บางครั้งการเดาก็ไม่ประสบความสำเร็จนักสำหรับนักเรียน ครูจะต้องช่วยเหลือเสมอในการตรวจสอบการเดานั้นอย่างละเอียด ก่อนที่จะให้ยอมรับสมมติฐาน นั้น

เดิมนั้นการสรุปทางคณิตศาสตร์บางอย่างอยู่บนพื้นฐานของการให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งเป็นวิธีที่น่าเชื่อถือได้มากที่สุดเพียงวิธีเดียว แต่ต่อมาก็มีวิธีของนิรนัย (deductive) เกิดขึ้น ซึ่งจะได้พิจารณาต่อไป

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นบทเรียนของการค้นพบโดยใช้การคิดให้เป็นรูปนามธรรมและทำให้เกิดรูปทั่ว ๆ ไป และเกี่ยวข้องกับความรู้ของนักเรียนที่ต้องเรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน

บทเรียนที่ 1

การทำให้เป็นรูปทั่ว ๆ ไป เป็นจุดสำคัญของบทนี้ ครูอาจเริ่มบทเรียนโดยการให้นักเรียนหาผลคูณของจำนวนต่อไปนี้

$5 \times 5 = ?$	$8 \times 8 = ?$
$6 \times 4 = ?$	$9 \times 7 = ?$
$7 \times 7 = ?$	$9 \times 9 = ?$
$8 \times 6 = ?$	$10 \times 8 = ?$
$4 \times 4 = ?$	$6 \times 6 = ?$
$3 \times 5 = ?$	$7 \times 5 = ?$

มีรูปแบบในลักษณะนามธรรมของมันหรือยัง ? ถ้านักเรียน "มี" แล้ว ลองพิจารณารูปแบบของมันซิ ถ้านักเรียนได้รูปแบบของมันแล้ว นักเรียนจะสามารถทำ criterion task ต่อไปนี้ได้อย่างรวดเร็ว โดยไม่ต้องมีกระดาษหรือดินสอแม้แต่ชิ้นเดียว

ถ้า $20 \times 20 = 400$ แล้ว $21 \times 19 = ?$

ถ้า $25 \times 25 = 625$ แล้ว $26 \times 24 = ?$

ถ้า $30 \times 30 = 900$ แล้ว $31 \times 29 = ?$

ถ้านักเรียนสามารถตอบคำถามเหล่านี้ได้เรียบร้อยแล้ว (ถ้านักเรียนตอบไม่ได้ครูจะทำอย่างไร ?) ก็ควรถามคำถามต่อไปนี้ต่อไป

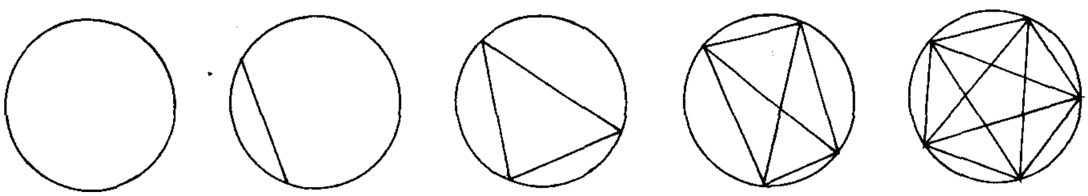
$6 \times 6 = ?$	$7 \times 7 = ?$
$8 \times 4 = ?$	$9 \times 5 = ?$
$8 \times 8 = ?$	$4 \times 4 = ?$
$10 \times 6 = ?$	$6 \times 2 = ?$

ตรวจสอบดูถ้านักเรียนเห็นรูปแบบของตัวอย่างเหล่านี้แล้ว ครูควรถามคำถามต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ครูให้ ดังนั้นในกรณีของการเขียนกราฟ $|x| + |y| = a$ เมื่อ $a > o$ ถ้าเขาสามารถเขียนกราฟ $|x| + |y| = 7\frac{4}{9}$ ได้ถูกต้อง ก็เป็นหลักฐานยืนยันได้ว่านักเรียนสามารถทำเป็นรูปทั่ว ๆ ไปได้ และตัวอย่างรูปทั่ว ๆ ไป คือ $|x| + |y| = a$ เมื่อ $a > o$ โปรดสังเกตว่าตัวอย่างนั้นใช้เป็นแบบทดสอบนักเรียนที่ยังเขียนกราฟได้ไม่รวดเร็ว จนกว่านักเรียนผู้นั้นจะได้ค้นพบรูปแบบเสียก่อน

Wills เรียกตัวอย่างที่นักเรียนสามารถประยุกต์ให้เป็นรูปทั่ว ๆ ไป ซึ่งเป็นสิ่งที่ถูกทำให้ค้นพบว่า "criteriontask" criterion task นี้จะยากพอสมควร ดังนั้นการเขียนกราฟจากตัวอย่างของ $|x| + |y| = a$ เมื่อ $a > o$ และ $|x| + |y| = 7\frac{4}{9}$ จึงเป็น criterion task เพราะว่านักเรียนผู้ซึ่งยังไม่สามารถพบรูปแบบแล้วจะไม่สามารถเขียนกราฟได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง หรือไม่สามารถอธิบายกราฟของสมการนี้ได้ criterion task นี้ ครูสามารถใช้เพื่อแสดงว่านักเรียนเกิดการค้นพบแล้วหรือยัง โดยปกติแล้วงานขั้นนี้ไม่จำเป็นต้องใช้ภาษา และผลสำเร็จของการค้นพบข้อสรุปเป็นรูปทั่ว ๆ ไป นั้นเป็นยุทธวิธีของอุปนัย

การที่จะให้นักเรียนสรุปเป็นรูปทั่ว ๆ ไป ครูจำเป็นต้องแนะนำตัวอย่างให้มากพอที่จะใช้พิจารณานักเรียนจะเห็นแนวทางไปสู่การสรุปเป็นรูปทั่ว ๆ ไปจากตัวอย่างง่าย ๆ ไปก่อนลองพิจารณา จำนวนเนื้อที่ A โดยการลากคอร์ดจากจุดที่กำหนดให้ n จุด บนเส้นรอบวงของวงกลม ตัวอย่างเช่น ถ้า $n = 1$ เราไม่สามารถลากคอร์ดได้ ดังนั้นเนื้อที่จะมีเพียงส่วนเดียว ถ้า $n = 2$ สามารถลากคอร์ดได้ 1 เส้น จะแบ่งเนื้อที่ได้ 2 ส่วน ถ้า $n = 3$ สามารถลากคอร์ดได้ 3 เส้น และมีเนื้อที่อยู่ 4 ส่วน ถ้า $n = 4$ จำนวนเนื้อที่จะเท่ากับ 8 ส่วน ความสัมพันธ์ดังกล่าวดูได้จากรูปต่อไปนี้



รูปที่ 6

ลองเดาความสัมพันธ์ระหว่าง n กับ A ดูซิว่าจะเป็นอย่างไร ? ที่น่าจะเป็นไปได้ก็คือ

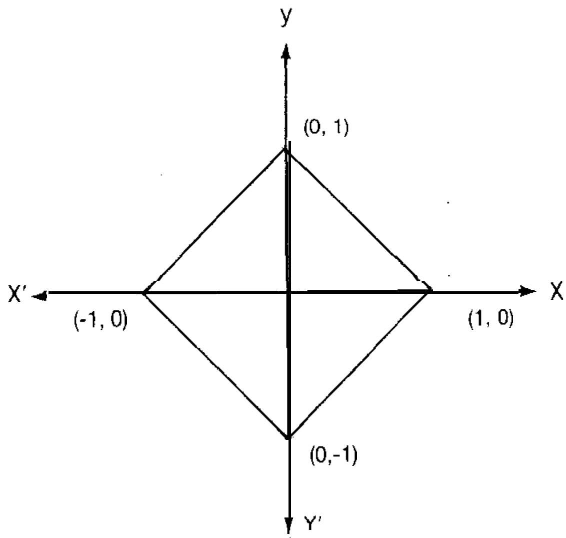
$$A = 2^{n-1} \text{ เมื่อ } n > o$$

เราสามารถพิสูจน์ความจริงได้โดยการแทนค่าสูตร เช่น กำหนดให้ $n = 5$ ปรากฏว่าสูตรของเราใช้ได้ ลองทดสอบดูซิว่าถ้ากำหนดจุดให้ 6 จุด A = ?

ต่อไปนี้จะเป็นแบบฝึกหัดเกี่ยวกับการสร้างแบบนามธรรมกับการสรุปเป็นรูปทั่ว ๆ ไป สมมติว่านักเรียนมีทักษะในการเขียนกราฟแล้ว ครูสามารถถามนักเรียนถึงการเขียนกราฟจากสมการ

$|x| + |x| = 1$

นักเรียนจะพบว่ากราฟนั้นมีลักษณะดังรูปที่ 5 โดยการกำหนดค่าของ x แล้วแทนค่า x เพื่อหาค่า y



รูปที่ 5 กราฟจากสมการ $|x| + |y| = 1$

ครูอาจถามนักเรียนถึงกราฟของสมการ

$|x| + |y| = 2$

ซึ่งอาจใช้แกนคู่เดียวกันเขียนกราฟนี้ แล้วครูก็ถามถึงสมการอื่น ๆ ที่มีลักษณะคล้ายกันด้วย เช่น

$|x| + |y| = 3$

$|x| + |y| = 4$

ถ้านักเรียนมองเห็นรูปแบบในลักษณะนามธรรมแล้ว เขาจะสามารถสร้างกราฟที่มีสมการคล้ายกับสมการ

$|x| + |y| = 7\frac{4}{9}$

ได้อย่างรวดเร็ว ในบางกรณีการสร้างแบบนามธรรมของนักเรียนอาจต้องใช้ภาษาเพื่อทำเป็นรูปทั่ว ๆ ไป ถ้าการทำให้เป็นรูปทั่วไปนั้นถูกต้อง ครูก็จะทราบได้ว่านักเรียนได้ค้นพบสิ่งที่ถูกต้องแล้ว อย่างไรก็ตามการใช้ภาษาไม่จำเป็นนักสำหรับที่จะแสดงว่านักเรียนมองเห็นรูปแบบ การไม่ใช้ภาษาก็สามารถทำให้นักเรียนเข้าใจได้ เช่น การตอบสนองอย่างรวดเร็ว และถูกต้องจาก

ได้ตามรูปแบบดังกล่าวแล้ว

19. $น_8$ 4 = 2 × 2 แต่ 2 ไม่ใช่จำนวนเฉพาะที่เป็นเลขคี่

20. ค. และถ้าครูเลือก 3 กับ 1 ล่ะ เท่ากับ 4 หรือเปล่า ?

21. $น_8$ 1 ก็ยังไม่ใช่จำนวนเฉพาะอีก

22. ค เอาล่ะ แล้ว 6 ล่ะ ? ใครลองดูบ้างแล้ว ?

23. $น_9$ ง่ายมาก 3 บวก 3

24. ค. ใครจะลองพิจารณาว่าความสัมพันธ์ระหว่างเลขคู่กับจำนวนเฉพาะที่เป็นเลขคี่ว่าเป็นอย่างไร ?

25. $น_{10}$ เลขคู่ทุกจำนวนที่มากกว่า 4 จะเท่ากับจำนวนคี่สองจำนวนรวมกัน

26. ค. ดีมาก นี่คือ ประโยคที่มีชื่อเสียงที่เรียกว่า Goldbach's conjecture ถึงแม้ว่านักคณิตศาสตร์จะยังไม่สามารถพิสูจน์มันได้แต่ก็ยังไม่มีใครพบตัวอย่างที่ขัดแย้งกับข้อความเหล่านั้นได้ ด้วยเหตุนี้เราจึงมีเหตุผลพอที่จะเชื่อได้ว่า ประโยคดังกล่าวนั้นเป็นจริง

มีขบวนการอยู่สองขบวนการของแบบฝึกหัดการค้นพบแบบอุปนัย คือ การทำให้เป็นนามธรรมและสร้างกฎเกณฑ์นักเรียนสามารถมองเห็นรูปแบบของนามธรรมนั้นได้ เมื่อเขามองเห็นคุณสมบัติที่เป็นจริงอย่างง่าย ๆ จากกลุ่มของตัวอย่าง การสรุปเป็นรูปทั่ว ๆ ไป จะเกิดขึ้นเมื่อนักเรียนสามารถทำนายความสัมพันธ์ที่เป็นจริงจากตัวอย่างที่ชี้เฉพาะ

จากขบวนการสอนข้างต้น รูปแบบของนามธรรมคือ การใช้ภาษาของ $น_1$ ในการสนทนาลำดับที่ 2 นักเรียนผู้นี้มองเห็นรูปแบบนามธรรมของสมาชิกในเซ็ท 20, 22, 24, 26, 28 ที่ทั้งหมดเป็นเลขคู่และอยู่ในช่วง 20–28 นามธรรมช่วงที่สองที่เป็นภาษาก็คือในการสนทนาลำดับที่ 4 เมื่อนักเรียนสังเกตเห็นคู่ของการบวกที่เป็นจำนวนคี่ และยังมีตอนอื่นอีก ผู้อ่านลองพิจารณาบ้างซิ

การสรุปเป็นรูปทั่ว ๆ ไปจากขบวนการสอนเกิดขึ้นจาก $น_{10}$ ในการสนทนาที่ 25 ซึ่งขยายการสรุปเป็นรูปทั่ว ๆ ไป ของ $น_3$ เกี่ยวกับเซตของเลขคู่ที่มากกว่า 4 นั่นคือ $น_3$ ได้เสนอประโยคว่าจำนวนเลขคู่ที่อยู่ในช่วง 20–28 จะเท่ากับผลบวกของจำนวนเฉพาะสองจำนวน $น_{10}$ ได้มองเห็นรูปทั่ว ๆ ไป โดยมองเห็นเซตอื่น ๆ อีกหลายเซตที่สามารถสรุปในรูปดังกล่าวได้ คือ เซตของเลขคู่ที่มากกว่า 4 อย่างไรก็ดี $\{20, 22, 24, 26, 28\}$ ยังเป็น subset ของ $\{x \mid x > 4$ และ x เป็นจำนวนคู่$\}$

ความ เช่น น่าจะเป็น ดูเหมือนว่าจะมีเหตุผลเพียงพอ เป็นต้น ลองพิจารณายุทธวิธีของการค้นพบต่อไปนี้

1. ค. วันนี้เราลองมาตรวจสอบความสัมพันธ์ที่ท้าทายนักคณิตศาสตร์มาเป็นเวลานาน โดยจะเริ่มจาก การพิจารณาประโยคคณิตศาสตร์ต่อไปนี้

$20 = 17 + 3$

$22 = 19 + 3$

$24 = 17 + 7$

$26 = 13 + 13$

$28 = 17 + 11$

ใครสังเกตเห็นรูปแบบของประโยคเหล่านี้บ้าง ?

2. $น_1$ จำนวนที่อยู่ด้านซ้ายมือทั้งหมดเป็นจำนวนคู่ตั้งแต่ 20–28
3. ค. ใช่แล้ว ด้านขวามือมีการบวกกันอย่างไรบ้าง ?
4. $น_2$ จำนวนที่นำมาบวกกันแต่ละคู่เป็นจำนวนคี่
5. ค. ถูก เราจะพูดในลักษณะอื่นได้อีกหรือไม่สำหรับจำนวนเหล่านั้น นอกจากการเป็นจำนวนคี่แล้ว
6. $น_2$ ได้ ทั้งหมดเป็นจำนวนเฉพาะ
7. ค. ดีมาก มีใครจะเพิ่มเติมข้อสังเกตของ $น_1$ และ $น_2$ บ้างไหม ?
8. $น_3$ จำนวนคู่จากช่วงดังกล่าวเท่ากับจำนวนเฉพาะสองจำนวนรวมกัน
9. ค. เธอคิดว่าสิ่งที่กล่าวมานี้เป็นจริงสำหรับจำนวนคู่ทุกจำนวนหรือไม่ ? $น_4$?
10. $น_4$ ผมยังไม่แน่ใจ
11. ค. ลองดูตัวอย่างอื่น ๆ อีกซิ เช่น 30, 10 หรือ 52
12. $น_5$ $30 = 27 + 3$
13. ค. รูปแบบเหมือนที่กล่าวมาหรือเปล่า ? $น_6$?
14. $น_6$ ไม่เหมือน 27 ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ
15. $น_5$ ถูกแล้ว ผมลืมไป $30 = 17 + 13$
16. ค. แล้ว 10 กับ 52 ล่ะจะเป็นอย่างไร ?
17. $น_7$ $10 = 7 + 3$ และ $52 = 47 + 5$
18. ค. ถูกต้อง ทุกคนลองเลือกจำนวนคู่มาสัก 3 จำนวน แล้วทำเช่นเดียวกับรูปแบบข้างต้น (พักสักครู่หนึ่ง) มีใครพบว่าจำนวนคู่จำนวนใดบ้างที่ไม่สามารถเขียน

28. ค. เอาละ ลองดูอีกตัวอย่างซิ (ตัวอย่าง $2^3 \times 2^4 \times 2^2 \times 2^7$ ซึ่งจะทำในทำนองเดียวกันกับที่ผ่านมา และ $a^4 \times a^2 \times a^3 \times a = a^{10}$ อย่าลืมว่า $a = a^1$)

29. ค. ดังนั้นเราสามารถตั้งกฎการคูณจำนวนที่ยกกำลังและมีฐานเหมือนกันได้แต่อย่าลืมว่าฐานจะต้องเท่ากันให้บวกกำลังเข้าด้วยกัน และเขียนผลลัพธ์การคูณโดยเขียนฐานเป็นฐานเดิม และยกกำลังเท่ากับผลบวกของเลขยกกำลังนั้น มีคำถามไหม ? สำหรับพรุ่งนี้ ทำแบบฝึกหัดชุดที่ 1 ถึงข้อ 30 ควรจะทำทุกข้อ และเขียนคำตอบให้ถูกต้อง

จากวิธีข้างต้น เรามาดูซิว่า ครูมีวิธีใช้ภาษาอย่างไร ? ในคำถามแรกนั้นครูจะรวบรวมเรื่องที่จะอธิบายไว้ก่อน เช่น จะคูณเลขยกกำลังได้อย่างไร ? ครูจะเริ่มตั้งจุดมุ่งหมายของการเรียนเพื่อค้นหากฎเกณฑ์ หรือ หลักการสำหรับหาผลคูณของเลขยกกำลังเมื่อกำหนดฐานให้ ดังนั้นครูจะต้องหาแนวทางอธิบายเพื่อนำไปสู่สูตร ($2^2 \times 2^3 = 2^5$) โดยเริ่มจากประโยคที่ 3 ของการสนทนาช่วงแรก และสรุปจากการสนทนาในลำดับที่ 11 การสรุปคำถามจากการสนทนาลำดับที่ 11 นั้น ให้เด็กได้สนใจความสัมพันธ์ของตัวแปร และนำไปสู่กฎเกณฑ์วงจรที่ทำซ้ำ ๆ กัน เช่น $2^2 \times 2^3 = 2^5$ และ $10^4 \times 10^5$ และเปลี่ยนเป็นลักษณะของตัวแปรแทนว่า $a^m \times a^n = a^{m+n}$

รูปทั่ว ๆ ไปได้แสดงให้เห็นเป็นสูตร ซึ่งมีทั้งภาษาพูดและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ในการสนทนาลำดับที่ 26 ครูได้ชี้ให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของตัวประกอบและเงื่อนไขที่จำเป็นคือฐานเหมือนกัน ครูยังแนะนำจากตัวอย่าง $2^3 \times 2^4 \times 2^2 \times 2^7 = 2^{16}$ และแนะในลักษณะรูปทั่ว ๆ ไปเป็น $a^4 \times a^2 \times a^3 \times a = a^{10}$ เพื่อให้ขยายสิ่งที่ค้นพบนั้นให้กว้างขวางยิ่งขึ้นท้ายที่สุดคือการสั่งการบ้าน เพื่อให้การเรียนสามารถนำกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ไปใช้ นั่นเป็นการเสริมแรงในการเรียนรู้

ยุทธวิธีการสอนโดยการค้นพบแบบอุปนัย (Inductive discovery strategy)

ครูคณิตศาสตร์สามารถใช้ยุทธวิธีการสอนโดยการค้นพบได้ 2 แบบ คือ วิธีอุปนัย (inductive) และนิรนัย (deductive) ในตอนนี้จะพูดถึงยุทธวิธีของอุปนัยและแสดงตัวอย่างการใช้ยุทธวิธีนี้ข้อความของอุปนัยนั้นมี 2 ส่วนด้วยกัน ส่วนแรกคือส่วนที่สนับสนุน ข้อสรุปข้อความที่สนับสนุนนี้จะน่าเชื่อถือมากหรือน้อยนั้นขึ้นอยู่กับธรรมชาติของหลักฐานต่าง ๆ นั้น และส่วนที่สองคือข้อสรุป ตัวอย่างเช่น เป็นความจริงที่ 3, 5, 7, 11 และ 13 ต่างก็เป็นจำนวนเฉพาะ (primary numbers) มีหลักอยู่ว่าจำนวนเฉพาะทุกจำนวนเป็นจำนวนคี่ แต่เราไม่มีทางที่จะพิสูจน์ได้ ทางหนึ่งที่จะสรุปเป็นหลักเกณฑ์ก็คือ วิธีของอุปนัย จากตัวอย่างดังกล่าวจะไม่สามารถพิสูจน์หลักเกณฑ์ของข้อสรุปได้ ดังนั้นข้อสรุปส่วนใหญ่ของวิธีอุปนัย จะกำหนดเป็นคำ หรือ ข้อ

13. ค. มันคือผลบวกของเลขชี้กำลัง นั่นคือ ผลคูณของเลขยกกำลังจะเท่ากับผลบวกของเลขยกกำลังของจำนวนที่คูณกันนั้น ลองดูตัวอย่างอื่น เช่น $3^3 \times 3^5$ว่าเท่ากับเท่าไร ? (จะใช้วิธีการเช่นเดียวกับชุดแรกตั้งแต่1–12)

14. ค. นั่นคือถ้าเรามีเลขยกกำลังคูณกันผลคูณจะเท่ากับ ผลบวกของเลขยกกำลังของจำนวนที่คูณกันนั้น ลองคิดดูซิว่าจริงไหม ? สำหรับ $10^4 \times 10^5$ ลองคิดในเศษกระดาษซิแล้วครูก็เดินดูไปทั่ว ๆ ว่าครูพบอะไรจากสิ่งที่ครูทำไป ลองทำ $a^5 \times a^4$ บนกระดานให้นักเรียนช่วยทำจะได้ว่า $a^5 \times a^4 = a^9$ ลองคิดซิว่า a ใช้แทนอะไร ? น$_4$?

15. น.$_4$ จำนวน ๆ หนึ่ง

16. ค. จำนวน จำนวนใดจำนวนหนึ่งใช่ไหม ?

17. น$_4$ ไม่ใช่ เป็นจำนวนทั่ว ๆ ไป

18. ค. ถูกต้อง ทุกจำนวน เราทราบเกี่ยวกับอะไรบ้าง ? ใครสามารถบอกกฎของการคูณของเลขยกกำลังที่ถูกต้องได้ ? มีไหม ?

19. น$_5$ เรานำกำลังไปบวกกัน

20. ค. ใช่แล้ว นั่นคือรูปทั่ว ๆ ไป ดังนั้นกฎการคูณกันที่ถูกต้องจะว่าอย่างไร ? ถ้าเราจะคูณเลขยกกำลังที่มีฐานเหมือนกัน ? ใครสามารถตอบได้ ? น$_1$?

21. น$_1$ ถ้าเราจะคูณเลขยกกำลังสองจำนวนให้นำกำลังของทั้งสองจำนวนรวมกัน

22. ค. แต่เธอไม่ได้บอกว่าเราจะเขียนผลลัพธ์ได้อย่างไร ? และผลลัพธ์เป็นเท่าไร ?

23. น$_4$ เขียนบนฐานของจำนวนที่คูณกัน และนำกำลังมาบวกกัน

24. ค. ครูคิดว่าเธอคงได้รับความรู้ว่าเราจะได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไรเมื่อนำจำนวนที่ยกกำลังมีฐานเหมือนกันมาคูณกัน แต่อย่าลืมว่าจะต้องเป็นจำนวนที่มีฐานเหมือนกันนะ และ ถ้าเป็น $3^2 \times 2^3$ อย่างนี้จะคูณกันไม่ได้ เพราะอะไร ?

25. น$_5$ เพราะฐานไม่เหมือนกัน

26. ค. ถูกต้อง การคูณจำนวนที่ยกกำลังที่มีฐานเหมือนกัน 2 จำนวน ให้เขียนฐานเดิมและยกกำลังเท่ากับผลบวกของเลขยกกำลังของสองจำนวนนั้นเช่น $a^m \times a^n = a^{m+n}$ เธอคิดว่ากฎของเราเป็นจริงสำหรับการคูณเลขยกกำลังที่มากกว่าสองจำนวน เช่น 3 หรือ 5 จำนวน หรือหลาย ๆ จำนวนหรือไม่ ? น$_5$?

27. น$_5$ ใช่

$$x^2 + (x + 1) + (x \times 1) + 1 \quad = \quad x^2 + x + x + 1$$
$$= \quad x^2 + 2x + 1$$

แต่ถ้าพิจารณาจากความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมคือ $x + 1$
เพราะฉะนั้นพื้นที่ของสี่เหลี่ยมรูปที่ 2 คือ $(x + 1) \times (x + 1) = (x + 1)^2$

นั่นคือ $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

ผู้อ่านลองพิจารณารูปที่ 3, 4 และรูปอื่นที่มีเงื่อนไขดังกล่าวแล้วดูบ้างเพื่อนำไปสู่รูปแบบทั่ว ๆ ไปของการยกกำลังสองของ binomial

ลองพิจารณาแนวทางการสอนในห้องเรียนที่เตรียมไว้ข้างล่างนี้ซึ่งเป็นเนื้อหาของพีช-คณิตของนักเรียนที่เริ่มเรียน concept ของเลขยกกำลังฐานและกำลังบวก การกลับกำลังและการคำนวณหากำลังว่าเรามีวิธีการทำอย่างไร

1. ค. เราจะมาดูกันถึงการคูณกันของเลขยกกำลัง และเราจะค้นหากฎของการคูณกันของเลขยกกำลังนี้ เช่น $2^2 . 2^3$ ลองหาผลคูณซิ และ 2^2 หมายความว่าอย่างไร ?
2. น$_1$ สองยกกำลังสอง
3. ค. ใช่ และหมายความว่าอย่างไร ? เราจะหาค่าของ 2^2 ได้อย่างไร ?
4. น$_1$ สองคูณกันสองครั้ง
5. ค. ถูกต้อง ดังนั้น 2^2 ครูอาจเขียนเป็น 2×2 และ 2^3 หมายความว่าอย่างไร ? น$_2$?
6. น$_2$ สองยกกำลังสาม
7. ค. หมายความว่าอย่างไร ? น$_2$?
8. น$_2$ สองคูณสองคูณสอง
9. ค. ใช่แล้ว ดังนั้น 2^3 คือ $2 \times 2 \times 2$ เพราะฉะนั้น $2^2 \times 2^3$

   $= (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

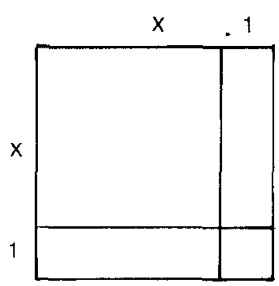
   ลองดูผลลัพธ์สุดท้าย ดูซิว่าเขามีตัวประกอบ 2 อยู่กี่ตัว ? นับซิ ? และเราจะเขียนให้อยู่ในรูปของเลขยกกำลังได้อย่างไร ? ชี้ไปที่นักเรียน น$_3$
10. น$_3$ สองยกกำลังห้า
11. ค. ถูกต้อง เพราะฉะนั้น

    $2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2^5$

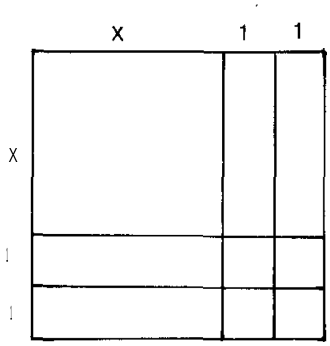
    ใครมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างเลขยกกำลัง ? และชี้ไปที่ 2 และ 3 น$_3$
12. น$_3$ ผลบวกของเลขชี้กำลัง

มีรายงานหลายฉบับสนับสนุนให้ใช้วิธีการของการค้นพบ (discovery method) และแนะให้ครูใช้ยุทธวิธีการสอนโดยให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการเรียนการสอนให้มากขึ้นและยังมีสถาบันอีกหลายแห่งพัฒนาสื่อการสอนคณิตศาสตร์เพื่อใช้กับการเรียนแบบค้นพบนี้

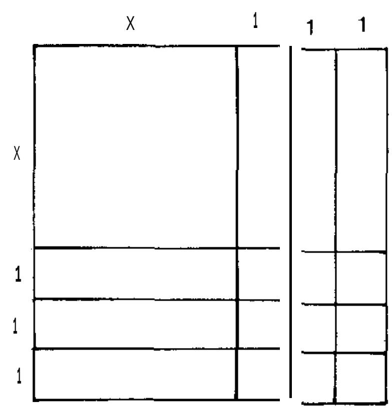
ถึงแม้คำว่า discovery กับ guided discovery ที่ใช้นี้มีความหมายไม่เหมือนกันทีเดียว แต่ในความเห็นของ Jerome Bruner คิดว่า การค้นพบนั้นเป็นขบวนการ เป็นแนวทางที่จะเข้าถึงปัญหามากกว่าที่จะเป็นผลลัพธ์ที่ได้ หรือเป็นข้อสำคัญของความรู้และเขายังคิดว่าขบวนการแห่งการค้นพบจะทำให้สามารถจัดเป็นหลักการ หรือจัดเป็นรูปทั่ว ๆ ไปได้จากการฝึกหัดแก้ปัญหา ฝึกศึกษารูปแบบต่าง ๆ และทดสอบสมมติฐาน Bruner คิดว่าการเรียนโดยการค้นพบนั้นก็คือการเรียนเพื่อให้ค้นได้ และการสอนให้เกิดการค้นพบนั้นควรให้นักเรียนได้เผชิญกับปัญหา หรือ สร้างสถานการณ์ต่าง ๆ ให้นักเรียนได้หาแนวทางในการแก้ปัญหา เช่นการยกกำลังสองของ binomial จะใช้แผ่นไม้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีด้านยาว x หน่วย ไม้กระดานที่ยาว x หน่วยกว้าง 1 หน่วย และไม้กระดานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านยาว 1 หน่วย ให้นักเรียนสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ใหญ่กว่าเดิม โดยใช้กระดานขนาด $x \times x$, $x \times 1$ และ 1×1 เท่าที่จำเป็น ผลลัพธ์ที่ได้บางแบบแสดงไว้ในรูปที่ 2, 3, 4 โดยหวังไว้ว่าประสบการณ์ของนักเรียนจะสามารถนำไปสู่รูปทั่ว ๆ ไป ของการยกกำลังสองของ binomial และเขาจะได้มาซึ่งหลักการในการแก้ปัญหา ถ้าเขาได้รับประสบการณ์คล้าย ๆ กับ ที่ได้กล่าวมาแล้วนี้



รูปที่ 2



รูปที่ 3



รูปที่ 4

จากรูปที่ 2 จะพบว่ามีกระดานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ขนาด $x \times x$ อยู่ 1 แผ่นกระดานขนาด $x \times 1$ อยู่ 2 แผ่น และกระดานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 1×1 อยู่อีก 1 แผ่น เพราะฉะนั้นพื้นที่ทั้งหมดคือ

1. ครูกำหนดปัญหาหรือให้ผู้เรียนกำหนดปัญหาเอง
2. กระตุ้นและช่วยให้ผู้เรียนหาข้อมูลที่สัมพันธ์กับปัญหา
3. ให้เวลาแก่ผู้เรียนในการค้นคิด
4. เมื่อผู้เรียนมองเห็นคำตอบให้ผู้เรียนสร้างสมมติฐานขึ้น
5. ทดสอบสมมติฐานที่ตั้งขึ้นนั้น

จะเห็นว่ากระบวนการของการค้นพบนั้นผู้เรียนต้องเป็นผู้สร้างขึ้นเองทั้ง concept และกฎเกณฑ์ โดยการปฏิบัติด้วยตัวเอง และใช้กระบวนการทางสมอง เช่น การสังเกต การทำนาย การอ้างอิง การจัดกลุ่ม เป็นต้น

การสอนโดยวิธีนี้เหมาะสำหรับการสอนเรื่องใหม่ให้กับผู้เรียนเพื่อต้องการให้ผู้เรียนได้ค้นพบความรู้ใหม่ ๆ กฎเกณฑ์หรือสูตรด้วยตนเอง จึงไม่จำเป็นต้องใช้วิธีสอนแบบนี้ทุกชั่วโมง

การสอนคณิตศาสตร์โดยใช้หลักของ guided discovery

ได้กล่าวมาแล้วว่าการสอนโดยการค้นพบนั้นเป็นวิธีการที่เก่าแก่ซึ่งได้เผยแพร่มาสู่เราโดย เพลโต (Plato) นักเรียนจะไปสู่ข้อสรุปของความรู้ได้จากคำถามของครูที่ถูกเรียบเรียงไว้อย่างดีแล้ว ข้อโต้ตอบต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นถึงยุทธวิธีของครูที่จะแนะนักเรียนให้พบความจริงที่ว่า a ยกกำลัง ศูนย์ มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ a ไม่เท่ากับ ศูนย์ ($a^0 = 1, a \neq 0$)

ค. เราทราบอะไรเกี่ยวกับการหารจำนวนที่ไม่ใช่ศูนย์ด้วยตัวของมันเองบ้าง ?

น. ได้ค่าเท่ากับ 1

ค. ถ้า a^m หารด้วย a^m จะได้ค่าเท่าไร ? ถ้า $a \neq 0$

น. ก็เท่ากับ 1 เช่นกัน

ค. ถ้าเรานำกฎการยกกำลังมาใช้กับกรณีของ a^m หารด้วย a^m แล้วผลลัพธ์จะเป็นอย่างไร

น. ผลลัพธ์น่าจะเป็น a^{m-m} หรือ a^0

ค. ถูกต้อง ดังนั้นเราจะนิยามค่าของ a^0 อย่างสมเหตุสมผลได้อย่างไร ?

น. a^0 น่าจะเท่ากับ 1

Concept ของ guided discovery

หนังสือเล่มแรกที่ใช้เทคนิคของการค้นพบเป็นหนังสือเลขคณิตซึ่งเขียนโดย Warren Colburn พิมพ์ในปี 1821 หนังสือนี้ใช้คำถามที่จัดไว้สำหรับพัฒนา concept และหลักเกณฑ์ต่าง ๆ ของคณิตศาสตร์ คล้ายกับวิธีของโซเครตีส (Socratic method) หมายความว่าคำถามที่เขาใช้ถามนั้นสามารถทำให้เด็กตอบได้ตั้งแต่ตอนแรก ๆ

1. ทำให้ผู้เรียนแกร่งทางสติปัญญา (intellectual potency) เพราะผู้เรียนได้ใช้สติปัญญาในการเรียนรู้ และพัฒนาความคิดด้วยตนเอง

2. ทำให้เกิดแรงจูงใจทั้งภายในและภายนอก ผลเนื่องจากการประสบความสำเร็จในการค้นพบทำให้ผู้เรียนเกิดความพึงพอใจในการกระทำเกิดแรงจูงใจที่จะเรียนต่อไปอีก แรงจูงใจภายนอกเกิดจากการให้ของครูและถ้าครูจะให้ผู้เรียนชื่นชอบในการเรียนรู้ ครูจะต้องสร้างบทเรียนที่จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดแรงจูงใจภายใน

3. ผู้เรียนได้เรียนรู้ขบวนการค้นพบ (Learning the Hueristics of Discovery) การที่ผู้เรียนจะเรียนรู้เทคนิคการค้นพบได้นั้น ผู้เรียนต้องได้รับโอกาสที่จะทำการค้นพบ เพื่อจะได้เรียนรู้วิธีการรวบรวมและสอบสวนเองอย่างช้า ๆ

4. ผู้เรียนจำความรู้ได้นาน (Conservation of memory) เมื่อผู้เรียนได้รับการเรียนรู้ด้วยตนเอง ผู้เรียนจะจำความรู้นั้นได้นาน

เทคนิคการกระตุ้นให้เกิดการเรียนแบบค้นพบ

Bruner เสนอเทคนิคการกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้แบบค้นพบ 4 ประการ คือ

1. เน้นความแตกต่าง (emphasizing contrast) เพื่อให้ผู้เรียนมีเรื่องที่จะอภิปรายได้มาก

2. กระตุ้นให้มีการเดาและหาเหตุผล (stimulating informed guessing) แล้วจึงอธิบายเพื่อให้ข้อมูลที่ถูกต้อง

3. กระตุ้นให้มีส่วนร่วมในกิจกรรม (encouraging participation) โดยใช้กิจกรรมที่จะช่วยให้ผู้เรียนทุกคนมีส่วนร่วมให้มากที่สุด

4. กระตุ้นให้มีความถี่ถ้วนรอบคอบ (stimulating awareness) โดยให้ผู้เรียนอ่านหนังสือประเภทนักสืบ ตลอดจนจัดให้สังเกตและวิเคราะห์กระบวนการแก้ปัญหาสิ่งที่ลึกลับต่าง ๆ

Wallas อธิบายขั้นตอนของขบวนการค้นพบไว้ 4 ประการ คือ

1. ขั้นเตรียม (Preparation) คือ การรวบรวมความรู้ ประมวลความคิดและประสบการณ์ของปัญหานั้น ๆ

2. ขั้นสำรวจ (Incubation) คือ การใช้ความคิดต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาซึ่งบางครั้งเกิดขึ้นโดยไม่รู้ตัว

3. ขั้นแก้ปัญหา (Illumination) คือ การคิดตอบปัญหานั้นได้เป็น “Aha ! experience”

4. ขั้นทดสอบ (Verification) คือ การทดสอบคำตอบที่ได้นั้นว่าถูกต้องหรือไม่

ขั้นตอนเหล่านี้จะช่วยสร้างขบวนการเรียนรู้ที่จะช่วยให้ผู้เรียนทำการค้นพบได้โดย

กลุ่ม Cognitive Field Theory เป็นผู้มีบทบาทมากสำหรับการสอนแบบนี้ โดยเขาเห็นว่าในการสอนนั้นครูควรให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกระบวนการต่าง ๆ ที่จะก่อให้เกิดการเรียนรู้ ครูต้องสอนเนื้อหาวิชาเพื่อให้ผู้เรียนคิดอย่างมีเหตุผล ให้ได้มีส่วนร่วมในการแสวงหาความรู้ นอกจากนี้ยังต้องให้หลักเกณฑ์อันเป็นแนวทางที่จะแก้ปัญหาได้ แต่มิใช่ให้คำตอบ วิธีการนี้เรียกว่า guided discovery

Trafton ให้ความหมายของการเรียนโดยการค้นพบว่าเป็นการแนะให้ผู้เรียนได้ค้นพบหลักการทางคณิตศาสตร์ด้วยตัวเอง โดยการช่วยให้ผู้เรียนใช้ความรู้ที่มีอยู่แล้วเป็นแนวทางในการคิดเพื่อให้เกิดความรู้ใหม่ การสอนวิธีนี้ยึดตัวผู้เรียนเป็นหลัก ครูเป็นแต่เพียงช่วยแนะผู้เรียนให้เชื่อมโยงความคิดใหม่ ๆ เข้ากับสิ่งที่เขาได้สะสมไว้จากประสบการณ์เท่านั้น

การสอนโดยวิธีค้นพบนี้ ถ้าจะเริ่มด้วยวิธีตั้งคำถามครูจะต้องทำโครงร่างของคำถาม หรือแบบฝึกหัดสำหรับทดลอง อาจเริ่มบทเรียนด้วยการแนะนำเพื่อผู้เรียนจะได้มีแนวคิดที่แน่ชัดว่าเขาต้องสำรวจอะไร เมื่อครูได้เสนอปัญหาแก่ผู้เรียนแล้วควรกระตุ้นให้เกิดการคิดโดยการถามคำถามแบบปลายเปิด คอยให้กำลังใจหรือเสริมแรงแก่ผู้เรียน เช่น อาจกล่าวว่า เป็นความคิดที่ใช้ได้ทีเดียว ลองพยายามอีกนิดซิ ถูกต้องแล้ว ลองคิดต่อซิว่า............เป็นต้น

แบบของคำถามที่ใช้สอนให้นักเรียนค้นพบ

- มานิตย์ลองบอกสิ่งที่สังเกตเห็นให้ครูฟังซิ
- ยกตัวอย่างให้ครูดูอีกตัวอย่างซิ
- มาลีคิดว่าถูกไหม ลองพิจารณาตัวเลขอื่นบ้างซิ
- ใครทราบบ้างว่าทำไมกฎที่รุ่งฤดีใช้จึงไม่ถูกต้อง
- ทำไมสุเทพกับธานินทร์จึงตอบไม่เหมือนกัน
- ใครได้คำตอบเหมือนดาวใจบ้าง
- ดังนั้นเราจะสรุปหลักเกณฑ์เกี่ยวกับเรื่องนี้ว่าอย่างไร เป็นต้น

ลักษณะของคำถามควรเป็นดังนี้

- เป็นคำถามที่ถามแล้วนักเรียนอยากคิดต่อ
- คำถามต้องเป็นตัวเสริมแรง (reinforcer)
- คำถามต้องชัดเจน ตรงจุดที่อยากทราบ ใช้ภาษารัดกุม ส่งเสริมให้ครูและผู้เรียนเกิด interaction ร่วมกัน

Bruner ให้เหตุผลในการจัดการเรียนการสอนโดยวิธีค้นพบว่า วิธีนี้จะเกิดผลดี 4 ประการ คือ

2. การสอนด้วยวิธีสืบสวนสอบสวน (Inquiry Approach) นักจิตวิทยากลุ่ม Cognitive Field Theory มีความคิดว่าในการสอนแก้ปัญหานั้นต้องใช้วิธีการของ inquiry เพื่อกระตุ้นให้เกิดการเรียนรู้โดยวิธีค้นพบ Suchman กล่าวว่า inquiry approach จะใช้ประโยชน์ได้อย่างเต็มที่เมื่อครูช่วยผู้เรียนกำหนดปัญหาซึ่งประกอบด้วยโครงสร้างที่สมเหตุสมผลเพื่อนำไปสู่การค้นพบใหม่ ดังนั้น inquiry training จึงเป็นส่วนหนึ่งที่สำคัญของการศึกษาสำหรับทุกคน เพราะสอนให้คนรู้จักคิด รู้จักแก้ปัญหาและก่อให้เกิดการถ่ายโยงการเรียนรู้ได้ในที่สุด

ขั้นตอนของ inquiry approach ประกอบด้วย

1. **ขั้นเตรียม** ครูเป็นผู้เสนอปัญหาหรือกระตุ้นให้นักเรียนตั้งปัญหาด้วยตนเอง และอาจให้ตั้งสมมติฐานด้วย

2. **ขั้นสำรวจ** กระตุ้นให้ผู้เรียนหาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหา เช่น จากหนังสืออ้างอิงหาจากห้องสมุด ตลอดจนการใช้คำถาม

3. **ขั้นแก้ปัญหา** เมื่อคิดคำตอบได้ต้องให้ผู้เรียนเขียนวิธีแก้ปัญหานี้ด้วยตนเอง

4. **ขั้นทดสอบ** โดยการติดตามผลนอกห้องเรียน สังเกตผู้เรียนว่าสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้หรือไม่ ถ้าสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้แสดงว่าเกิดการถ่ายโยงการเรียนรู้อันเป็นขบวนการที่สำคัญของการสอนวิธีนี้

Inquiry approach เป็นวิธีการกระตุ้นผู้เรียนให้เกิดการเรียนรู้แบบค้นพบเพื่อการแก้ปัญหาซึ่งอาจเป็นคำถามหรือข้อความที่มีลักษณะเร้าความสนใจของผู้เรียนแล้วให้ผู้เรียนแสวงหาคำตอบเอง

การสอนเพื่อให้เกิดการเรียนรู้แบบ inquiry มีขบวนการดังนี้

1. สอน verbal association, concept และ principle ซึ่งเป็น background ที่สำคัญในการแสวงหาความรู้

2. สร้างบรรยากาศที่จะช่วยกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดความรู้สึกอิสระในการที่จะซักถาม

3. กระตุ้นให้ผู้เรียนแสดงความคิดเห็น

4. กระตุ้นให้ผู้เรียนมีการเดา และวิเคราะห์คำตอบ

5. สอนเทคนิคในการแก้ปัญหาหรือการใช้ inquiry คือ เตรียมสำรวจแก้ปัญหาและทดสอบ

6. คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล

วิธีการเรียนการสอนแบบ inquiry ใช่ว่าจะใช้ได้กับเด็กทุกคน เด็กที่มีพัฒนาการทางสติปัญญาต่ำกว่าขั้น Formal Operation ของ Piaget จะใช้วิธีการเรียนแบบ inquiry ได้ยาก เพราะ

วิธีการของ inquiry เกี่ยวข้องกับวิธีคิดแบบนามธรรม และเด็กที่มี I.Q. ต่ำก็จะใช้วิธีนี้ไม่ได้ผลเช่นกัน

มีผู้เข้าใจผิดอยู่เสมอว่า Inquiry Approach เป็นวิธีการสอนวิทยาศาสตร์ส่วน Discovery Technique นั้นใช้สอนคณิตศาสตร์ แท้ที่จริงแล้ว inquiry approach ปืนวิธีการหนึ่งของการสอน basic cognition skills อันเป็นเรื่องสำคัญในการพัฒนาสติปัญญาของผู้เรียนเช่นเดียวกับการอ่านและเลขคณิต inquiry approach อยู่ใน program และหลักสูตรของทุกสาขาวิชาที่ต้องอาศัยการสังเกต การให้เหตุผล การสรุปกฎเกณฑ์ และการทดสอบ สมมติฐาน เราใช้การถามตอบในกรณีที่ผู้เรียนไม่อาจหาประสบการณ์และวิธีการค้นหาข้อมูล ได้จากแหล่งอื่นนอกห้องเรียน ซึ่งวิธีการนี้นำมาใช้อย่างแพร่หลายในประเทศไทย จนทำให้เข้าใจกันว่า inquiry approach คือขบวนการใช้คำถามคำตอบเพื่อนำไปสู่การค้นพบและแก้ปัญหาในที่สุดเท่านั้น

ลักษณะหัวข้อที่จะใช้ discovery technique และ Inquiry approach ได้มีลักษณะดังนี้

1. มีลักษณะเป็น concept หรือ principle โดยผู้เรียนจะใช้วิธีการของ discovery และ inquiry รวบรวม concept และ priciple เหล่านั้นได้ เช่น กฎต่าง ๆ ของระบบจำนวนเป็นต้น
2. หัวข้อเรื่องที่ไม่ใช่นิยาม การกำหนดความหมาย ชื่อสัญลักษณ์
3. หัวข้อที่ไม่เกี่ยวข้องกับวิธีการใช้อุปกรณ์ต่าง ๆ

สรุป

อย่างไรก็ตาม Bruner ให้ความเห็นว่า inquiry นั้นเป็นเพียงส่วนหนึ่งที่ทำให้เกิด discovery และ discovery นั้นไม่จำเป็นต้องมาจาก inquiry เสมอไป อาจมาจากวิธีอื่นก็ได้

การสอน discovery นั้น หัวข้อที่จะสอนต้องเป็นหน่วยหรือมีโครงสร้าง ดังนั้นวิธีนี้จึงใช้กับคณิตศาสตร์ได้ เพราะคณิตศาสตร์มีโครงสร้างหลักสูตรคณิตศาสตร์ของเราทั้งในระดับประถมและมัธยม เน้นการใช้เทคนิคของ discovery

ปัจจุบันถือว่า discovery technique เป็นขบวนการของการเรียน (learning) และ inquiry approach เป็นขบวนการของการสอน

3. วิธีฮิวริสติค (Hueristic Method) เป็นวิธีสอนอีกแบบหนึ่ง ซึ่งครูจะป้อนปัญหาชุดหนึ่งให้กับผู้เรียนเพื่อหาคำตอบ โดยที่ผู้เรียนจะสร้าง concept และกฎเกณฑ์ด้วยตัวเอง การสอนแบบนี้มีวิธีการคล้ายคลึงกับคำแนะนำที่ใช้ในห้องปฏิบัติการวิทยาศาสตร์ คือสั่งให้ทำแล้ว สังเกตผลลัพธ์ที่ได้ แล้วนำผลลัพธ์มาตีความหรือตั้งเป็นเกณฑ์ วิธีสอนแบบนี้เชื่อกันว่า Socrates เป็นผู้ใช้ครั้งแรก โดยเขาคิดว่าคนเรานั้นรู้จักรับผิดชอบชั่วดีกันอยู่แล้ว ถ้า

ครูจะใช้คำถามชุดหนึ่งให้ผู้เรียนได้ตอบเป็นลำดับ ในที่สุดผู้เรียนก็จะพบความจริงได้ โดยครูไม่จำเป็นต้องบอกให้ การสอนแบบนี้ผู้เรียนจะตื่นตัวอยู่เสมอ และเกิดความสนใจเพราะรู้สึกว่ามีส่วนร่วมในการค้นพบหลักเกณฑ์นั้นด้วย

4. การสอนแบบอภิปราย (Discussion Method) เป็นวิธีการสอนที่ครูและผู้เรียนร่วมกันคิดค้นหาเหตุผลมาคัดค้านหรือสนับสนุนข้อเสนอเรื่องใดเรื่องหนึ่ง วิธีการสอนแบบนี้จะเป็นไปได้ก็ต่อเมื่อผู้เรียนมีความรู้ในเรื่องนั้น ๆ ดีพอสมควร ครูควรเป็นผู้นำในการอภิปรายและพยายาม อย่าให้การอภิปรายออกนอกประเด็น เพื่อจะได้บรรลุจุดประสงค์ตามที่ตั้งไว้

5. การสอนแบบบรรยาย (Lecture Method) เป็นการสอนที่ครูบอกกฎหรือทฤษฎีต่าง ๆ ให้ผู้เรียนเลย มีกิจกรรมร่วมระหว่างครูกับผู้เรียนน้อย ซึ่งเหมาะสำหรับสอนในระดับสูง ๆ ไม่ควรสอนกับเด็กประถมหรือมัธยม

6. การสอนแบบสาธิต (Demonstration Method) เป็นวิธีการสอนที่ครูแสดงวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้แก่ผู้เรียนได้ดู อาจเป็นการยกตัวอย่างหรือแสดงโดยการใช้อุปกรณ์

7. การสอนโดยวิธีทดลอง (Laboratory Method) เป็นการสอนโดยเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ค้นคว้าทดลอง หาเหตุผลเพื่อตอบปัญหาด้วยตนเอง เช่น ต้องการสอนให้นักเรียนเข้าใจว่า "ในวงกลมวงเดียวกันหรือวงกลมที่เท่ากัน คอร์ดที่ยาวกว่าย่อมอยู่ใกล้จุดศูนย์กลางมากกว่าคอร์ดที่สั้น" วิธีการของครูก็คือให้ผู้เรียนทุกคนสร้างวงกลม (อาจสร้างวงเดียวหรือ 2 วงก็ได้ แต่ถ้าสร้าง 2 วงกลม ทั้ง 2 ต้องมีรัศมีเท่ากัน) แล้วให้ผู้เรียนเขียนคอร์ด 2 เส้น ให้คอร์ดทั้ง 2 นี้ ยาวไม่เท่ากัน ให้วัดระยะห่างจากศูนย์กลางของวงกลมมายังคอร์ดทั้ง 2 เส้นนั้น แล้วจึงช่วยกันสรุปผล

8. การสอนแบบปฏิบัติการ

การสอนคณิตศาสตร์โดยวิธีปฏิบัติการเป็นการสอนที่ให้ผู้เรียนได้เรียนจากการปฏิบัติจริง เป็นการเรียนจากประสบการณ์ตรง ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติการ เช่น แสวงหาข้อมูล จัดข้อมูลให้เป็นระเบียบ พิจารณาหาข้อสรุปจากผลของการปฏิบัตินั้น

ลักษณะของการสอนแบบปฏิบัติการ

1. เรียนจากสิ่งที่เป็นรูปธรรม กึ่งรูปธรรม และนามธรรม

2. จัดระเบียบข้อมูล การจัดทำ การคิดค้น การคำนวณ หรือ การทำกิจกรรมทางด้านกายภาพ เช่น การชั่ง การวัด เป็นต้น

3. ผู้เรียนลงมือทำเอง ต้องรู้จักรับผิดชอบทั้งต่อตนเอง ต่อเพื่อนร่วมงานมีวินัยรู้จักควบคุมตนเอง

4. ให้ผู้เรียนมี interaction ระหว่างกัน

5. ผู้เรียนสามารถเรียนตามความสามารถของตัวเอง

วิธีการสอนที่กล่าวมาทั้งหมดนี้สามารถนำไปใช้กับการสอนคณิตศาสตร์ได้ ทั้งนี้ก็ขึ้นกับดุลยพินิจของผู้สอนว่า ในสภาวะเช่นไรควรจะใช้วิธีสอนแบบใดจึงจะเหมาะสม และทำให้ผู้เรียนได้รับประโยชน์จากวิธีการสอนของท่านอย่างเต็มที่ และเพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนอย่างถูกวิธีโปรดระลึกไว้เสมอว่าเมื่อผู้เรียนไม่สามารถจะเข้าใจ concept นี้ด้วยวิธีนี้ ก็ควรเปลี่ยนวิธีใหม่เพื่อปรับให้เหมาะสมกับเขา การเลือกว่าจะใช้วิธีใดสอนดีนั้นควรพิจารณาดังนี้

1. วิธีสอนนั้นควรเป็นวิธีที่ผู้เรียนได้ประสบการณ์ที่พึงพอใจ อันจะทำให้ผู้เรียนเกิดแรงจูงใจชนิด intrinsic reward และพร้อมที่จะเรียนรู้เรื่องที่ครูต้องการสอน

2. วิธีสอนนั้นควรเป็นวิธีที่เหมาะสมกับการเจริญเติบโตทางสติปัญญาของผู้เรียน ผู้เรียนจะได้ใช้ความสามารถของเขาอย่างเต็มที่

3. วิธีสอนนั้นต้องเริ่มจากสิ่งที่ง่ายไปสู่สิ่งที่ยาก นั่นคือต้องเริ่มจาก concept ที่เด็กมีอยู่แล้วและนำ concept พื้นฐานนี้ไปสร้าง concept ใหม่

4. ครูจะต้องมั่นใจว่าการสอนตามวิธีที่ตนกำหนดขึ้นจะสามารถนำผู้เรียนไปสู่จุดประสงค์ที่ตั้งไว้ได้เป็นจำนวนมาก

5. วิธีสอนนั้นต้องเหมาะสมกับเรื่องที่สอนเพื่อให้เกิดการสอดคล้องเป็นการเรียกร้องความสนใจของผู้เรียน จัดได้ว่าเป็น reward