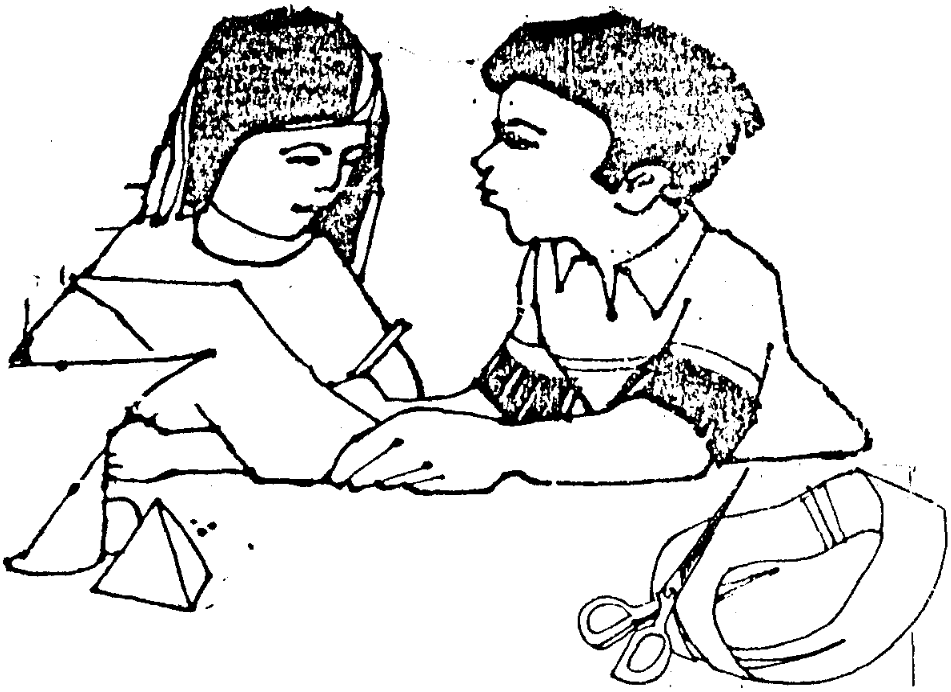


บทที่ 4
วิธีสอนคณิตศาสตร์
(Method of Teaching Mathematies)

ก่อนที่เราจะพิจารณาในรายละเอียดเกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์นั้น ควรจะเข้าใจคำว่า การเรียน และการสอนกันก่อน เพราะจะทำให้เกิดความเข้าใจเรื่องราวต่าง ๆ ที่จะพูดถึงต่อไปนี้ได้ดียิ่งขึ้น

การเรียนรู้ (learning) คือ การเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมอันเนื่องมาจากประสบการณ์ พฤติกรรมในที่นี้ไม่เฉพาะแต่ทางกายเท่านั้น แต่รวมถึงพฤติกรรมทั้งหมดที่คนเราแสดงออกมาได้ เช่น ทัศนคติ และความรู้ ความคิด เป็นต้น

องค์ประกอบของการเรียนรู้ ซึ่ง Joseph Lee Cronbach อธิบายว่าต้องมีองค์ประกอบดังต่อไปนี้

1. จุดประสงค์ (gole) หมายถึง ผลบางอย่างที่ผู้เรียนหวังจะได้รับหรือไปถึง ดังนั้นในการสอน จึงจำเป็นที่ครูจะต้องแสดงให้นักเรียนเห็นจุดมุ่งหมายที่ครูต้องการจะให้นักเรียน

บรรลุถึง เพราะจะทำให้เกิดแรงจูงใจ และทำให้นักเรียนตื่นตัวอยู่เสมอว่าเขากำลังทำอะไรอยู่และอยู่จุดไหนของการเรียนการสอน

2. ความพร้อม (readiness) คือ ผลรวมของรูปแบบที่ผู้เรียนจะตอบสนองต่อสิ่งเร้าเกี่ยวกับการเรียนรู้ได้

3. สถานการณ์ (situation) หมายถึง สิ่งแวดล้อมที่อยู่รอบ ๆ ตัวผู้เรียน เช่น คำพูด หรือตัวหนังสือที่จะก่อให้เกิดประสบการณ์ขึ้น ผู้เรียนจะต้องเข้าใจสถานการณ์ถึงจะเรียนรู้ได้ดี

4. การแปลความหมาย (interpretation) เป็นขบวนการที่คนเอาใจจดจ่ออยู่กับสิ่งแวดล้อม แล้วนำไปสัมพันธ์กับประสบการณ์ที่เคยมีมาแล้ว และแปลความหมายว่าในสถานการณ์เช่นนั้น เราแสดงพฤติกรรมอย่างนี้ออกไปผลลัพธ์ควรจะออกมาในรูปใด

5. การตอบสนอง (response) หมายถึง การกระทำหรือการเปลี่ยนแปลงภายในร่างกาย ดังนั้นจึงเป็นการเคลื่อนไหวที่อาจสังเกตเห็นได้ หรือความเครียดที่เกิดขึ้นก็ได้

6. ผลต่อเนื่อง (consequence) คือ ผลที่เกิดขึ้นสืบต่อมาจากการตอบสนอง ซึ่งอาจตรงตามความคาดหมายหรือไม่ก็ได้ ถ้าผลออกมาตรงตามความคาดหมายคนก็จะทำซ้ำอีก แต่ถ้าไม่ตรง คนก็จะเปลี่ยนแปลงใหม่

7. ปฏิกิริยาต่อความกีดกั้น (reaction to thwarting) หมายถึง ถ้าคนไม่บรรลุถึงจุดหมายได้ เขาก็จะเกิดความรู้สึกไม่สบายใจขึ้น ดังนั้น เขาอาจจะเลิกล้มหรือคิดดัดแปลงพฤติกรรมให้เหมาะสมตามสภาพความเป็นจริงใหม่ ตามที่เขาจะแปลสภาพการณ์อันนั้นขึ้นมาใหม่

องค์ประกอบเหล่านี้ครูจะพบอยู่ตลอดเวลาในการสอนนักเรียน ครูจึงต้องคำนึงถึงด้วยในการวางแผนการสอน

การถ่ายโยงการเรียนรู้ (Transfer of Learning)

การถ่ายโยงการเรียนรู้ หมายความถึง การส่งผลการเรียนรู้จากการเรียนงานหนึ่งไปยังการเรียนรู้งานอีกอย่างหนึ่ง

การถ่ายโยงการเรียนรู้อาจเกิดขึ้นได้ 2 ลักษณะคือ

1. การถ่ายโยงการเรียนรู้ทางบวก (Positive transfer)
2. การถ่ายโยงการเรียนรู้ทางลบ (Negative transfer)

1. การถ่ายโยงการเรียนรู้ทางบวก คือ การถ่ายโยงการเรียนรู้ชนิดที่ผลของการเรียนรู้งานหนึ่ง ช่วยให้ผู้เรียนรู้อีกงานหนึ่งได้เร็วขึ้น ง่ายขึ้น หรือดีขึ้น

2. การถ่ายโยงการเรียนรู้ทางลบ หรือ การถ่ายโยงการเรียนรู้ชนิดที่ผลการเรียนรู้งานหนึ่งไปขัดขวางทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อีกงานหนึ่งได้ช้าลง หรือยากขึ้น และไม่ได้ดีเท่าที่ควร

ทัศนคติกับการเรียนรู้

ทัศนคติ หมายถึง สภาพของจิตใจของบุคคลที่มีผลมาจากประสบการณ์ อันทำให้บุคคลมีท่าทีต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่งในลักษณะใดลักษณะหนึ่ง

ลักษณะสำคัญของทัศนคติ คือ

1. เป็นสิ่งที่เกิดจากการเรียนรู้หรือเกิดจากประสบการณ์มิใช่สิ่งที่ติดมาแต่กำเนิด
2. เป็นสภาพจิตใจที่มีอิทธิพลต่อการคิดและการแสดงพฤติกรรมของบุคคล
3. เป็นสภาพทางจิตใจที่มีความถาวรพอสมควร และเมื่อเกิดขึ้นแล้วโดยทั่วไปมักเปลี่ยนแปลงได้ยาก

ในเรื่องการเรียนรู้ ทัศนคติมีส่วนเกี่ยวข้องด้วย เช่น

1. ทัศนคติมีอิทธิพลต่อการชอบหรือไม่ชอบวิชาที่จะเรียน
2. ทัศนคติมีผลต่อการรับรู้ของบุคคล

การสอน (teaching) เป็นการสร้างสถานการณ์หรือการจัดกิจกรรมเพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดประสบการณ์ ซึ่งจะเป็นผลทำให้เกิดการเรียนรู้ได้เร็วขึ้น อุดมคติของความมุ่งหมายของการสอนที่ดี ได้แก่

1. ทำอย่างไรนักเรียนจะเรียนรู้ได้เร็วที่สุด
2. ทำอย่างไรนักเรียนจะเรียนรู้ได้มากที่สุด
3. ทำอย่างไรจึงจะทำให้ผู้เรียนเหน็ดเหนื่อยจากการเรียนน้อยที่สุด

จากอุดมคตินี้เองที่ครูจะต้องจัดสิ่งแวดล้อม เช่น การใช้สื่อการสอน (teaching aids) และการใช้วิธีสอน (method of teaching) ต่าง ๆ ครูต้องตั้งความมุ่งหมายของการสอนให้แน่ชัดลงไปว่าเพื่อให้ผู้เรียนเกิดพฤติกรรมแห่งการเรียนรู้ตามความมุ่งหมาย การเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมของผู้เรียนมี 3 ด้าน คือ

1. เกิดความรู้ใหม่ ๆ (cognitive domain) เป็นความรู้ซึ่งเกิดจากขบวนการสอนนั้น ๆ เช่น ผู้เรียนสามารถบอกเซตของจำนวนเต็มได้ว่าประกอบด้วยอะไรบ้าง หลังจากได้เรียนเรื่องระบบจำนวนเต็มแล้ว

2. เกิดทักษะใหม่ ๆ (psychomotor domain) ผู้เรียนได้รับการฝึกต่าง ๆ จนเกิดความชำนาญและทำได้อย่างรวดเร็ว จนเป็นทักษะ (skill) ของผู้เรียนแต่ละคน

3. เกิดทัศนคติใหม่ ๆ (affective domain) จากการเรียนรู้และการสอนของครู ทำให้ผู้เรียนเกิดทัศนคติ (attitude) ที่เป็นประโยชน์ต่อตัวเขาและประเทศชาติได้

การเลือกยุทธวิธีสอน (Selecting Instructional Strategies)

เป็นที่ทราบกันดีว่า ไม่มีวิธีสอนวิธีหนึ่งวิธีใดเป็นวิธีที่ดีที่สุด วิธีสอนแต่ละวิธีมีความดีเด่นโดยเฉพาะไม่เหมือนกัน และมีขอบเขตการใช้งานที่จำกัด ดังนั้นการเลือกวิธีสอนให้เหมาะกับการสอน จึงเป็นสิ่งที่เพิ่มพูนประสิทธิภาพ และประสิทธิผลในการสอนมาก แต่ภาวะการณ์ในการสอนมักจะไม่คงที่ มีการผันแปร (dynamic) ไปได้เสมอ เพราะฉะนั้นการเลือกวิธีสอนให้เหมาะกับภาวะการณ์หนึ่งเท่านั้นยังไม่พอเพียง จำเป็นจะต้องพิจารณาและคาดการณ์ว่าอาจจะเกิดการเปลี่ยนแปลงอะไรบ้าง และต้องมีวิธีสอนหลักและวิธีสอนรองด้วย ซึ่งเรียกรวมกันว่า "ยุทธวิธีการสอน"

ยุทธวิธีการสอน (Instructional strategies)

ความแตกต่างของคำว่า "วิธีสอน" "เทคนิคการสอน" และ "ยุทธวิธีการสอน" มีดังนี้

1. **วิธีสอน (Teaching method)** คือ การจัดระบบ (system arrangement or pattern) การดำเนินการสอนอย่างมีระเบียบเรียบร้อย เพื่อที่จะให้สามารถดำเนินการหรือจัดการอย่างไรอย่างหนึ่งอย่างมีประสิทธิภาพที่สุด

2. **เทคนิคการสอน (Instructional technique)** คือทักษะ (skill) หรือรายละเอียดในการดำเนินการสอนด้วยวิธีการเฉพาะ หรือเครื่องมือในการดำเนินการสอนตามแบบแผนของวิธีสอนต่าง ๆ เพื่อให้เกิดผลดีในที่สุด

3. **ยุทธวิธีสอน (Instructional strategy)** คือ การจัดเลือกวิธีสอน (teaching methods) วิธีใดวิธีหนึ่ง หรือมากกว่าหนึ่งวิธี บวกกับเทคนิคการสอน (teaching techniques) ต่าง ๆ สำหรับวิธีสอนนั้นตามที่ต้องการ รวมทั้งวิธีการจัดสภาพการเรียนและการใช้อุปกรณ์ช่วยสอนต่าง ๆ ประกอบด้วย เพื่อที่จะทำให้สามารถทำหน้าที่การสอนนั้นสำเร็จลุล่วงไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ที่กล่าวมาแล้วนั้นคือ ความรู้พื้นฐานสำหรับการเรียนการสอน และต่อไปนี้จะพิจารณาถึงวิธีสอนแบบต่าง ๆ ที่จะนำมาใช้สอนคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นวิธีที่นำไปใช้ในทางปฏิบัติได้

การสอนคณิตศาสตร์เพื่อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ตามวัตถุประสงค์ของการสอนที่ตั้งไว้จะต้องใช้เทคนิคการสอนหลายแบบโดยพิจารณาให้เหมาะสมกับสภาพของผู้เรียน และสภาพแวดล้อมอื่น ๆ จึงขออธิบายถึงวิธีสอนที่คิดว่าสำคัญและสามารถนำไปใช้ในการสอนคณิตศาสตร์แนวใหม่ดังต่อไปนี้

1. การสอนด้วยวิธีค้นพบ (discovery technique) การสอนด้วยวิธีค้นพบไม่ใช่เรื่องใหม่ เพราะถือว่าผู้ใช้เทคนิคนี้เป็นคนแรกคือ Socratis หรือที่เรียกว่า Socratic Method เป็นวิธีใช้คำถามเพื่อให้ผู้เรียนพยายามหาคำตอบ ไปสู่จุดมุ่งหมายตามต้องการ Bruner นักจิตวิทยา

ตัวของเขาเองจากการค้นพบของเขา แต่ละกลุ่มสามารถดำเนินการด้วยวิธีการของกลุ่มเอง ความกดดันที่จะทำให้เกิดการเรียนรู้ขึ้นในกลุ่มจะมีผลทำให้เกิดแรงจูงใจมากกว่าความกดดันที่เกิดจากครู นักเรียนหลายคนพบวิธีการนี้ โดยไม่มีการเร้า เนื่องจากวิธีของการค้นพบ และเนื่องจากการทำงานของกลุ่มในที่สุดก็จะพบว่าการเรียนรู้นั้นคู่กับการที่จะทำงานกับผู้อื่นได้อย่างไร? ในสังคมของเราสิ่งนี้เป็นสิ่งสำคัญ ซึ่งเป็นทักษะทางสังคม

แต่มีข้อเสียเกี่ยวกับศักยภาพ รูปแบบของการเรียนรู้ของนักเรียนแตกต่างกัน ในขณะที่นักเรียนคนหนึ่งชอบวิธีนี้ แต่คนอื่นอาจไม่ชอบ เขาอาจจะประสบความสำเร็จได้จากการเรียนตามปกติโดยการอธิบาย โดยไม่อาศัยการทำงานเป็นกลุ่ม

การเรียนรู้โดยการทำงานเป็นกลุ่มนั้นต้องใช้เวลา ทักษะต่าง ๆ ของเขานั้นจะไม่ได้รับการพัฒนาขึ้นในโรงเรียนที่การสอนรวม ๆ ไม่เป็นรายบุคคล จะไม่หวังว่ากลุ่มนั้นเป็นสิ่งสำคัญและเป็นการเสียเวลา สมาชิกบางคนชอบที่จะให้คนอื่นทำงานทั้งหมดให้ มันเป็นธรรมชาติของนักเรียน ซึ่งบางทีสิ่งซึ่งไม่พึงปรารถนานี้มักเกิดขึ้น คำแนะนำจากครูนั้นจะหวังได้ว่าเงื่อนไขต่าง ๆ นั้นจะถูกต้อง ดังนั้นเมื่อเวลาผ่านไป กลุ่มเหล่านั้นก็จะสามารถคิดและทำงานได้ดีขึ้น

เนื่องจากการปรับปรุงตำราเรียนนั้นต้องใช้เวลามาก บทเรียนในการสอนการค้นพบในกลุ่มย่อยเป็นความต้องการของครู เขาจะต้องเขียน sheet แนะนำซึ่งบรรลุปัญหาที่แตกต่างจากแบบฝึกหัดในหนังสือ และหลังจากนั้นก็จะเป็นแบบฝึกหัดที่ใช้แนะนำและพัฒนาทักษะเช่นเดียวกับนักเรียน ครูจะต้องเรียนรู้ว่าจะทำงานเป็นกลุ่มได้อย่างไร ทักษะเหล่านี้แตกต่างจากการนำเด็กมาทำงาน

ข้อดีของการสอนโดยอาศัยการค้นพบ

Jerome Bruner (1960, p. 612) ได้แนะนำประโยชน์อย่างมากมายที่นักเรียนจะได้รับจริงเมื่อเรียนจากบทเรียนที่อาศัยการค้นพบ

การเรียนโดยการให้นักเรียนค้นพบนั้นไม่เพียงแต่จะได้ผลจากการค้นพบเท่านั้น แต่ขบวนการของการทำงานที่เขาจะเรียกว่าวิธีแห่งการค้นพบซึ่งเป็นหลักสำคัญที่ดีที่สุดจะช่วยให้เกิดขบวนการในการทำงานดังกล่าว

Bruner มีความเชื่อว่านักเรียนใช้กำลังภายในของตัวเอง เพื่อค้นพบความรู้จะเป็นการเพิ่มความสามารถในการรวบรวมความรู้ความคิดที่จะนำมาใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ซึ่งจะนำมาสู่การพัฒนาวิธีการแก้ปัญหาและจะได้รับแรงกระตุ้นภายใน จากขบวนการแห่งการเรียนโดยการค้นพบนั้น

เพียงพอที่จะสรุปว่าจุดประสงค์ทั้งสองข้อนั้นสามารถเป็นสิ่งที่ดีกว่า ถ้าความรู้จากการค้นพบของนักเรียนนั้นจะมีศักยภาพที่จะค้นพบหนังสือบางเล่มอาจจะสร้างสติปัญญาโดยการให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดหลาย ๆ แบบ ถ้านักเรียนค้นพบหลักเกณฑ์ว่า

$\log ab = \log a + \log b, a > o, b > o$ แล้วเขาสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้กับหลักเกณฑ์ของ

$\log a^n = n \log a, a > o$ และ $n \in I^+$ ได้

การสอนโดยการค้นพบโดยแบ่งเป็นกลุ่มย่อย

ในการสอนโดยการค้นพบทุกกรณี ครูต้องมีส่วนร่วมกิจกรรมในห้องเรียน การมีส่วนร่วมได้แก่การยกตัวอย่าง หรือ การนำไปใช้ซึ่งสามารถตั้งเป็นกรณีทั่ว ๆ ไป และความรู้อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับบทเรียนที่จะให้นักเรียนค้นพบนั้น การมีส่วนร่วมนี้อาจจะเป็นระหว่างครูกับนักเรียน 20 – 30 คน ของห้องเรียนนั้น

วิธีการของการสอนนี้ถูกแนะนำโดย Davidson (1971) ผู้ซึ่งได้อธิบายวิธีที่นักเรียนจะสร้างกลุ่มเล็ก ๆ ที่มีสมาชิก 3 – 4 คนที่เรียนอยู่ด้วยกัน และศึกษาปัญหานั้นโดยตรง เพื่อจะทำให้เขาได้ค้นพบความรู้อย่างลึกซึ้งในสิ่งที่เขาต้องการเรียน การสอนแบบนี้สามารถใช้กับบทเรียนที่เรียนด้วยตัวเองได้ดีเท่า ๆ กันกับการสอนเป็นกลุ่ม ๆ

กลุ่มดังกล่าวนี้อาจตั้งขึ้นโดยนักเรียนเอง นั่นคือนักเรียนแต่ละคนสามารถเลือกสมาชิกที่จะเข้ามาเป็นผู้ร่วมงานในกลุ่ม นักเรียนต้องช่วยกันทำงานและหาคำตอบอันเป็นที่น่าพอใจสำหรับสมาชิกในกลุ่มปัญหาใหม่ ๆ จะยังไม่พิจารณาจนกว่าสมาชิกในกลุ่มจะเข้าใจปัญหาที่กำลังคิดอยู่จนครบแล้ว จะไม่มีนักเรียนคนใดอธิบายหรือทำงานอื่น แต่ละกลุ่มจะใช้วิธีที่เป็นของกลุ่มของตน ขณะที่แต่ละกลุ่มกำลังทำงานอยู่ครูควรเข้าไปเยี่ยมและสังเกตความก้าวหน้าต่าง ๆ และแนะนำบางสิ่งบางอย่างที่จะทำให้เกิดการปรับปรุง ดังนั้นอะไรที่จำเป็น ความถูกต้อง ครูจะต้องอธิบายให้นักเรียนเข้าใจ

ในการทดลองของ Davidson นักเรียนในชั้นที่ใช้ทดลองมีความกดดันในการให้รับรู้น้อยกว่าวิธีการสอนแบบธรรมดา และมีทัศนคติดีขึ้น รายงานของเขาทั้งหลายใน course นี้น่าสนใจมากกว่า course คณิตศาสตร์อื่น ๆ ที่เคยมีมา ความคิดบางอย่างของเขามีมากกว่าใช้วิธีสอนแบบธรรมดา รายงานบางเล่มบอกว่าเขาไม่กลัวคณิตศาสตร์แล้ว

เช่นเดียวกับวิธีสอนอื่น ๆ การสอนด้วยวิธีค้นพบแบบกลุ่มย่อยนั้นมีทั้งข้อดีและข้อเสียซึ่ง Davidson (p. 789) กล่าวว่า "...นักเรียน ๆ คณิตศาสตร์โดยการทำให้เป็นคณิตศาสตร์" มากกว่าที่จะอ่านผลสำเร็จของการค้นพบทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถผลิตผลผลิตด้วย

สมมติว่ายุทธวิธีของการค้นพบสามารถใช้สอนรูปทั่ว ๆ ไปที่เฉพาะเจาะจง ความยุ่งยากของการสร้างกฎเกณฑ์ทั่ว ๆ ไป ยังมีความสัมพันธ์ไปถึงการเลือกระหว่างยุทธวิธีอุปนัย และนิรนัย พูดแบบทั่ว ๆ ไปก็คือ ความยุ่งยากที่มากกว่าการทำเป็นกฎเกณฑ์ทั่ว ๆ ไป คือ ความยุ่งยากที่จะสอนโดยใช้วิธีอุปนัย ทฤษฎีนั้นประกอบด้วยการเรียงลำดับจำนวนของสิ่งของ n สิ่งมี r_1 สิ่งที่เหมือนกัน, r_2 สิ่งที่เหมือนกัน,......, r_k สิ่งที่เหมือนกัน ซึ่งเป็นการยากที่จะสอนตามยุทธวิธีค้นพบแบบอุปนัย แต่เป็นการง่ายที่จะสอนโดยการผสมกันระหว่างอุปนัยและนิรนัย กฎเกณฑ์ทั่วไปที่ประกอบด้วยเงื่อนไข และมีสมมติฐานเป็นตัวเชื่อมจะต้องการตัวอย่างมากเพื่อที่จะแสดงถึงความจำเป็นของเงื่อนไขที่เชื่อมนั้น ลองพิจารณาการทดสอบการไม่เป็นอิสระของระบบสมการเชิงเส้น 2 สมการ คือ $a_{11}x + a_{12}y = a_{13}$ และ $a_{21}x + a_{22}y = a_{23}$ ระบบนี้จะไม่เป็นอิสระตัว $a_{11}/a_{22} = a_{12}/a_{22} = a_{13}/a_{23}$ และ $a_{21} \neq 0, a_{22} \neq 0$ และ $a_{23} \neq 0$ จะต้องใช้ตัวอย่างหลาย ๆ แบบในการสาธิตถึงความจำเป็นของเงื่อนไขในสมมติฐานวิธีการสอนให้ค้นพบแบบนิรนัยดูเหมือนจะมีประสิทธิภาพมากกว่า

ถ้านักเรียนยังมีความถนัดไม่เพียงพอทางนามธรรมในการสร้างรูปแบบจากตัวอย่างแล้ว การใช้ยุทธวิธีของอุปนัยมาก ๆ มักจะทำลายเขา เขาจะไม่สามารถสร้างวิธีค้นพบและจะเลิกล้มความคิดไป จนกระทั่งนักเรียนเหล่านี้จะสามารถปรับปรุงความสามารถเกี่ยวกับนามธรรม ยุทธวิธีการค้นพบแบบนิรนัยที่ทำโดยการเลือกลำดับคำถามอย่างระมัดระวังจะทำให้เกิดผลสำเร็จอย่างดี สำหรับนักเรียนเหล่านี้ ยุทธวิธีการค้นพบแบบนิรนัยดูเหมือนว่าจะไม่มีประสิทธิภาพสำหรับเขา

ให้นักเรียนได้ตรวจสอบการค้นพบของเขา

การพิสูจน์หลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไป นั้นจำเป็นต้องใช้วิธีนิรนัย การเข้มงวดในการพิสูจน์ตามวิธีนี้ตามปกติแล้วต้องแปรเปลี่ยนไปตามความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน อย่างไรก็ตาม วิธีการค้นพบแบบนิรมัย โดยนักเรียนนั้นไม่จำเป็นต้องใช้เหตุผลที่ยากเกินกว่าที่มีในบทเรียน เพราะว่าการค้นพบเป็นลำดับขั้นของข้อความทางการนิรนัย ด้วยเหตุนี้ วิธีนิรนัยที่ยาก ๆ นั้นจำเป็นที่ครูต้องอธิบายให้นักเรียนฟังตามระดับของความเข้าใจ และครูอาจต้องอธิบายหลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไป โดยให้นักเรียนพิจารณาจากตัวอย่าง หรือยั่วยุให้นักเรียนสร้างตัวอย่างขึ้นมา

เสริมแรงให้เกิดการค้นพบโดยให้นักเรียนได้คิด

สิ่งที่เป็นสิ่งสำคัญ 2 ประการใหญ่ ๆ จากการเรียนโดยอาศัยการค้นนั้นคือ ศักยภาพของการถ่ายโยง การเรียนรู้ได้สูงและเกิดความคงทนของความรู้ที่เกิดขึ้น น่าจะมีเหตุผล

θ	sin tl	cos θ	sin' θ	$\cos^2 \theta$	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$
0"					
30"					
120					
225"					
17°					
155					
324					

การวางแผนและการสร้างบทเรียนแบบการค้นพบ

ในตอนนี้เราจะแสดงการพิจารณา หรือ หลักในการวางแผนและบทเรียนที่ใช้สอนให้ค้นพบและการอธิบายกฎเกณฑ์กับการอ้างอิงสำหรับบทเรียนแบบค้นพบบางอย่างซึ่งบทเรียนได้เสนอให้เห็นแล้วในตอนแรกของบทนี้ กฎเกณฑ์นี้สามารถเป็นแนวทางในการสร้างบทเรียนแบบค้นพบในรูปทั่ว ๆ ไป เกณฑ์บางอย่างสามารถนำไปใช้ได้มากกว่าอย่างอื่นในบทเรียนที่แตกต่างกัน

การค้นพบรูปทั่ว ๆ ไป นั้นมีขั้นอย่างชัดเจนแล้วหรือไม่

รูปทั่ว ๆ ไปที่เกิดขึ้นชัดเจนที่ค้นพบนั้นจะช่วยให้ครูเลือกตัวอย่างและคำถามในการเสนอต่อนักเรียน ทั้งนี้ไม่ได้หมายความว่าครูจะหลับหูหลับตาสอนให้เพียงแต่คนใดคนหนึ่งได้ค้นพบเท่านั้น ครูควรทราบว่าเราไม่ต้องการเดาเพื่อนำมารับรองหรือยืนยันการสืบสวนสอบสวนนั้น อย่างไรก็ตามถ้าครูยังไม่แน่ใจว่าจะให้นักเรียนค้นพบอะไร ก็เหมือนกับว่าครูได้สร้างประสบการณ์ตื้น ๆ ให้แก่เด็ก ยิ่งกว่านั้น ถ้าจุดประสงค์ของการค้นพบจะได้ตั้งขึ้นอย่างชัดเจนแล้วการประเมินความสำเร็จของครูต่อบทเรียนจะยิ่งได้รับการส่งเสริมยิ่งขึ้นด้วย

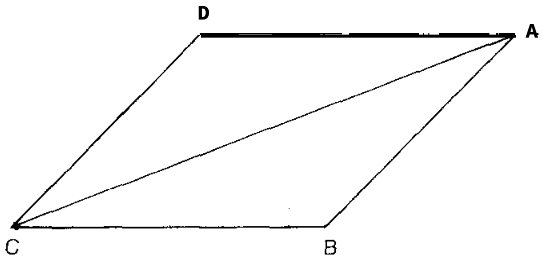
ลองพิจารณาองค์ประกอบที่มีความสัมพันธ์กันก่อนตัดสินใจใช้ยุทธวิธีของการค้นพบแบบอุปนัยและนิรนัย หรือ ทั้งสองวิธีผสมกัน

การแนะนำนี้สมมติว่าการตัดสินใจใช้ยุทธวิธีของการค้นพบนั้นจะเริ่มใช้เป็นครั้งแรกความสำคัญที่เจาะจงลงไปก็คือธรรมชาติของกฎเกณฑ์ทั่วไปที่จะสอน กฎเกณฑ์บางอย่างนั้นค่อนข้างสลับซับซ้อนซึ่งยุทธวิธีของการค้นพบจะไม่มีประสิทธิภาพและไม่เกิดผล ทฤษฎีของเดอ มัวร์ (De Moivre's Theorem) สามารถที่จะใช้วิธีสอนโดยการค้นพบ แต่คำถาม ๆ หนึ่งนั้นต้องใช้เวลามากและต้องใช้ความพยายามสูง วิธีการอธิบายก็สามารถจะใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพกว่า

องค์ประกอบอื่น ๆ ที่ควรพิจารณาก็คือ ธรรมชาติของเนื้อหาวิชา หลักเกณฑ์บางอย่างต้องใช้การค้นพบแบบหนึ่ง ซึ่งจะดีกว่าแบบอื่น ๆ ครูควรจะพิจารณารูปแบบของการค้นพบซึ่งจะต้องวิเคราะห์ด้วยตัวครูเองตามแบบการสอนของตน บางคนชอบและสามารถใช้วิธีแบบหนึ่งได้ดีกว่าแบบอื่น ๆ ครูควรจะทดลองตรวจสอบวิธีการสอนที่ครูคิดว่ามีผลต่อการสอนให้เกิดการเรียนรู้ในวิชานั้นอย่างลึกซึ้ง ในบทเรียนต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นการค้นพบแบบอุปนัยและนิรนัย สามารถใช้สอนกฎเกณฑ์ต่าง ๆ อย่างไร ?

บทเรียนที่ 7

ในบทที่ 2 การสอนให้ค้นพบแบบอุปนัยได้อธิบายให้นักเรียนได้เกิดการค้นพบคุณสมบัติของสี่เหลี่ยมด้านขนาน คุณสมบัติเช่นเดียวกันนี้จะถูกค้นพบโดยวิธีนิรนัยเช่นกัน ครูอาจจะเริ่มโดยการลากเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน ตามรูปข้างล่างนี้



จากนิยามของสี่เหลี่ยมด้านขนาน อาจสรุปได้ว่า $\triangle$ ADC $\cong$ $\triangle$ CBA (ทำไม ?) คุณสมบัติของสี่เหลี่ยมด้านขนานสามารถจะสรุปหรือค้นพบได้ถ้าเราลากเส้นทแยงมุม BD สามเหลี่ยมอะไรที่เท่ากัน ? คุณสมบัติของสี่เหลี่ยมด้านขนาน และเส้นทแยงมุมของมันจะเขียนได้ว่าอย่างไร ?

บทเรียนที่ 8

ในบทที่ 7 การสอนแบบนิรนัยทำให้เราพบรูปทั่ว ๆ ไป ของ

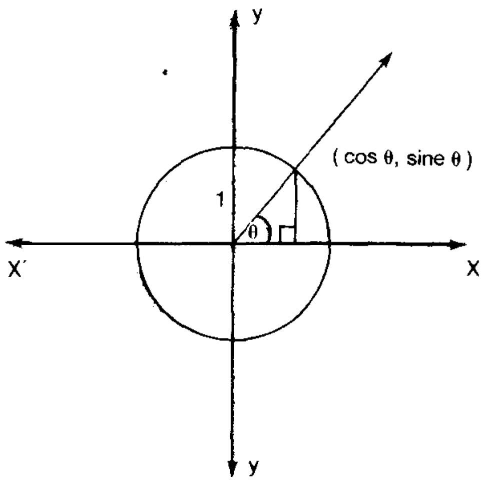
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

การทำให้เป็นรูปทั่ว ๆ ไปสามารถให้นักเรียนค้นพบโดยวิธีอุปนัย โดยให้นักเรียนสร้างตารางตามตารางต่อไปนี้

รูปทั่ว ๆ ไปที่เราหวังให้นักเรียนยืนยันนั้นคืออะไร ? ครูใช้คำถามนำนักเรียนว่าอะไร ? มีคำแนะนำอะไรให้นักเรียนบ้างเกี่ยวกับความรู้เดิมที่มีอยู่แล้ว

บทเรียนที่ 6

ครูอาจเริ่มจากการเรียนวงกลมหนึ่งหน่วยกับมุม θ และเส้นเริ่มต้น (initial line) ทางด้านบวกของแกน x ให้นักเรียนหาโคออดิเนทของจุดตัดของส่วนโค้งของวงกลม 1 หน่วย และเส้นตั้งฉากที่ลากปิดมุม θ มายังแกน x ในรูปของตรีโกนมิติเป็นฟังก์ชั่นของ θ (สมมติว่านักเรียนสามารถทำได้) ครูอาจถามนักเรียนให้ตรวจสอบไดอแกรมจากรูปต่อไปนี้ เพื่อสร้างสมการความสัมพันธ์ของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ สมการที่ได้นี้เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ θ หรือไม่ ? ถ้าเป็นจริงสมการที่ว่านี้เรียกว่าสมการอะไร ?



รูปที่ 8

ยุทธวิธีการสอนที่เกี่ยวกับการอุปนัยและนิรนัย

การสอนให้รู้จักรูปทั่ว ๆ ไปนั้นบางครั้งก็เกี่ยวข้องกับการค้นพบแบบอุปนัย หรือนิรนัย หรือบางครั้งก็ใช้ทั้ง 2 วิธี ร่วมกัน ถ้าครูตกลงใจว่าจะสอนโดยการค้นพบ ครูจะต้องพิจารณาองค์ประกอบหลาย ๆ ด้าน การเลือกแผนในการเสนอแนวคิด วิธีการคณิตศาสตร์และความสามารถทางสติปัญญาของนักเรียนบางคนสามารถสร้างขึ้นได้ด้วยองค์ประกอบชนิดใดชนิดหนึ่ง การสอนให้ค้นพบแบบนิรนัยจำเป็นต้องมีความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นพื้นฐานอยู่บ้าง โดยเฉพาะอย่างยิ่งการศึกษาเนื้อหา การสอนโดยการค้นพบแบบอุปนัยนี้ต้องมีความสามารถในการอุปนัยรูปแบบทั้งสองแบบนี้เป็นความต้องการของนักเรียน

ค. ในการใช้กฎของคาร์เมอร์แก้ปัญหาระบบสมการ

$$3x - 2y = 6$$
$$-9x + by = -3$$

นักเรียนได้คำตอบว่าอย่างไร

$น_1$ สำหรับ D(x) เราได้ 30 ส่วน D(y) ได้ค่า 45 สำหรับตัวหารนั้นมีค่า = 0

ค. ถูก แล้วได้คำตอบเป็นเท่าไร ?

$น_1$ ไม่ทราบ

ค. มีใครตอบได้บ้างว่าคำตอบเป็นเท่าไร ?

$น_1$ ผมคิดว่าไม่มีคำตอบเลยสักคำตอบเดียว

ค. ทำไมถึงไม่มีล่ะ ?

$น_2$ เพราะ $\frac{30}{0}$ และ $\frac{45}{0}$ นั้นไม่มีความหมาย

ค. ถูกต้อง เราไม่สามารถหารด้วย 0 ได้ เราไม่มีคำตอบ ใครสามารถจะหาคำตอบโดยแสดงรูปในความหมายของเรขาคณิตได้

$น_3$ กราฟของเส้นเหล่านั้นอาจจะขนานกัน

ค. ใช่ ถ้าเรามีกราฟของเส้นขนาน จำเป็นไหมที่รูปแบบสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจะเท่ากับศูนย์เสมอ ?

ค. เราลองพิจารณากรณีทั่ว ๆ ไปต่อไปนี้ $a_1x + b_1y = c$ ลองยกตัวอย่างสมการที่มีเส้นตรงขนานกับเส้นตรงนี้

$น_4$ $ma_1x + mb_1y = d$

ค. (เขียนสมการทั้งสองสมการบนกระดานดำ) m คืออะไร ?

$น_4$ m เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0

ค. O.K. ทำไมนักเรียนถึงเขียน d ทำไมไม่เขียน mc_1 ?

$น_4$ เพราะว่า อาจจะแทนเส้นตรงเส้นเดียวกัน

ค. ดีมาก ดีเทอร์มิแน้นท์ของสัมประสิทธิ์ของ x และ y จากเส้นตรงที่ขนานกัน 2 เส้นนี้

$น_5$ $a_1 mb_1 - ma_1 b_1$

ค. แล้วจะเท่ากับเท่าไร ?

$น_5$ ศูนย์

ค. **สิ่งเหล่านี้**บอกอะไรให้แก่เราบ้าง ? เราจะตั้งหลักเกณฑ์ว่าอย่างไร ?

นักเรียนจะได้คำถามมา 4 คำถามดังนี้

1. $ac + bg = a$
2. $af + bh = b$
3. $ce + dg = c$
4. $ef + dh = d$

เราสามารถแก้สมการ 1 และ 3 เพื่อหาค่า c และ g โดยใช้ Cramer's Rule

$$c = \frac{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ e & d \end{bmatrix}} = 1 \qquad \text{เมื่อ} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ e & d \end{bmatrix} \neq 0$$

$$g = \frac{\begin{bmatrix} a & 1 \\ c & c \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & 1 \\ c & d \end{bmatrix}} = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$$

และเมื่อนักเรียนแก้สมการ 2 และ 4 เพื่อหาค่า f และ h ก็จะได้ว่า $f = 0$ และ $h = 1$ ดังนั้น เมตริกที่เราต้องการคือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ นักเรียนสามารถตรวจสอบการค้นพบของเขาโดยพิจารณาจากหลาย ๆ ตัวอย่าง เช่น

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

บทเรียนที่ 5

บทเรียนที่ใช้วิธีการของโซเครตีสได้อธิบายไว้ตอนต้น ๆ ของบทนี้เพื่อให้นักเรียนสร้างโครงสร้างเกี่ยวกับรูปแบบของดีเทอร์มิแน้นท์โดยอาศัยสัมประสิทธิ์ของตัวแปรของสมการเส้นตรง 2 เส้น ที่ขนานกัน คำถามของโซเครตีสเป็นรูปแบบของการค้นพบแบบปรนัย ซึ่งครูจะใช้คำถามนำเพื่อให้นักเรียนได้เห็นแนวทางที่จะสรุป เช่น รูปแบบที่เฉพาะเจาะจงลงไปขั้นตอนของคำถามต่อไปนี้ จะทำให้นักเรียนเกิดการสนองตอบในทันทีจากคำถาม ลำดับขั้นต่อไปนี้สามารถจะใช้ในห้องเรียนได้ อย่างไรก็ตามนักเรียนก็อาจต้องการคำแนะนำเพิ่มเติมอีกบ้าง คำถามนี้นักเรียนต้องเรียนรู้การแก้ระบบสมการโดยอาศัยดีเทอร์มิแน้นท์

นักเรียนจะสามารถทดสอบการเดาของเขาสำหรับจำนวนที่ไม่ใช่ตัวอย่างแรกได้หรือไม่ ? ตัวอย่างเช่น นักเรียนอาจสังเกตจากจำนวนที่มีตัวหารลงตัว 3 จำนวน ที่อยู่ในรูป p^2 เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ จากรูปทั่ว ๆ ไปนี้สามารถเขียนในรูป "ก็ต่อเมื่อ" ได้หรือไม่ ?

ยุทธวิธีการค้นพบแบบนิรนัย (deductive discovery strategies)

เนื่องจากคณิตศาสตร์นั้นประกอบด้วยขอบข่ายของเนื้อหาและวิธีการที่เกี่ยวข้องกับข้อความที่เป็นนิรนัยเสมอ และดูเหมือนว่าจะมีเหตุผลเพียงพอที่จะสรุปได้ว่าวิธีการของนิรนัยนั้นมีบทบาทที่สำคัญในชั้นเรียน เป็นธรรมดาที่ครูจะพูดถึงข้อเสนอที่เป็นความรู้แก่นักเรียนและถามถึงวิธีการอ้างอิงที่จะไปสู่ผลสรุปจากข้อเสนอนั้น รายละเอียดของการสอนโดยการค้นพบแบบนิรนัยนั้นครูจะเสนอ concept ทางคณิตศาสตร์ หลักเกณฑ์ เพื่อนำไปสู่การเพิ่มพูนความรู้ทางคณิตศาสตร์ซึ่งเดิมเขาไม่มีความรู้อยู่

ทั้งวิธีการค้นพบแบบอุปนัย และนิรนัย ต้องการให้นักเรียนได้ความรู้จากการกระทำของเขา ไม่ใช่เป็นการยัดเยียดความรู้ให้เขา การค้นพบแบบอุปนัยนักเรียนต้องทำกิจกรรมจากตัวอย่างโดยการเดาเมื่อได้ข้อมูลจากตัวอย่าง แต่สำหรับการค้นพบแบบนิรนัยนักเรียนจะได้รับความรู้โดยการอนุมาณจากหลักตรรกวิทยา โดยอาศัยความรู้เดิมที่มีอยู่แล้ว ลองดูตัวอย่างต่อไปนี้

บทเรียนที่ 4

เมื่อนักเรียนต้องการหา 2 × 2 เมตริก เมื่อเทียบกับ 1 ในระบบจำนวนตรรกยะ นักเรียนส่วนใหญ่เดาว่าน่าจะเป็น $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งตัวอย่างต่อไปนี้จะชี้ให้เห็นว่าเป็นอย่างไร ?

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

อะไร คือ เมตริกที่เราต้องการ ?

ลองพิจารณาเมตริก $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ซึ่งดีเทอมิแน้นท์ไม่เป็น 0 ถ้าเมตริกที่เราต้องการคือ $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ แล้ว

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

บทเรียนนี้ควรถามนักเรียนเพื่อหาจำนวนตัวหารของจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 25 เพื่อให้การอธิบายง่ายเข้าจำนวนของตัวหาร จะกำหนดให้ตามตารางต่อไปนี้

จำนวน (n)	จำนวนของตัวหารของ n	จำนวน (n)	จำนวนของตัวหารของ n
1	1	14	4
2	2	15	4
3	2	16	5
4	3	17	2
5	2	18	6
6	4	19	2
7	2	20	6
8	4	21	4
9	3	22	4
10	4	23	2
11	2	24	8
12	6	25	3
13	3		

คำถามที่น่าสนใจโดยทั่วไปสามารถตั้งขึ้นจาก chart นี้ มีจำนวนกี่จำนวนที่มีตัวหารลงตัวเพียงตัวเดียว จำนวนเช่นว่านี้มีไหม ? ถ้ามีคนบอกว่ามีจำนวนอยู่จำนวนหนึ่ง เช่น 5627321 แล้วบอกว่ามีจำนวนมีตัวหารลงตัวเพียงจำนวนเดียว คุณควรจะปฏิเสธข้ออ้างนั้นไหม ?

มีจำนวนอะไรบ้างที่มีตัวหารลงตัวได้เพียง 2 ตัวเท่านั้น เธอสามารถบอกลักษณะของจำนวนที่มีตัวหารลงตัวเพียง 3 จำนวนได้ไหม ? หรือตัวหารลงตัว 4 จำนวนได้ไหม ? เธอจะเดาแบบฟอร์มของจำนวนที่มีตัวหารเป็นจำนวนคี่ได้อย่างไร ? สังเกตจากรูปแบบต่อไปนี้

$$18 = 9 \times 2$$

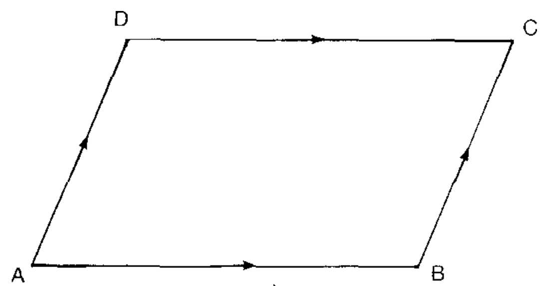
จำนวนที่หาร 18 ลงตัว = (จำนวนของตัวหารของ 9) × (จำนวนของตัวหารของ 2)

$$20 = 4 \times 5$$

จำนวนของตัวหารของ 20 = (จำนวนของตัวหารของ 4) × (จำนวนของตัวหารของ 5) รูปแบบดังกล่าวนี้ครอบคลุมได้ทุกกรณีหรือไม่ นักเรียนสามารถหารูปแบบจากการศึกษาจากตาราง เขาสามารถพิสูจน์การเดาของเขาจากความคิดได้หรือไม่ ถ้าการพิสูจน์ค่อนข้างยาก

4 – 5 รูป ถ้านักเรียนยังไม่สามารถสร้างได้อย่างถูกต้องครูควรจะอาศัย worksheet ที่วาดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไว้เรียบร้อยแล้วในการสร้างความชำนาญให้นักเรียน

นักเรียนควรได้รับการช่วยเหลือในการวัดมุมแต่ละมุมและด้านแต่ละด้านของสี่เหลี่ยมด้านขนานนี้ นักเรียนต้องบันทึกการวัดนี้ในรูปที่วัดนั้น หลังจากที่เขาได้วัดความยาวของด้านและวัดมุมแล้วเขาควรจะได้รับการช่วยเหลือในการตรวจสอบข้อมูลเพื่อพิจารณารูปแบบ นักเรียนแต่ละคนควรจะจดสิ่งที่เขาได้พบในกระดาษและแลกเปลี่ยนกระดาษที่วัดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้นกับคนอื่น ๆ แต่ละคนควรจะตรวจสอบสิ่งที่เป็นนามธรรมอีกครั้ง เพื่อจะได้ข้อมูลใหม่ ๆ ที่ยืนยันหรือต่อต้านข้อมูลเดิม



รูปที่ 7 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ในช่วงนี้นักเรียนควรจะได้หลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไปบางอย่างแล้ว นักเรียนแต่ละคนอาจจะเขียนประโยคที่คล้ายกับประโยคต่อไปนี้ "ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแล้ว..." ถ้าครูมีความประสงค์จะทำให้ภาษาที่ใช้นั้นดีขึ้นก็จะแนะนำ criterion task ก็จะแลก work sheet ซึ่งประกอบด้วยรูป คล้ายกับรูปข้างต้น ครูจะถามนักเรียนเพื่อจะได้ค้นหาข้อมูลที่ขาดหายไป

ลำดับขั้นย่อย ๆ ของการสอนที่เหมือนกับแบบนี้ เพื่อให้เห็นถึงคุณสมบัติของเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานก็สามารถนำมาใช้ได้กับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า, สี่เหลี่ยมจัตุรัส, และสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ถ้าในการวาดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้นนักเรียนวาดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า หรือสี่เหลี่ยมจัตุรัสแล้ว ครูจะใช้วิธีการพูดอย่างไรในการตักเตือนนักเรียนเพื่อให้เขาได้มองเห็นรูปทั่ว ๆ ไปได้

บทเรียนที่ 3

บทเรียนต่อไปนี้จะเกี่ยวกับการให้แนวความคิดของทฤษฎีจำนวนของนักเรียนมัธยมต้น ซึ่งพบว่ามันน่าสนใจบทเรียนนี้จะมีผลทำให้นักเรียนได้รับความรู้เกี่ยวกับจำนวนเฉพาะและตัวหาร

ถ้า $19 \times 19 = 361$ แล้ว $21 \times 17 = ?$

61 $30 \times 30 = 900$ แล้ว $32 \times 28 = ?$

ถ้า $40 \times 40 = 1,600$ แล้ว $42 \times 38 = ?$

ถ้านักเรียนสามารถตอบคำถามและแก้ปัญหาได้อย่างรวดเร็วแล้วครูก็น่าจะเชื่อได้ว่านักเรียนมองเห็นรูปแบบทางนามธรรมของตัวอย่างแล้ว ดังนั้นครูควรหันไปพิจารณาปัญหาต่อไปนี้

ถ้า $30 \times 30 = 900$ แล้ว $33 \times 27 = ?$

ถ้า $40 \times 40 = 1600$ แล้ว $43 \times 37 = ?$

ถ้า $25 \times 25 = 625$ แล้ว $28 \times 22 = ?$

ถ้านักเรียนไม่สามารถตอบคำถามเหล่านี้ หรือคำถามที่คล้ายกับปัญหานี้ โดยไม่ต้องใช้กระดาษและดินสอ ครูจะต้องแนะนำเพิ่มเติม จากตัวอย่างเหล่านี้

$6 \times 6 = ?$ $5 \times 5 = ?$

$9 \times 3 = ?$ $8 \times 2 = ?$

$7 \times 7 = ?$ $8 \times 8 = ?$

$10 \times 4 = ?$ $11 \times 5 = ?$

และในที่สุดนักเรียนจะสามารถตอบคำถามดังตัวอย่างต่อไปนี้ได้

ถ้า $60 \times 60 = 3,600$ แล้ว $64 \times 56 = ?$

ถ้า $70 \times 70 = 4,900$ แล้ว $75 \times 65 = ?$

ถ้า $18 \times 18 = 324$ แล้ว $22 \times 14 = ?$

ถ้า $40 \times 40 = 1,600$ แล้ว $47 \times 33 = ?$

ถ้าในบางตอนนักเรียนไม่สามารถตอบคำถามได้อย่างรวดเร็ว ครูอาจให้นักเรียนกลับไปดูคำถามที่มีลักษณะคล้ายกันได้

บทเรียนที่ 2

บทเรียนเกี่ยวกับเรขาคณิตต่อไปนี้ ควรจะนำไปให้นักเรียนทำภายหลังที่นักเรียนได้เรียน concept เกี่ยวกับเส้นขนานและสี่เหลี่ยมด้านขนานแล้ว บทเรียนนี้สร้างขึ้นเพื่อให้นักเรียนได้ค้นพบคุณสมบัติบางอย่างของสี่เหลี่ยมด้านขนาน นักเรียนแต่ละคนควรมีไม้บรรทัดและไม้โปรแตกเตอร์

ครูควรเริ่มจากการทบทวนเกี่ยวกับเส้นขนาน และสี่เหลี่ยมด้านขนาน ถ้านักเรียนสามารถเขียนเส้นขนานหรือสร้างเส้นขนานได้แล้ว ก็ควรให้เขาสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสัก