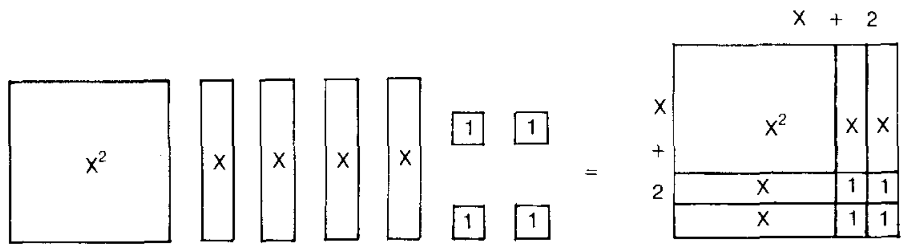
ตัวประกอบของ $x^2 + 3x + 2$



$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

รูปที่ 28

ตัวประกอบของ $x^2 + 4x + 4$



$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2)$$

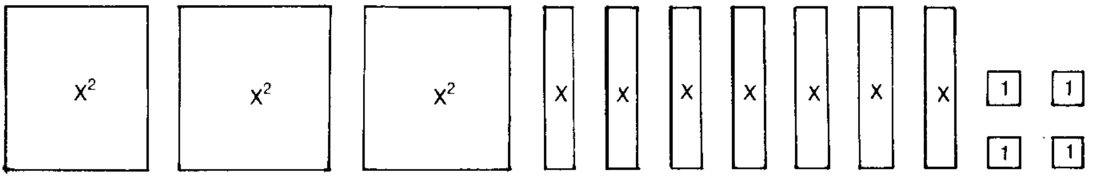
รูปที่ 29

การใช้สื่อการเรียนแบบนี้ไม่เพียงแต่จะช่วยให้นักเรียนสร้างวิธีการของตัวเองเท่านั้น แต่จะได้มาซึ่งทฤษฎีของการแยกตัวประกอบ ไม่มีวิธีการจัดเรียงชิ้นส่วนที่แน่นอน แต่จะแบบใดก็ตามตัวประกอบจะเหมือนกัน เช่น การแยกตัวประกอบของ $x^2 + 3x + 2$ เราอาจจัดได้ตามรูปที่ 31 ถึงแม้การจัดรูปจะเปลี่ยนไป แต่ผลของตัวประกอบจะไม่เปลี่ยนสิ่งที่น่าสนใจในที่นี้ก็คือ เราเริ่มสร้างความเข้าใจของทฤษฎีที่สำคัญ ๆ

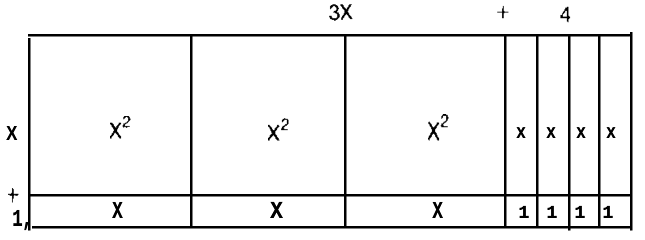
สิ่งที่สำคัญที่สุดก็คือ นักเรียนมีอิสระในการสร้างขบวนการค้นหาด้วยวิธีของเขาเองในการทำคณิตศาสตร์ รูปแบบที่เขาพบนี้จะแนะให้เขาเห็นความหมายของวิธีสร้างโครงสร้างในการหาคำตอบ ไม่เฉพาะแต่ในแบบฝึกหัดที่กำหนดให้เท่านั้นแต่สามารถทำแบบฝึกหัดอื่น ๆ และเมื่อเขาพบรูปแบบแล้ว เขาจะพบคำตอบด้วย

ตัวอย่างการหาตัวประกอบของ

1. $3x^2 + 7x + 4$



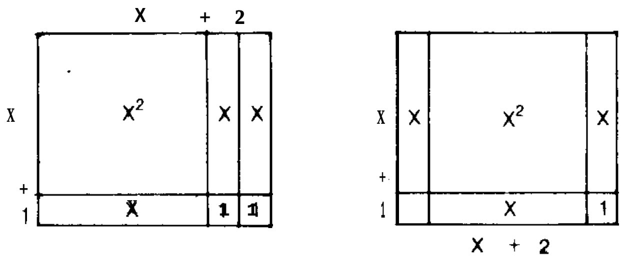
จะได้ว่า



$$3x^2 + 7x + 4 = (3x + 4)(x + 1)$$

รูปที่ 30

2. $x^2 + 3x + 2$ อาจจัดได้ตามรูปต่อไปนี้



ทั้งสองรูปนี้ได้ตัวประกอบเป็น $(x + 1)(x + 2)$ เช่นเดียวกัน

รูปที่ 31