บทที่ 4

ความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์และฟังก์ชันทางพีชคณิต

(Economic Relationships and Algebraic Functions)

วัตถุประสงค์ : การนำตัวแปรมาสร้างความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์ ในรูปฟังก์ชันทางพีชคณิต ที่มีความสัมพันธ์ของตัวแปรตามกับตัวแปรอิสระตัวเดียว หลายตัว และที่มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นและไม่เป็นแบบเชิงเส้น ตลอดจนการแสดงผลในรูปพีชคณิตและรูปกราฟ

บทที่ 4

ความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์ และ ฟังก์ชันทางพีชคณิต

(Economic Relationships and Algebraic Functions)

4.1 บทนำ

ในการสร้างแบบจำลอง เมื่อนักศึกษามีเป้าหมายและสามารถหากรอบแนวคิด ทฤษฎีได้แล้ว หมายความว่าขณะนี้นักศึกษาสามารถคัดเลือกตัวแปรต่าง ๆ ที่จะนำมาสร้างความสัมพันธ์เพื่อใช้ในการวิเคราะห์เพื่อตอบปัญหาต่อไป

4.2 ความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์ (Economic Relationships)

ความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์นั้น จะเริ่มพิจารณาจากความสัมพันธ์อย่างง่ายซึ่งประกอบด้วยตัวแปรตาม 1 ตัว และอิสระ 1 ตัว จากนั้นก็จะเริ่มมีความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนขึ้นโดยอาจจะประกอบด้วยตัวแปรตาม 1 ตัวและตัวแปรอิสระ มากกว่า 1 ตัว และสุดท้ายจะเป็นความสัมพันธ์แบบเกี่ยวเนื่องโดยจะมีชุดสมการที่ประกอบด้วยตัวแปรตามหลายตัว(เท่ากับจำนวนสมการที่สร้างขึ้น) และตัวแปรอิสระหลายตัวซึ่งจะมีความสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องกันตัวอย่างความสัมพันธ์ทางเศรษฐ-ศาสตร์ เช่น

4.2.1 Production Function

ชาวนาปลูกข้าวในที่ดินแปลงหนึ่ง เขาจะสามารถทำให้ผลผลิตเพิ่มขึ้นได้โดยการใส่ปุ๋ย ดังตารางที่ 3.3 แสดงให้เห็นว่าเขาจะมีผลผลิตสูงสุดจากการใส่ปุ๋ยที่ 70 ถังต่อไร่ใส่ปุ๋ย 5-6 กิโลกรัม ต่อไร่ ถ้าชาวนาท่านนี้ใส่ปุ๋ยมากเกินไปเช่นใส่ขนาด 7 กิโลกรัมต่อไร่ จะทำให้ต้นข้าวบางส่วนตายไปเนื่องจากได้รับปุ๋ยมากเกินไปทำให้ผลผลิตต่อไร่ลดลง

ความสัมพันธ์ของปัจจัยเข้า(Input) และปัจจัยออก(Output) ดังแสดงในตารางที่ 4.1 เรียกว่า Production Function โดยมีตัวแปรอิสระ (independent variable) คือปุ๋ยและตัวแปรตามคือ (dependent variable) คือผลผลิต

ตารางที่ 4.1 แสดงความสัมพันธ์ของผลผลิตข้าวต่อจำนวนปุ๋ย

จำนวนปุ๋ยที่ใช้(X) (กิโลกรัม/ไร่)	ผลผลิตข้าวที่ได้ (Y) (ถัง/ไร่)
0	40
1	50
2	58
3	64
4	68
5	70
6	70
7	68
8	65

4.2.2 Consumption Function

สมมติว่า ชายคนหนึ่ง มีรายได้ 100,000 บาทต่อปี เขาต้องเสียภาษีจำนวน 20,000บาท เก็บออมไว้จำนวน 30,000 บาท ที่เหลือจำนวน 50,000 บาท เขานำไปใช้เพื่อการบริโภค เช่น เป็นค่าอาหาร ค่าเสื้อผ้า ค่าการศึกษาของบุตร และค่าใช้จ่าย อื่น ๆ อะไรจะเกิดขึ้น ถ้ารายได้ของชายผู้นี้ลดลงเหลือ 70,000 บาท ต่อปี อาจเป็นไปได้ว่าหลังจากหักภาษี และเก็บออมแล้ว เขาจะเหลือเงินสำหรับใช้เพื่อการบริโภคเพียง 40,000บาท และในทางกลับกัน ถ้าชายผู้นี้มีรายได้สูงขึ้นเป็น 160,000 บาทต่อปี หลังจากหักภาษีและเก็บออมไว้ส่วนหนึ่งแล้วเขาจะมีเงินสำหรับใช้จ่ายเป็น 70,000 บาทจากความสัมพันธ์ของรายได้กับค่าใช้จ่ายของชายผู้นี้สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.2

ความสัมพันธ์ระหว่างการบริโภคกับรายได้ของชายผู้นี้แสดงดังตารางที่ 4.2 เราเรียกว่า Consumption Function โดยเราเรียกตัวรายได้ว่าเป็นตัวแปรอิสระ(independent variable) และการบริโภค เป็นตัวแปรตาม (dependent variable)

ตารางที่ 4.2 แสดงความสัมพันธ์ของรายได้และค่าใช้จ่ายในการบริโภค

รายได้ (Y) ต่อปี	การบริโภค (C) ต่อปี
40,000	30,000
70,000	40,000
100,000	50,000
130,000	60,000
160,000	70,000
190,000	80,000
220,000	90,000
250,000	100,000
280,000	**110,000**
310,000	120,000
340,000	130,000

4.2.3 Demand Function

สมมติว่าแม่บ้านผู้หนึ่งซื้อมันฝรั่งไว้บริโภค ภายในครัวเรือนทุกสัปดาห์โดยปริมาณการซื้อของแม่บ้านผู้นี้ขึ้นอยู่กับราคามันฝรั่งเพียงอย่างเดียว โดยไม่ต้องคำนึงถึงตัวแปรตัวอื่น ๆ ด้วยกฎเกี่ยวกับอุปสงค์ ที่ว่าราคาสูงขึ้นจะซื้อปริมาณน้อยลง และในทางกลับกันถ้าราคาลดลงก็จะซื้อมากขึ้น สมมติว่าเราทำการเก็บข้อมูลพฤติกรรมการซื้อมันฝรั่งของแม่บ้าน ผู้นี้เป็นจำนวนหลาย ๆ สัปดาห์ โดยทำการบันทึก ราคามันฝรั่งที่สัมพันธ์กับปริมาณซื้อของแม่บ้านผู้นี้ ถ้าเก็บข้อมูลจำนวน 6 สัปดาห์ ดังตารางที่ 4.3 ต่อไปนี้

ตารางที่ 4.3 แสดงปริมาณการซื้อมันฝรั่ง สัมพันธ์กับราคาของแม่บ้านผู้หนึ่ง

วันที่	ราคามันฝรั่ง (บาท/กิโลกรัม)	ปริมาณซื้อมันฝรั่ง (กิโลกรัม)
5 มี.ค. 2543	6	2
12 มี.ค. 2543	4	3
19 มี.ค. 2543	0	5
26 มี.ค. 2543	2	4
2 เม.ย.2543	10	0
9 เม.ย.2543	8	1

ตารางข้างต้นนี้ แสดงถึงปริมาณการซื้อมันฝรั่ง เมื่อราคามันฝรั่ง เปลี่ยนแปลงไปในระดับต่าง ๆ กัน เมื่อเวลาเปลี่ยนไป แต่ถ้าเวลาเดียวกันและราคาเปลี่ยนแปลงในตลาดต่าง ๆ กัน ก็สามารถ เขียนตาราง ความสัมพันธ์นี้ได้ใหม่ดังตารางที่ 4.4 ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ของราคาและปริมาณ ซึ่งก็คือทฤษฎีอุปสงค์ที่นักศึกษารู้จักกันดีนั่นเอง

ตารางที่ 4.4 แสดงความสัมพันธ์ของราคามันฝรั่งกับปริมาณการซื้อ

ราคามันฝรั่ง (บาท / กิโลกรัม)	ปริมาณมันฝรั่ง (กิโลกรัม)
0	5
2	4
4	3
6	2
8	1
10	0

ตารางที่ 4.4 แสดงให้เห็นว่าโดยทั่วไปแล้ว เมื่อราคาสินค้า(ในที่นี้คือมันฝรั่ง) เปลี่ยนแปลงไประหว่าง 0 ถึง 10 จะทำให้ปริมาณของสินค้า เปลี่ยนแปลงไปด้วยโดยกรณีนี้จะเปลี่ยนแปลงจาก 5 ถึง 0 ความสัมพันธ์ของ 2 สิ่งนี้ คือ ราคากับปริมาณการซื้อ สามารถแสดงให้เห็นว่าเป็นตัวแปร

ทางด้านเศรษฐศาสตร์ เพราะว่าตัวแปรทั้ง 2 ตัวนี้ สามารถวัดค่าออกเป็นจำนวนนับได้ และมีความสัมพันธ์ที่แน่นอน คือ ในระดับราคาหนึ่ง ๆ สามารถหาปริมาณซื้อได้ แน่นอน

ปริมาณความต้องการซื้อขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของราคา ดังนั้นเราจะเรียกปริมาณว่าเป็นตัวแปรตาม (Dependent variable) สำหรับระดับราคาจะเป็นตัวกำหนดปริมาณซื้อ จึงจะเรียกว่าตัวแปรอิสระ (independent variable)

4.3 การใช้สัญลักษณ์ (Use of Symbols)

ในการอธิบายความหมายของตัวแปรต่าง ๆ เราอาจจะใช้สัญลักษณ์แทน ตัวแปรเพื่อใช้เรียกตัวแปรที่เรากำลังพิจารณา เช่น จากตัวอย่าง Production function

ให้ Y = ปริมาณของข้าวที่เก็บเกี่ยวได้มีหน่วยเป็นถังต่อไร่

X = ปริมาณปุ๋ยที่ใช้มีหน่วยเป็นกิโลกรัมต่อไร่

หรือ จากตัวอย่าง Consumption Function

ให้ C = ปริมาณการใช้จ่ายเพื่อการบริโภค มีหน่วยเป็น บาทต่อปี

Y = รายได้ต่อปี มีหน่วยเป็น บาทต่อปี

หรือ จากตัวอย่าง Demand Function

ให้ Q = ปริมาณมันฝรั่ง มีหน่วยเป็น กิโลกรัม

P = ราคามันฝรั่ง มีหน่วยเป็น บาทต่อ กิโลกรัม

ในการเขียนสัญลักษณ์บางครั้งเราอาจจะเขียนตัวห้อย (Subscripts) เพื่อบ่งบอกถึงชุดของตัวแปร เช่น ราคาของแอปเปิล ราคากล้วย และราคาของแครอท เราอาจเขียนแทนด้วย P_a, P_b และ P_c ตามลำดับและสัญลักษณ์ตัวห้อย (Subscripts) ยังสามารถ แสดงถึงความเฉพาะของสิ่งของได้ด้วย เช่น M_i หมายถึง มูลค่าการนำเข้าสุทธิ เป็นรายได้ (net imports) โดยสัญลักษณ์ i หมายถึงเดือน ต่าง ๆ เช่น i = 1,2,3,....,12 โดย 1 หมายถึง เดือนมกราคม 2 หมายถึง เดือนกุมภาพันธ์ เป็นเช่นนี้เรื่อยไป ดังนั้น M_5 หมายถึง มูลค่าของการนำเข้าสุทธิ ของเดือนพฤษภาคม เป็นต้น

สัญลักษณ์ บางอย่างจะใช้เป็นการเฉพาะซึ่งจะมีความหมายเจาะจงเป็นที่ทราบกันโดยทั่วไป เช่น

Σ (Greek Capital sigma) หมายถึง ผลรวมของ

π (Greek Lower case pi) หมายถึง ค่าคงที่เท่ากับ 3.14159...

A (Greek Capital delta) หมายถึง การเปลี่ยนแปลง

d (Roman Lower case D) หมายถึง การ differentiation

e (Roman Lower case E) ค่าคงที่เท่ากับ 2.71828.. .

สำหรับทางด้านเศรษฐศาสตร์ ก็มีสัญลักษณ์ เป็นการจำเพาะเช่นกัน โดยเมื่อพบ สัญลักษณ์เหล่านี้ก็จะ เป็นการทราบโดยทั่วไปว่า หมายถึง อะไร เช่น

C	=	Consumption	(การบริโภค)
I	=	Investment	(การลงทุน)
G	=	Government expenditure	(การใช้จ่ายของรัฐบาล)
S	=	Savings	(การออม)
Y	=	Income	(รายได้)
P	=	Price	(ราคา)
Q	=	Quantity	(ปริมาณ)

แต่อย่างไรก็ตามเราก็สามารถที่จะกำหนดสัญลักษณ์ขึ้นมาใช้เองได้ แต่ทั้งนี้จะต้องให้ความหมายของสัญลักษณ์ ที่กำหนดขึ้นมาให้ชัดเจนเพื่อคนทั่วไปจะได้เข้าใจด้วยว่า หมายถึงอะไร

4.4 ฟังก์ชันความสัมพันธ์ที่มีตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว

(Function of One Exogenous Variable)

จากตัวอย่าง 4.2.1 4.2.2 และ 4.2.3 แสดงให้เห็นว่า ตัวแปรตามแต่ละตัวจะถูกกำหนดขึ้นโดยตัวแปรอิสระแต่ละตัว โดยถ้ากำหนดค่าของตัวแปรอิสระให้ค่าหนึ่งก็สามารถหาค่าของตัวแปรตามที่มีความสัมพันธ์กันได้ค่าหนึ่ง จากตัวอย่างในตารางที่ 4.1 4.2 และตารางที่ 4.3 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ บางอย่างทางด้านเศรษฐศาสตร์ด้วย เช่น

ตัวอย่าง 4.2.1 : ปริมาณผลผลิตข้าวที่ชาวนาเก็บเกี่ยวได้ เป็นฟังก์ชัน กับปริมาณ ปุ๋ยที่ใช้

ตัวอย่าง 4.2.2 : ระดับการใช้จ่ายเพื่อการบริโภค เป็นฟังก์ชัน กับรายได้ของ หัวหน้าครอบครัว

ตัวอย่าง 4.2.3 : ปริมาณความต้องการซื้อมันฝรั่ง เป็นฟังก์ชัน กับราคาของมันฝรั่ง

ซึ่งในทางเศรษฐศาสตร์แล้วคำว่าฟังก์ชัน (Function) จะหมายถึง “ความสัมพันธ์” เช่น อาจจะ หมายถึง ความสัมพันธ์ของตัวแปรตัวหนึ่ง หรือ หลายตัวที่มีต่อตัวแปรอีกตัวหนึ่ง

4.5 การเขียนสัญลักษณ์แทนฟังก์ชัน

จากตัวอย่าง 4.2.1 4.2.2 และ 4.2.3 เราทราบแล้วว่า แต่ละตัวแปรมีความสัมพันธ์กันและสามารถให้สัญลักษณ์ แทนตัวแปร แต่ละตัวได้ ดังนั้น ถ้าเราจะเขียนความสัมพันธ์ของแต่ละตัวอย่างในรูปของสัญลักษณ์ทั้งหมดก็สามารถเขียนได้ เช่น

จากตัวอย่าง 4.2.1 อาจเขียนได้ว่า

$$Y = f(x)$$

มีความหมายว่า" ตัวแปร Y (จำนวนผลผลิตข้าว) เป็นฟังก์ชันกับตัวแปร X (จำนวนปุ๋ย)

จากตัวอย่าง 4.2.2 เขียนได้ว่า

$$C = h(Y)$$

มีความหมายว่า " ตัวแปร C (การใช้จ่ายเพื่อการบริโภค) เป็นฟังก์ชันกับตัวแปร Y (รายได้)

จากตัวอย่าง 4.2.3 เขียนได้ว่า

$$Q = g(P)$$

มีความหมายว่า " ตัวแปร Q (ปริมาณการซื้อมันฝรั่ง) เป็นฟังก์ชันกับตัวแปร P (ราคามันฝรั่ง)

ขอให้สังเกตสมการที่สร้างขึ้นแต่ละสมการ จะเห็นว่า ถ้ากำหนดค่าตัวแปรอิสระ ในแต่ละสมการได้ก็จะสามารถหาค่าของตัวแปรตามในแต่ละสมการได้โดย ตัวแปรอิสระจะหมายถึงตัวแปรที่อยู่ในวงเล็บทางขวามือ และสัญลักษณ์ f หรือ h หรือ g ที่อยู่หน้าวงเล็บ แสดงว่า ตัวแปรทั้งสองของสมการมีความสัมพันธ์กัน โดยการที่ใช้สัญลักษณ์ f หรือ h หรือ g ที่ต่างกันเพื่อแสดงให้เห็นว่าในแต่ละกรณีนั้น ความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระ และตัวแปรตาม ในแต่ละสมการมีลักษณะที่แตกต่างกันไป

4.6 การกำหนด ค่าให้ Function

จากตัวอย่างฟังก์ชันการบริโภค C = h (Y) เราทราบว่าถ้ารายได้สูงขึ้นจะทำให้สามารถบริโภคมากขึ้น และถ้ารายได้ลดลง การบริโภคจะลดลงซึ่งเป็นความสัมพันธ์กันในเชิงคุณลักษณะ ซึ่งเรายังไม่สามารถกำหนดค่าที่แท้จริงได้ แต่ถ้าเราต้องการทราบว่าถ้ารายได้ เปลี่ยนแปลงไปจำนวนหนึ่งแล้ว จะทำให้การบริโภคเปลี่ยนแปลงไปเท่าใด เราจำเป็นต้องสร้างความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ ให้เห็นอย่างชัดเจน เช่น เราอาจจะเขียนเป็นสมการได้ว่า $C = 0.7\ Y$ หมายความว่า ถ้ามีรายได้ 10,000 บาท เราจะสามารถทำการบริโภคได้จำนวน 7,000 บาท ซึ่งเราอาจจะพูดได้ว่า ถ้ากำหนดค่าให้กับตัวแปรอิสระแล้ว เราก็จะสามารถคำนวณหาค่าของตัวแปรตาม ได้จากความสัมพันธ์ ที่เรามีอยู่

4.7 Inverse Function and the Problem of Causality

โดยปกติแล้วจะเขียนความสัมพันธ์ของสมการด้วยการเขียนตัวแปรตาม ไว้ทางซ้ายมือ และตัวแปรอิสระไว้ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ และในความหมายทางเศรษฐศาสตร์แล้ว ความสัมพันธ์ของตัวแปรจะมีความสัมพันธ์ทางเดียวคือเกิดจากทางขวามือไปทางซ้ายมือ

แต่ความหมายของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์แล้วจะไม่ได้กำหนดความสัมพันธ์เหมือนทางเศรษฐศาสตร์ โดยทางคณิตศาสตร์แล้วจะแสดงความหมายของความสัมพันธ์ของตัวแปรทางซ้ายกับทางขวาเท่ากันเท่านั้น โดยไม่ได้ให้ความสัมพันธ์ว่าตัวแปรตามทางซ้ายจะต้องเกิดขึ้นจากตัวแปรอิสระทางขวาแต่อย่างไร

เช่น สมการ $C = 0.7Y$

ในทางเศรษฐศาสตร์มีความหมายว่าเมื่อมีรายได้ (Y) 1 ส่วนจะสามารถนำไปใช้เพื่อการบริโภค (C) 0.7 ส่วน แต่ถ้าเขียนสมการใหม่เป็น $Y = 1/0.7\,C$ ในทางเศรษฐศาสตร์เราไม่อาจจะอธิบายว่าถ้าบริโภค (C) จำนวน 1/0.7 ส่วน แล้วจะทำให้เกิดรายได้ (Y) จำนวน 1 ส่วน แต่สำหรับทางคณิตศาสตร์แล้วสามารถเขียนได้ และยังมีการใช้สัญลักษณ์แทนลักษณะของความสัมพันธ์ในทางกลับกันเช่นนี้ ซึ่งเรียกว่า inverse function

เช่น เดิม $C = h(Y)$

ถ้าเป็น Inverse function สามารถเขียนได้ใหม่ว่า

$$Y = h^{-1}(C)$$

4.8 Implicit and Explicit Functions

จากสมการ $C = 0.7Y$

ซึ่งเป็นสมการ explicit function คือ สามารถกำหนดได้อย่างชัดเจนว่าตัวแปรทางซ้ายมือมีความสัมพันธ์อย่างไรกับตัวแปรทางขวามือ ถ้าเขียนใหม่เป็น

$$C - 0.7Y = 0$$

เราจะเรียกสมการที่เขียนใหม่ว่าเป็นสมการ Implicit function ซึ่งสมการนี้จะแสดงให้เห็นว่ามีความสัมพันธ์กันระหว่าง C กับ Y โดยมีตัวแปรตัวหนึ่งเป็นตัวแปรตาม (dependent variable) ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปรอีกตัวหนึ่งที่เรียกว่า ตัวแปรอิสระ(independent variable) เมื่อพิจารณาเฉพาะสมการนี้โดยอาศัยทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์ประกอบ จะทราบได้ทันทีว่าตัวแปรตามควรจะเป็นตัว C และตัวแปรอิสระควรจะเป็นตัว Y โดยทั่วไปแล้ว สามารถเขียน implicit function ได้ดังนี้

$$F(C,Y) = 0$$

โดยสัญลักษณ์ F แสดงถึงความเป็น implicit function และ C กับ Y แสดงถึงตัวแปรตัวหนึ่งเป็นตัวแปรตาม(dependent variable) และตัวแปรอีกตัวหนึ่งที่เหลือเป็นตัวแปรอิสระ (Independent variable)

4.9 การแสดงผลความสัมพันธ์

4.9.1 การแสดงผลในรูปพีชคณิต

จากตัวอย่างความสัมพันธ์ที่อธิบายในหัวข้อที่ผ่านมา ได้ความสัมพันธ์ของการบริโภค กับรายได้ ที่สามารถเขียนในรูปฟังก์ชัน ทั่ว ๆ ไป ได้คือ

$$C = h(Y)$$

ถ้าหากต้องการทราบความสัมพันธ์โดยเฉพาะเจาะจงของครอบครัวใดครอบครัวหนึ่งเราจะสามารถแสดงความสัมพันธ์ เช่น

$$C = 0.7Y$$

ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ให้เห็นอย่างชัดเจนว่าทุก ๆ ระดับมูลค่า Y จะมีความสัมพันธ์กับมูลค่า C โดยการนำมูลค่า Y ในระดับนั้น ๆ ไปคูณด้วย จำนวน 0.7 ดังสมการที่ 2

โดยค่า 0.7 นั้นเรียกว่าค่าพารามิเตอร์(parameter) หรือค่าสัมประสิทธิ์(coefficient)ซึ่งค่านี้สามารถคำนวณได้โดยวิธีการทางเศรษฐมิติซึ่งจะได้ศึกษาในบทต่อไป

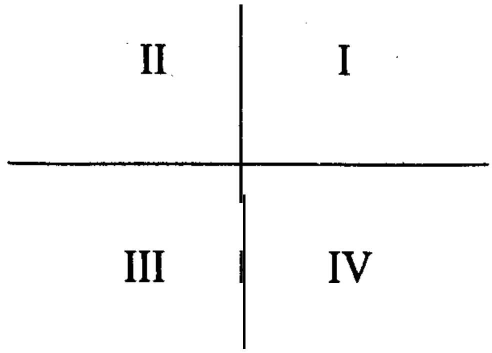
4.9.2 การแสดงผลในรูปกราฟ

การแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรในรูปกราฟจะมีข้อจำกัดทางด้านมิติ เพราะจะต้องใช้ 1 มิติ สำหรับตัวแปร 1 ตัว ดังนั้นถ้าแสดงกราฟในรูป 2 มิติก็จะสามารถแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรได้เพียง 2 ตัว และข้อจำกัดอีกอย่าง คือ รูปกราฟสามารถแสดงค่าความสัมพันธ์ที่เฉพาะเจาะจงเท่านั้น(specific Algebraic function) ไม่สามารถแสดงความสัมพันธ์ในลักษณะที่เป็นสมการทั่วไปได้

4.9.3.1 การเลือกแกนสำหรับตัวแปร

แกนสำหรับตัวแปรจะใช้แกนนอนสำหรับตัวแปรอิสระ และแกนตั้งสำหรับตัวแปรตาม รูปที่ 4.1 แสดงความสัมพันธ์ของแกนตั้งกับแกนนอน โดยจุดที่ตัดกัน เรียกว่า จุดกำเนิด (Origin) คือจุดที่แสดงค่าเป็น 0 (ศูนย์) ของทั้งตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม สำหรับค่าต่าง ๆ ตามแกนตั้งที่อยู่เหนือจุดกำเนิด (origin) ขึ้นไปจะมีค่าเป็นบวก ถ้าหากอยู่ต่ำกว่าจุดกำเนิดจะมีค่าเป็นลบ และสำหรับค่าต่าง ๆ ตามแกนนอน จะให้ค่าที่อยู่ทางขวามือของจุดกำเนิดมีค่าเป็นบวก ส่วนค่าที่อยู่ทางซ้ายมือของจุดกำเนิดจะมีค่าเป็นลบ จากรูปจะเห็นว่าพื้นที่จะถูกแบ่งเป็น 4 ส่วน ด้วยแกนที่ตัดกัน 2 แกน โดยส่วนที่ 1 (Quadrant I) จะตั้งอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ ซึ่งจะเป็นส่วนที่ตัวแปรทั้งคู่จะมีค่าเป็นบวกสำหรับส่วนที่ 2 (quadrant II) ซึ่งจะแสดงให้เห็นว่าค่าของตัวแปรอิสระจะเป็นลบในขณะที่ค่าของตัวแปรตามจะเป็นบวก สำหรับส่วนที่ 3 (quadrant III) จะตั้งอยู่ทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ ในส่วนนี้ค่าของทั้งตัวแปรตามและตัวแปรอิสระ จะมีค่าเป็นลบ และ ส่วนที่ 4 (quadrant

IV)จะอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ โดยค่าของตัวแปรอิสระในส่วนนี้จะแสดงค่าเป็นบวกในขณะที่ค่าของตัวแปรตามจะมีค่าเป็นลบ



รูปที่ 4.1 แสดงความสัมพันธ์ของแกนตั้งกับแกนนอน

4.9.3.2 การพล็อตจุด

สมมติว่าสมการต่อไปนี้คือ $T = (0.4 - 0.01\,P)\,P$

$$T = 0.4\,P - 0.01\,P^2$$

แสดงความสัมพันธ์ของจำนวนภาษีที่ต้องชำระขึ้นอยู่กับจำนวนผลกำไรที่ได้รับโดย

T = จำนวนภาษีทั้งหมด

P = ผลกำไร ที่ได้รับ

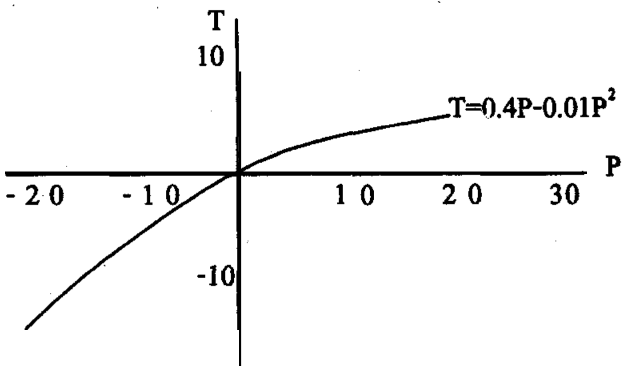
ถ้า P มีค่าเป็นลบ หมายถึง ผลขาดทุน และ ถ้า T มีค่าเป็นลบ หมายถึงจำนวนเงินที่รัฐบาลให้การอุดหนุน (subsidy)

การที่จะสามารถพล็อตจุดลงเป็นกราฟได้ จะต้องทำการคำนวณค่าของตัวแปร จากสมการเสียก่อน ในที่นี้ให้ P เป็นตัวแปรอิสระมีค่าอยู่ระหว่าง –20 ถึง 20 และค่า T คือ ตัวแปรตาม จะมีค่าสัมพันธ์กับค่า P ที่กำหนดให้ซึ่งแสดงดังตารางที่ 4.5 ต่อไปนี้

ตารางที่ 4.5 แสดงความสัมพันธ์ของค่า P และ T

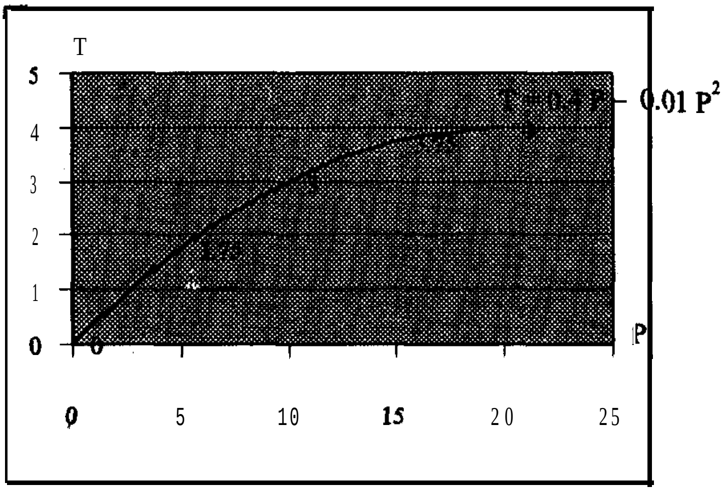
P	ค่า T ที่ได้จากการคำนวณ	ค่า Cooidinate คือ
-20	(0.4X –20)-(0.01×-20×-20) = -12	(-20,-12)
-10	(0.4×-10)-(0.01×-10×-10) = - 5	(-10,-5)
0	(0.4×0)-(0.01×0×0) = 0	(0,0)
10	(0.4×10)-(0.01×10×10) = 3	(143)
20	(0.4×20)-(0.01×20×20) = 4	(20.4)

จากค่า Coordinate ที่คำนวณได้ สามารถนำไปพล็อต จุดได้กราฟดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 แสดงการพล็อตกราฟความสัมพันธ์ของค่า P และ T

ในทางเศรษฐศาสตร์แล้วบางครั้งเราจะสนใจเฉพาะมูลค่าของตัวแปรที่มีค่าเป็นบวกดังนั้น ถ้าพิจารณา สมการข้างต้น เฉพาะช่วงที่ตัวแปรอิสระ และตัวแปรตามเป็นบวก จะสามารถเขียนในรูปใหม่ได้เป็น



รูปที่ 4.3 แสดงกราฟความสัมพันธ์ของค่า P กับ T ที่ไม่ใช่เส้นตรง

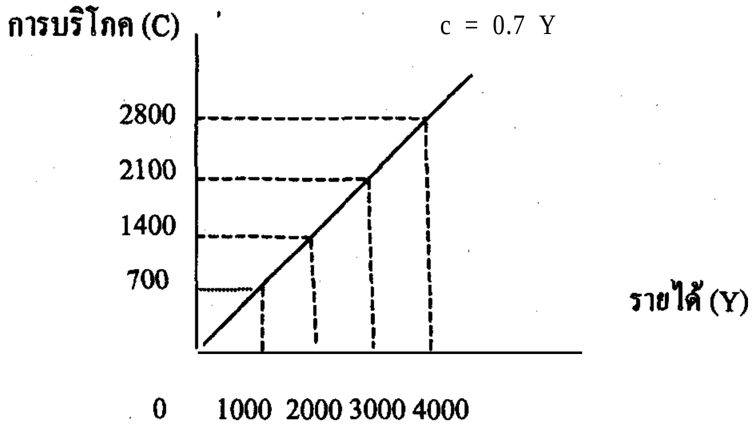
กราฟที่เห็นจะมีลักษณะเป็น เส้นโค้งเราจะเรียกว่าเป็นกราฟของสมการที่ไม่ใช่เส้นตรง (Nonlinear) แต่ถ้าเป็นกราฟที่เป็นเส้นตรงเช่น

กราฟของสมการ $C = 0.7Y$

สามารถแสดงความสมพันธ์ของ Y และ C ได้ถ้ากำหนดค่า Y ต่าง ๆ ให้ดังนี้

ตารางที่ 4.6 แสดงความสัมพันธ์ของค่า C และ Y

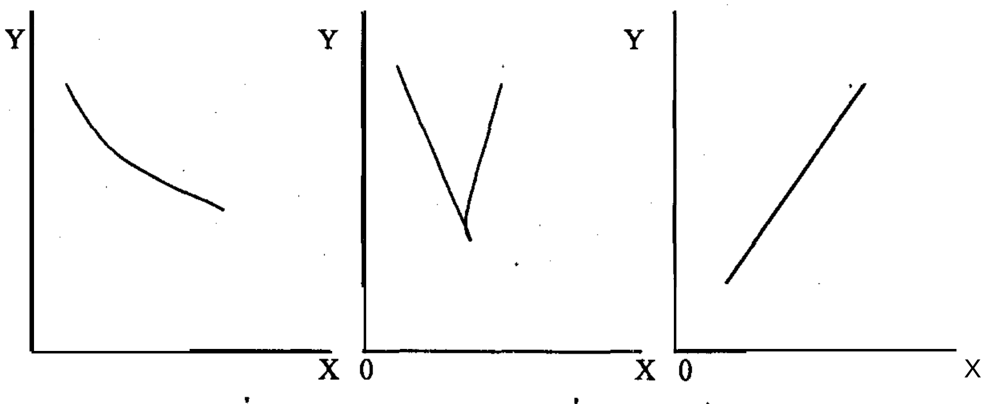
Y	c ที่ได้จากการคำนวณ	ค่า Coordinate
0	0.7×0= 0	(0,0)
1000	0.7x 1000= 700	(1000,700)
2000	0.7X2000' 1400	(2000,1400)
3000	0.7x3000= 2100	(3000,2100)
4000	0.7×4000= 2800	(4000,2800)



รูปที่ 4.4 แสดงกราฟที่เป็นลักษณะสมการเส้นตรง

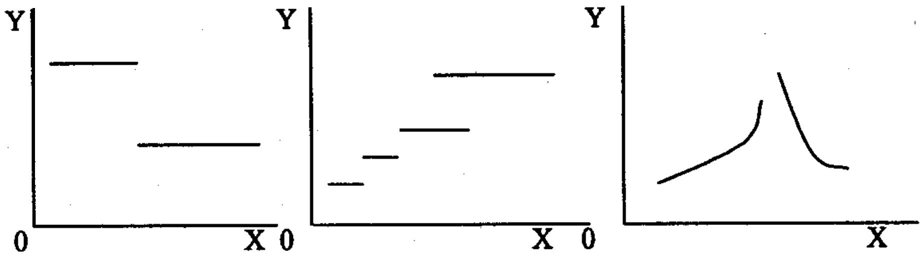
4.9.3 กราฟแสดงความต่อเนื่องและไม่ต่อเนื่อง

4.9.3.1 ลักษณะของกราฟต่อไปนี้แสดงให้เห็นความต่อเนื่องของฟังก์ชัน



รูปที่ 4.5 แสดงลักษณะความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

4.9.3.2 กราฟต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของกราฟที่ไม่ต่อเนื่อง คือ จะขาดเป็นช่วง ๆ หรือ มีการกระโดด อาจจะเป็นด้านแนวดิ่ง หรือ แนวนอน ก็ได้



รูปที่ 4.6 แสดงลักษณะความไม่ต่อเนื่องของฟังก์ชัน

สำหรับฟังก์ชันที่จะแสดงให้เห็นว่าเป็นฟังก์ชั่นที่มีความต่อเนื่องกันนั้นสามารถสรุปเป็นข้อสังเกตุได้ 2 ประการ คือ

1. ตัวแปรในฟังก์ชันจะต้องเป็นตัวแปรที่มีความต่อเนื่อง
2. ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้องเป็นความสัมพันธ์ที่มีความต่อเนื่องกันด้วย

ในการวิเคราะห์ทางเศรษฐศาสตร์นั่น บ่อยครั้งที่พบว่าฟังก์ชันความสัมพันธ์ของตัวแปรเป็นความสัมพันธ์แบบไม่ต่อเนื่อง แต่เนื่องจากการวิเคราะห์ต้องอาศัยความสัมพันธ์ที่เป็นแบบต่อเนื่อง (Continuous) จึงเห็นได้บ่อย ๆ ว่ามีการสมมติให้ตัวแปรที่ว่านี้มีความสัมพันธ์เป็นแบบต่อเนื่องได้ เช่น การที่จะแสดงความสัมพันธ์ของรายได้ขึ้นอยู่กับจำนวนสมาชิก ในครัวเรือน จะพบว่าตัวแปรรายได้ เป็นตัวแปรต่อเนื่อง ส่วนตัวแปรจำนวนสมาชิก จะเป็นได้เฉพาะจำนวนเต็ม 0,1,2,3,...ซึ่งแสดงถึงว่าเป็นตัวแปรที่ไม่ต่อเนื่อง ดังนั้นความสัมพันธ์ดังกล่าวจึงควรจะเป็นความสัมพันธ์แบบไม่ต่อเนื่องแต่ด้วยเหตุผลของการวิเคราะห์ทางเศรษฐศาสตร์ จะมีการสมมติให้ ตัวแปรขนาดของจำนวน สมาชิกในครัวเรือน เป็นตัวแปรลักษณะต่อเนื่อง

4.10 การทำนายหรือพยากรณ์ค่าจากฟังก์ชัน (Prediction from Simple Function)

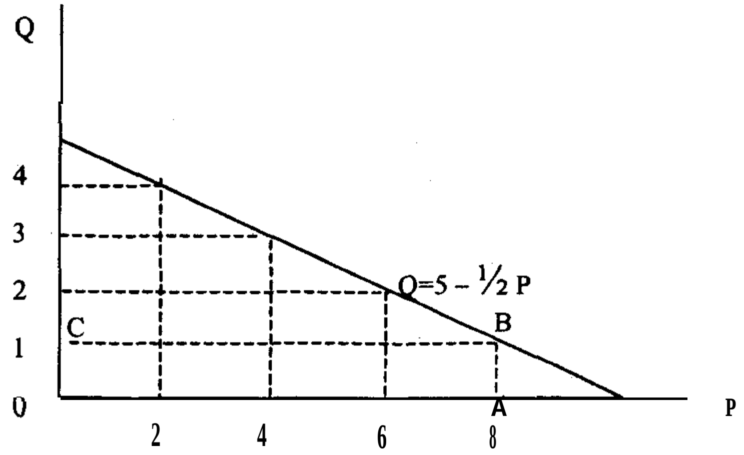
ฟังก์ชันที่แสดงในรูปพีชคณิตหรือในรูปกราฟ สามารถนำมาใช้ในการทำนายค่าหรือการพยากรณ์ค่าได้ โดยการกำหนดค่าให้กับตัวแปรอิสระก็จะสามารถคำนวณค่าของตัวแปรตามได้จากความสัมพันธ์ทางพีชคณิตได้ เช่น สมมติมีสมการความต้องการซื้อส้มของชายผู้หนึ่งเป็นดังนี้

$$Q = 5 - \tfrac{1}{2} P$$

ถ้ากำหนดให้ราคาส้มซึ่งเป็นตัวแปรอิสระมีค่า เท่ากับ 8 บาท จะสามารถ ทำนายหรือพยากรณ์ ได้ว่าความต้องการซื้อส้มของชายผู้นี้จะเป็น

$$Q = 5-(1/2)(8) = 1 \quad \text{กิโลกรัม}$$

การทำนายหรือพยากรณ์ปริมาณการซื้อส้มของชายผู้นี้จะสามารถใช้รูปกราฟเป็นเครื่องมือในการทำนายได้



รูปที่ 4.7 แสดงการพยากรณ์ปริมาณการซื้อส้มเมื่อทราบราคาด้วยกราฟ

โดยจากกราฟ ที่ราคา P = 8 ลากเส้น AB ตั้งฉากกับแกน P ตัดกราฟ ที่จุด B จากนั้น จากจุด B ลากเส้นขนานกับแกนนอน P ไปตัดแกนตั้ง Q ที่จุด C อ่านค่าตรงจุด C จะเป็นค่าทำนายซึ่งจะปรากฏว่าที่ราคา P = 8 บาท จะได้ปริมาณความต้องการซื้อส้มที่ 1 กิโลกรัม ซึ่งมีค่าตรงกับวิธีทางพีชคณิตเช่นกัน

4.11 ฟังก์ชันความสัมพันธ์ที่มีตัวแปรอิสระหลายตัว

(Function of several exogenous variable)

จากหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึง ความสัมพันธ์ของตัวแปรเพียง 2 ตัว คือ ตัวแปรตาม 1 ตัว และตัวแปรอิสระ 1 ตัว โดยกล่าวว่า ผลผลิตข้าวของชาวนา ขึ้นอยู่กับปริมาณการใส่ปุ๋ย หรือระดับการใช้จ่าย เพื่อการบริโภค เปลี่ยนแปลงไปตามรายได้ ของหัวหน้าครัวเรือน และปริมาณความต้องการซื้อมันฝรั่งของแม่บ้านขึ้นอยู่กับ หรือเปลี่ยนแปลงไปตามราคามันฝรั่ง

จะเห็นว่าการที่ฟังก์ชันความสัมพันธ์ขึ้นอยู่กับหรือเปลี่ยนแปลง ไปตามตัวแปรเพียงตัวเดียว ดูเหมือนจะไม่เพียงพอที่จะอธิบาย ตัวแปรตามที่เกิดขึ้นจริงได้ เช่น ความต้องการซื้อมันฝรั่งไม่น่าจะเปลี่ยนแปลงตามราคามันฝรั่งเท่านั้น แต่น่าจะมีองค์ประกอบอื่นร่วมด้วย เช่นต้องมีรายได้อาจจะมีราคาสินค้าชนิดอื่น ที่สามารถใช้ทดแทนมันฝรั่ง เช่นราคาของข้าว หรืออาจจะเปลี่ยนไปตามรสนิยม หรืออื่น ๆ ได้อีกมากมาย ดังนั้นเราอาจจะสร้างความสัมพันธ์ของปริมาณความต้องการซื้อมันฝรั่งที่มีตัวแปรที่น่าจะเกี่ยวข้อง เพื่อให้เกิดความชัดเจนได้ดังนี้

$$Q = f(P,Y,R,T) \quad (4.1)$$

โดย Q = ปริมาณความต้องการซื้อมันฝรั่งในแต่ละสัปดาห์ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

P = ราคามันฝรั่ง มีหน่วยเป็นบาทต่อกิโลกรัม

Y = รายได้ของครอบครัว มีหน่วยเป็นบาท

R = ราคาข้าว มีหน่วยเป็น บาทต่อกิโลกรัม

T = รสนิยม

สมการที่ 4.1 สามารถอธิบายได้ว่า ปริมาณความต้องการซื้อมันฝรั่งไม่ได้ขึ้นอยู่กับราคามันฝรั่งเท่านั้น แต่ยังขึ้นอยู่กับปัจจัยอื่น ๆ อีก สมการนี้จะเป็นตัวอย่างของฟังก์ชันความสัมพันธ์ ที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระหลายตัว โดยอาศัยความสัมพันธ์ทางทฤษฎีเศรษฐศาสตร์ ให้ตัวแปรทางขวามือแต่ละตัวมีอิทธิพลต่อตัวแปรทางซ้ายมือ ซึ่งแต่เดิมตัวแปรทางซ้ายคือ Q และตัวแปรทางขวามือมีตัวเดียวคือ P แต่ขณะนี้ตัวแปรทางขวามีทั้งหมด 4 ตัว ซึ่ง คือ P, Y, R และ T แต่ละตัวจะมีอิทธิพลต่อตัวแปรทางซ้ายมือคือ Q ดังนั้นถ้าเรากำหนดค่าตัวแปรทางขวามือทุกตัว ให้ก็สามารถคำนวณค่าตัวแปรทางซ้ายมือได้

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถสร้างฟังก์ชันของการผลิตข้าวกับฟังก์ชันของการบริโภค ให้มีความสมบูรณ์มากขึ้น ด้วยการเพิ่มตัวแปรที่น่าจะมีอิทธิพลต่อตัวแปรตาม เช่น
ฟังก์ชันการผลิตข้าว อาจจะเป็น

$$Y = f(X, R) \quad (4.2)$$

โดย Y = ปริมาณผลผลิตข้าว เป็น ถังต่อไร่

X = ปริมาณปุ๋ยที่ใส่ เป็น กิโลกรัมต่อไร่

R = ปริมาณน้ำฝน เป็น มิลิเมตรต่อปี

และสำหรับฟังก์ชันการบริโภค อาจจะประกอบด้วย

$$C = f(Y,n,A) \quad (4.3)$$

โดย C = การใช้จ่ายเพื่อการบริโภคของครัวเรือน มีหน่วยเป็นบาท/ปี

Y = รายได้ของครัวเรือน มีหน่วยเป็น บาท /ปี

n = จำนวนสมาชิกในครัวเรือน มีหน่วยเป็น คน

A = อายุเฉลี่ยของพ่อแม่ มีหน่วยเป็น ปี

ที่กล่าวมานี้เป็นเพียงตัวอย่าง ของการแสดงความสัมพันธ์ของหลายตัวแปรซึ่งนักศึกษา สามารถที่จะเพิ่มตัวแปรอิสระ ทางขวามือของสมการได้อีกถ้าเห็นว่าเป็นตัวแปรที่มีความสำคัญ แต่ที่สำคัญคือต้อง มีทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์รองรับด้วย

เมื่อได้ความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระหลายตัวที่มีต่อตัวแปรตามตัวใดตัวหนึ่งแล้วต่อไปต้องพยายามเขียนความสัมพันธ์เหล่านั้นให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อจะได้สามารถทำการวิเคราะห์หาผลของตัวแปรตามในโอกาสต่อไป โดยทั่วไปแล้ว ความสัมพันธ์ของตัวแปรทางเศรษฐศาสตร์ กรณีที่มีตัวแปรตามหนึ่งตัวและตัวแปรอิสระหลายตัวนั้น ตัวแปรอิสระ จะมีความสัมพันธ์ในรูป Polynomial หรืออยู่ในรูปยกกำลัง Power function ตอนแรกนี้จะแสดงความสัมพันธ์อย่างง่ายที่ใช้กันทั่วไปก่อนคือ ในรูปความสัมพันธ์ เชิงเส้น (กำลังหนึ่ง) หรือเรียกว่า Linear form

4.12 ความสัมพันธ์ของตัวแปร 3 ตัว แบบเชิงเส้น

(Linear Relationships Involving Three Variables)

สมมติว่าพ่อค้าหมู ทำการสังเกต ปริมาณความต้องการเนื้อหมูของ ผู้บริโภคพบว่าการเปลี่ยนแปลงในปริมาณซื้อเนื้อหมูไม่ได้เกิดจากราคาหมูเพียงอย่างเดียว แต่ยังเกิดจากการเปลี่ยนแปลงในราคาของ เนื้อไก่ด้วย โดยเขาพบว่าปริมาณการซื้อเนื้อหมู จะลดลงถ้าราคาเนื้อหมูสูงขึ้น แต่จะสูงขึ้นถ้าราคาเนื้อไก่สูงขึ้น เนื่องจากผู้บริโภคเปลี่ยนจากการซื้อเนื้อไก่มาซื้อเนื้อหมู เมื่อราคาเนื้อไก่ สูงขึ้นในทางคณิตศาสตร์ สามารถเขียนความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ คือ ปริมาณซื้อเนื้อหมูจะมีความสัมพันธ์เป็นลบ(-) กับราคาหมู และความสัมพันธ์ของเนื้อหมูกับราคาเนื้อไก่ จะเป็นบวก (+) ถ้าพ่อค้าหมูเป็นผู้มีความรู้ทางเศรษฐมิติ เขาก็สามารถที่จะใช้ข้อมูลทางเชิงปริมาณ เพื่อหาความสัมพันธ์ดังกล่าว สมมติว่าได้สมการดังนี้

$$Q = 8-0.2P_p+0.1P_c \qquad (4.4)$$

โดย Q = ปริมาณเนื้อหมูที่ถูกค้าแต่ละรายซื้อมีหน่วยเป็นกิโลกรัม

P_p = ราคาของเนื้อหมู มีหน่วยเป็น บาทต่อกิโลกรัม

P_c = ราคาของเนื้อไก่ มีหน่วยเป็น บาทต่อกิโลกรัม

สมการที่ 4.4 นี้ แสดงให้เห็นถึง ความสัมพันธ์ของตัวแปร 3 ตัว คือ Q, P_p, P_c โดยมี Q เป็นตัวแปรตาม และ P_p กับ P_c เป็นตัวแปรอิสระ

สมมติว่าราคาเนื้อหมูและราคาเนื้อไก่ สามารถ เปลี่ยนแปลง ได้โดยเปลี่ยนแปลงอยู่ในช่วงกิโลกรัมละ 30-50 บาท

เมื่อสมมติว่าราคาไก่ P_c คงที่ที่กิโลกรัมละ30 บาท ดังนั้นสมการที่ 4.4 สามารถเขียนได้เป็น

$$Q = 8-0.2P_p+0.1(30) \qquad (4.5)$$

นั่นคือ

$$Q = 11-0.2P_p \qquad (4.6)$$

จะเห็นว่าสมการที่ (4.6) จะกลายเป็นสมการที่มีตัวแปรเพียง 2 ตัว และมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงในทำนองเดียวกันถ้ากำหนดให้ราคาเนื้อไก่คงที่ที่ 40 บาทต่อกิโลกรัมดังนั้นสมการที่ (4.4) สามารถเขียนได้เป็น

$$Q = 12-0.2 P_p \tag{4.7}$$

ซึ่งมีความสัมพันธ์เชิงเส้น โดยมี Slope เท่ากับสมการที่ (4.6) แต่มี intercept มากกว่า

คราวนี้ถ้ากำหนดให้ราคาเนื้อหมูคงที่ที่กิโลกรัมละ 50 บาท แล้วให้ราคาเนื้อไก่เปลี่ยนแปลงได้ จากสมการที่ (4.4) สามารถ หาความสัมพันธ์ได้คือ

$$Q = 8-0.\,2(50)+0.1P_c \tag{4.8}$$

ทำให้เป็นผลสำเร็จจะได้

$$Q = -2+0.1P_c \tag{4.9}$$

จะเห็นว่าสมการข้างต้นก็มีความสัมพันธ์เชิงเส้น โดยมีตัวแปร 2 ตัว คือ Q และ P_c ทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนดให้ราคาเนื้อหมูคงที่ในระดับต่าง ๆ ก็สามารถหาความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เหลือ 2 ตัว ในลักษณะ เชิงเส้นได้ โดยมี Slopeเท่าเดิมแต่มี intercept เปลี่ยนไป

ขบวนการข้างต้นนี้แสดงให้เห็นว่า ปริมาณความต้องการซื้อเนื้อหมู เปลี่ยนแปลง ไปตามตัวแปร 2 ตัว คือ P_p กับ P_c

ถ้าแทนค่าชุดของราคา P_p กับ P_c ดังกล่าวข้างต้น ลงสมการที่(4.4) ก็สามารถคำนวณตัวเลขของปริมาณความต้องการซื้อเนื้อหมูได้ ดังแสดงในตารางที่ 4.4 ต่อไป

ตาราง ที่ 4.7 แสดงปริมาณความต้องการเนื้อหมูที่ระดับ ราคาเนื้อหมูและราคาเนื้อไก่

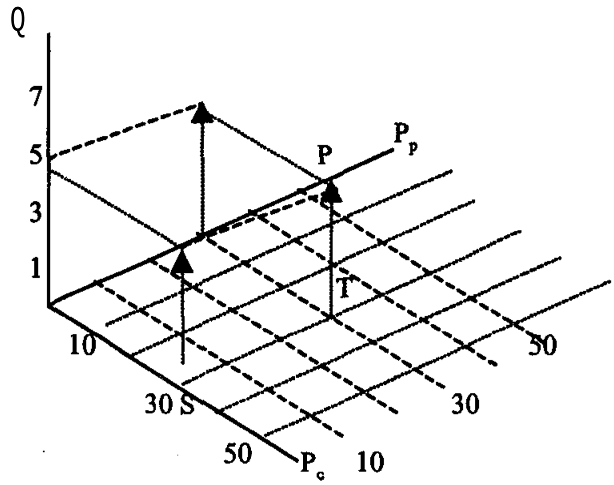
รายการ		ราคาเนื้อหมู (บาท/กก.)		
		30	40	50
ราคาเนื้อไก่ (บาท/กก.)	30	5	3	1
	40	6	4	2
	50	7	5	3

ตารางข้างบนนี้ แสดงปริมาณความต้องการเนื้อหมู ณ ระดับราคาของเนื้อหมูและราคาเนื้อไก่ ที่สัมพันธ์กัน เช่น ถ้าเนื้อหมูราคากิโลกรัมละ 30 บาทในขณะที่ราคาเนื้อไก่ กิโลกรัมละ 50 บาท ดังนั้น ปริมาณเนื้อหมูที่ผู้บริโภคต้องการคือ 7 กิโลกรัม

4.13 การแสดงผลในรูปกราฟ 3 มิติ (Three Dimensional Graphs)

จากหัวข้อที่แล้ว ได้แสดงการเขียนกราฟที่มี ความสัมพันธ์ของตัวแปร 2 ตัว โดยอาศัยแกนตั้งกับแกนนอน สำหรับ ตัวแปรแต่ละตัว เมื่อลงจุดความสัมพันธ์ก็สามารถเขียนลักษณะ 2 มิติได้

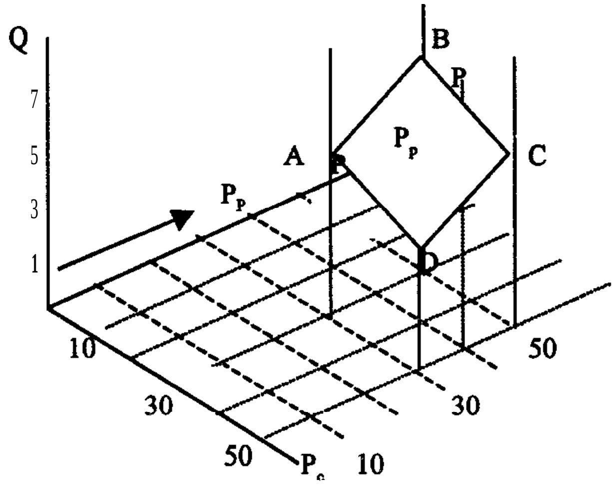
กรณี สมการ (4.4) มีตัวแปร 3 ตัว ดังนั้นการที่จะเขียนกราฟความสัมพันธ์ของตัวแปรจึงต้อง เพิ่มมิติขึ้นอีก 1 มิติ โดยมิติที่เพิ่มขึ้นนี้ จะอยู่ทางด้านขวามือของสองมิติ แรกในลักษณะตั้งฉากซึ่งกันและกัน เมื่อสร้างแกน 3 มิติ เสร็จแล้วจะดูคล้ายกับมุมห้องมุมหนึ่ง นั่นคือ มีผนังสองด้านมาบรรจบกับพื้นห้อง โดยที่มุมด้านล่างจะหมายถึงจุดกำเนิดที่ค่าของตัวแปรทุกตัวมีค่าเท่ากับ 0 (ศูนย์) และกำหนดให้มุมเส้นของผนังห้องที่บรรจบกันนั้น(แนวแกนตั้ง)เป็นแกนของตัวแปรตามและแนวนอนตามพื้นห้องสองแนว ให้เป็นแกนของตัวแปรอิสระแต่ละตัว ดังนั้นจากสมการ (4.4) ตัวแปร P_p จะวัดด้วยแนวพื้นห้องด้านหนึ่ง และตัวแปร P_c จะวัดด้วยแนวพื้นห้องอีกด้านหนึ่ง และตัวแปร Q จะวัดด้วยความสูงของผนังห้อง ดังรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.8 แสดงแกน 3 มิติ โดยมีแกนตั้งเป็นตัวแปรตามและแกนนอน 2 แกนเป็นตัวแปรอิสระ

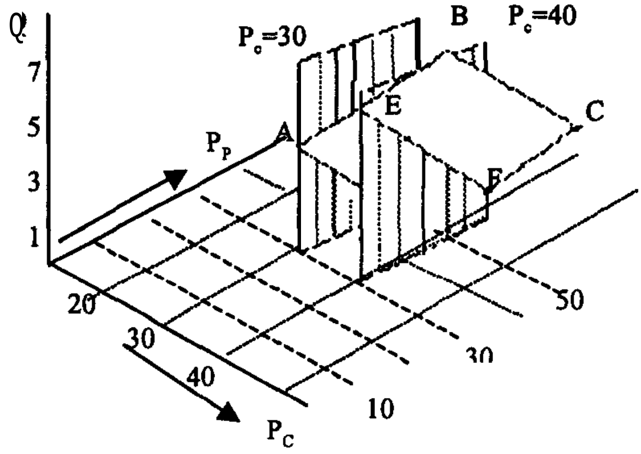
นำค่าที่ได้จากการคำนวณ ในตารางที่ 4.7 มาพล็อตลงกราฟ 3 มิติ โดยจุดแรกเกิดจากราคาเนื้อหมู 30 บาท และราคาเนื้อไก่ 30 บาท ผู้บริโภคจะซื้อเนื้อหมูในปริมาณ 5 กิโลกรัม วิธีพล็อตจุดคือ ก่อนอื่นเราจะดูที่แกน P_c ก่อนโดยเคลื่อนไปที่ระดับราคา P_c = 30 ให้เป็นจุด S ต่อจากนั้นให้ดูที่ P_p = 30 โดยเคลื่อนจากจุด S ขนานกับแกน P_p ไปถึงจุด P_p =30 ที่จุด T ต่อจากนั้น ให้เคลื่อนจากจุด T ตามแนวตั้งจำนวน 5 หน่วย จะได้จุด P (ขั้นตอนการหาจุด P นี้ ไม่จำเป็นต้องเริ่มที่แกน P_c ก่อนนักศึกษาอาจจะเริ่มจากแกน P_p ก่อนหรือ แกน Q ก่อนก็ได้)

จากตารางที่ 4.4 จะเห็นว่า ประกอบด้วยจุด 9 จุด ดังนั้นสามารถพล็อตกราฟโดยใช้วิธีการที่กล่าวมาแล้วได้ 9 จุด ซึ่งแต่ละจุดจะกระจาย ไปในลักษณะ 3 มิติ เนื่องจากกำหนดให้ตัวแปรแต่ละตัวมีความสัมพันธ์กันแบบเชิงเส้น ดังนั้นทุกจุดที่ปรากฏจึงจะอยู่บนพื้นราบ ในลักษณะพื้นผิว 3 มิติ สมมติว่าราคาเนื้อหมู และราคาเนื้อไก่ เป็นตัวแปรที่มีลักษณะต่อเนื่องซึ่งอยู่ในช่วงราคา 30-50 บาท ทำให้สามารถเขียนรูปพื้นผิวความสัมพันธ์ได้ โดยรูป 4.10 พื้นผิว ABCD แสดงสัดส่วนของความสัมพันธ์ของสมการที่ (4.7) คือ เป็นสัดส่วน เมื่อ $30 \leq P_c \leq 50$ และ $30 \leq P_p \leq 50$

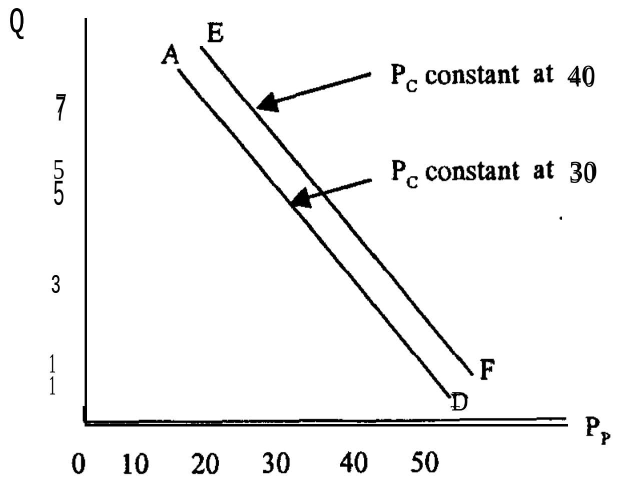


รูปที่ 4.9 แสดงภาพระนามของสมการ $Q = 8-0.2P_P+0.1P_C$

เนื่องจากรูป 4.9 เป็นเพียงภาพวาดอย่างคร่าว ๆ (Perspective drawing) จึงให้ค่าของ Q เนื่องจากค่าของ P_p และ P_c ได้อย่างหยาบ ๆ เท่านั้น ซึ่งไม่ใช่เรื่องง่ายที่จะวาดภาพ 3 มิติ ให้ถูกต้องเหมือนกับการวาดภาพ 2 มิติ ดังนั้น จึงทำการลดขนาดของกราฟ 3 มิติ ให้เหลือ 2 มิติ เพื่อให้การวิเคราะห์ถูกต้องชัดเจนขึ้น เช่น ก่อนอื่นสมมติให้ราคาเนื้อไก่คงที่ที่ $P_C = 30$ บาทต่อกิโลกรัม และต่อมา ให้มีราคาที่ $P_C = 40$ บาทต่อกิโลกรัม วิธีการนี้เหมือนกับว่าเราใช้กระดาษบาง ๆ 2 แผ่น ตัดผ่านพื้นที่ผิวในแนว P ที่ระดับ $P_C = 30$ และ $P_C = 40$ ดังรูปที่ 4.10 จะแบ่งพื้นผิว ABCD ตามแนว AD และ EF ทำให้เส้น AD และ EFแสดงเป็นกราฟ 2 มิติ โดยมีแกนตั้งคือ Q และแกนนอนคือ P ดังรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.10 แสดงความสัมพันธ์ในลักษณะ 3 มิติ



รูปที่ 4.11 แสดงความสัมพันธ์เมื่อเป็น 2 มิติ

วิธีการดังกล่าวข้างต้นเป็นการเปลี่ยนความสัมพันธ์ของตัวแปร 3 ตัว หรือ 3 มิติ ให้เหลือตัวแปร 2 ตัว หรือ 2 มิติ โดยให้ตัวแปรอีกตัวคงที่ในที่นี้คือให้ P_C คงที่ จากรูป 4.12 ก็คือ กราฟที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปร 2 ตัว คือ Q กับ P_P โดยกำหนดให้ P_C คงที่ ดังสมการที่ (4.6)และ(4.7) ถ้าสังเกตให้ดี นักศึกษาจะพบว่า เส้น AD และ EF ในรูป 4.12 นั้น เกิดจากความสัมพันธ์ของสมการ (4.6)และ(4.7) ซึ่งคือตัวเลขของ 2 แถว แรกของตารางที่ 4.4 นั่นเอง

4.14 สมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรมากกว่า 3 ตัว

(Linear Equations Involving More than Three Variables)

ขนาดของความสัมพันธ์เชิงเส้น สามารถขยายจำนวนตัวแปรอิสระออกไปได้อีก เช่น ความสัมพันธ์เชิงเส้น ของความต้องการซื้อมันฝรั่งดังสมการที่(4.1) สามารถเขียนได้เป็น

$$Q = a+b_1 P+b_2 Y+b_3 R+b_4 T \qquad (4.10)$$

โดย Q, P, Y, Rและ T ดังความหมายข้างต้นส่วนค่า a, b_1, b_2, b_3และ b_4 หมายถึงค่า coefficient หรือค่า parameter นั่นเอง สมการนี้ไม่สามารถเขียนเป็นรูปกราฟได้เพราะ ถ้าจะเขียนจะต้องใช้แกนถึง 5 แกน หรือ 5 มิติ ด้วยกันแต่อย่างไรก็ตาม เราก็สามารถใช้ความสัมพันธ์กรณีมี 2 ตัวแปร มาอธิบาย สมการนี้ได้โดยให้ a หมายถึง ค่า intercept หรือค่าคงที่เมื่อตัวแปรทุกตัวทางขวามือมีค่าเท่ากับศูนย์ (0) และค่า b ต่าง ๆเป็นค่า Slope ของตัวแปรที่สัมพันธ์กัน เช่น b_2 จะหมายถึง Slope ของ function อันเนื่องมาจาก ตัวแปร Y

4.15 ความสัมพันธ์ของตัวแปรทางเศรษฐศาสตร์ที่ไม่ใช่เชิงเส้น

(Nonlinear Economic Relationships)

ในหัวข้อนี้จะพูดถึงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ไม่เป็นเส้นตรง (Nonlinear) แต่จะพบได้บ่อย ๆ ใน การวิเคราะห์ทางเศรษฐศาสตร์

4.15.1 ความสัมพันธ์แบบ Polynomials

สมมติว่ามีฟังก์ชันการผลิต ซึ่งประกอบด้วยตัวแปร Y และ Xโดย Y เป็นตัวแปรตามหมายถึงระดับการผลิต และ X เป็นตัวแปรอิสระหมายถึง ปัจจัยการผลิตดังนี้คือ

$$Y = 40 + 11X - X^2 \qquad (4.11)$$

ค่าของตัวแปรตามทางซ้ายมือจะประกอบด้วยผลบวกของ 3 เทอมที่มีกำลังต่างกัน ทางขวามือ โดย $X^0 = 1$ และ $X^1 = X$ ดังนั้นเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ทางขวามือได้ดังนี้คือ

$$Y = 40 \times X^0 + 11 \times X^1 - 1 \times X^2 \qquad (4.12)$$

นั่นคือในเทอมแรกจะประกอบด้วย X กำลัง 0 เทอมที่สองประกอบด้วย X กำลัง 1 และเทอมที่สามประกอบด้วย X กำลัง 2

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างเกี่ยวกับ สมการต้นทุน โดยสมการต้นทุนนี้จะเป็นฟังก์ชันความสัมพันธ์ของต้นทุนกับระดับการผลิต

$$TC = 30 + 15Y - 5Y^2 + \tfrac{2}{3}Y^3 \qquad (4.13)$$

โดย TC = ต้นทุนรวมทั้งหมดมีหน่วยเป็นบาท

Y = จำนวนผลผลิต

เทอมทางขวาของสมการสามารถเขียนให้เต็มรูปแบบได้ดังนี้

$$TC = 30Y^0 + 15Y^1 - 5Y^2 + \tfrac{2}{3}Y^3 \qquad (4.14)$$

ในสมการต้นทุนนี้ ตัวแปร Y มีกำลังสูงสุดเท่ากับ 3 ดังนั้น เราจะเรียกว่าเป็น third-degree polynomial function หรือ cubic

สำหรับ สมการการผลิต (4.12) มีกำลังสูงสุดเท่ากับ 2 เราจะเรียกว่า Second degree polynomial function หรือ quadratic

การที่จะเรียกว่า ฟังก์ชัน เป็นแบบ Polynomial นั้นจะหมายความเฉพาะกรณีที่ตัวแปรมีกำลังเป็นตัวเลขจำนวนเต็มเท่านั้น ถ้าตัวเลขเป็นเศษส่วนเช่น $\frac{1}{2}$ หรือ $2\frac{1}{4}$ เราจะไม่เรียกว่าเป็นฟังก์ชัน Polynomialแต่จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันกำลัง (power function) แทน

เราสามารถเขียนฟังก์ชัน Polynomialกำลังต่าง ๆ และชื่อเรียกต่าง ๆ ดังนี้

ตารางที่ 4.8 แสดงรูปแบบของฟังก์ชันและชื่อเรียกทั่วไป

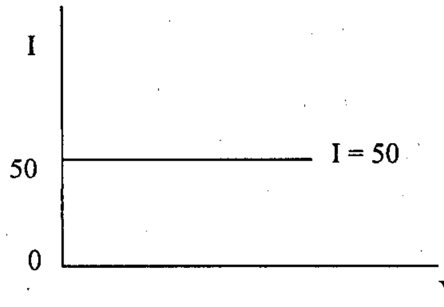
Degree	Function	Common Name
0	$Y=a_0$	Constant
1	$Y=a_0+a_1X$	Linear
2	$Y=a_0+a_1X+a_2X^2$	Quadratic
3	$Y=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$	Cubic
4	$Y=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+a_4X^4$	Quartic
n	$Y=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+a_4X^4+\ldots+a_nX^n$	n^{th} degree polynomial

ค่า $Y=a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_n$ หมายถึงค่า coefficients อาจเป็นได้ทั้งค่าบวก(+) ลบ(-) และศูนย์ (0) เช่น ถ้า $Y = X^3$ หมายความว่าเป็น function Polynomial ที่มีค่า $a_0=0, a_1=0, a_2=0,$ และ $a_3=1$

4.15.2 ลักษณะกราฟของฟังก์ชัน Polynomial

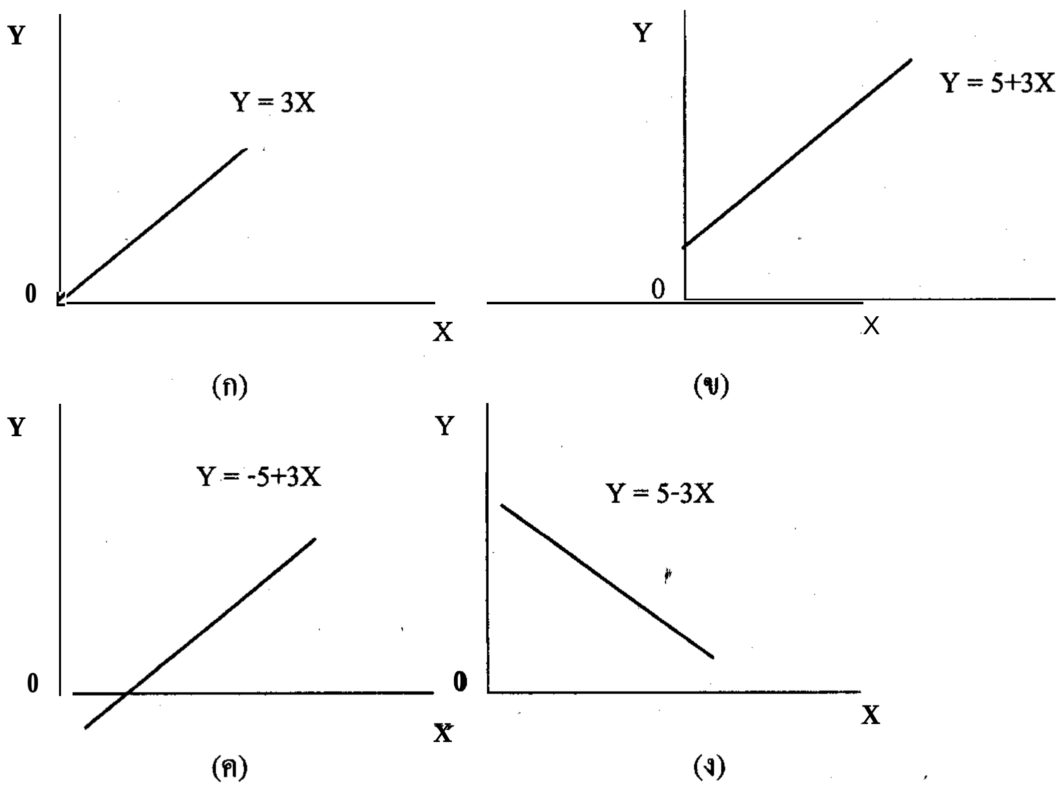
รูปร่างของกราฟฟังก์ชัน Polynomial จะเปลี่ยนแปลงไปตามขนาดและทิศทางของค่า a_0, a_1, a_2, a_3.........เช่น

4.15.3.1 กราฟที่ตัวแปรอิสระมีกำลังเป็นศูนย์หรือ constant function เช่น I = 50
4 จะมีลักษณะเป็นเส้นตรงขนานกับแกนนอนห่างจากแกนX เท่ากับ a_0 = 50 ดังรูปที่ 4.12



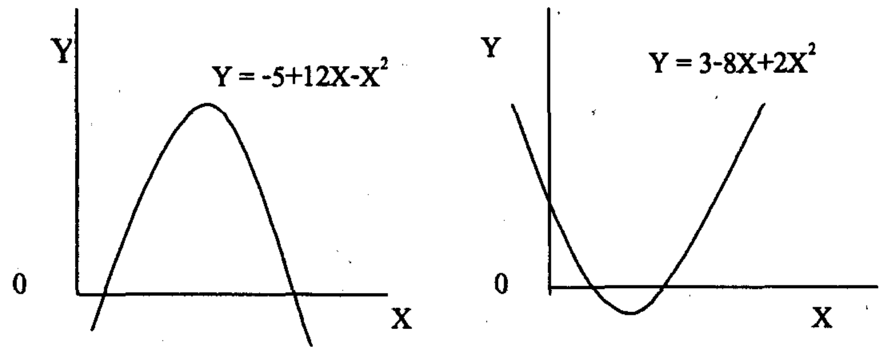
รูปที่ 4.12 แสดงลักษณะของฟังก์ชันที่มีกำลังเป็น 0

4.15.3.2 กราฟที่เป็น linear function จะมีลักษณะเป็นเส้นตรง มี intercept = a_0 และ slope = a_1 ซึ่งทั้ง a_0 และ a_1 เป็นได้ทั้งค่าบวก ลบ และศูนย์ ดังรูปที่ 4.13



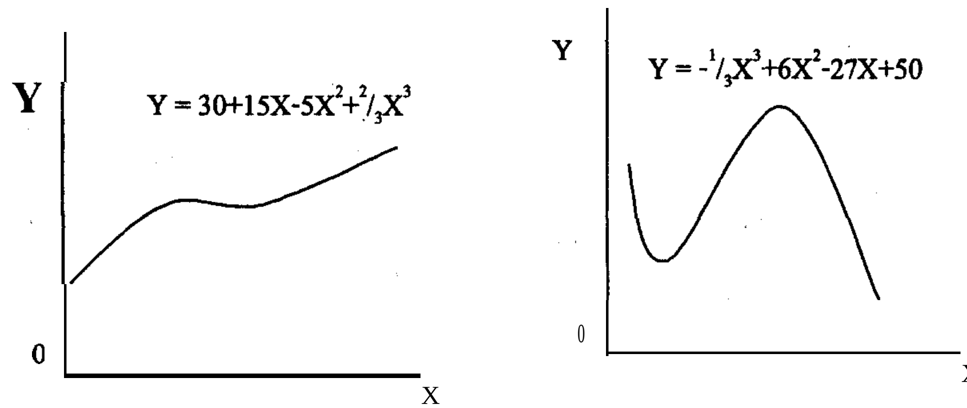
รูปที่ 4.13 แสดงกราฟเส้นตรงลักษณะต่าง ๆ เมื่อค่า slope และ intercept แตกต่างกัน

4.15.3.3 กราฟของ Quadratic function จะมีลักษณะเป็นรูป parabola จะเป็นรูปเว้าคว่ำ หรือเว้าหงายขึ้นอยู่กับ ค่า a_2 ถ้าค่า a_2 เป็นบวกจะเป็นรูปเว้าหงายถ้า a_2 เป็นลบ จะเป็นรูปเว้าคว่ำ ดังแสดงในรูป 4.14



รูปที่ 4.14 แสดงลักษณะกราฟที่ตัวแปรอิสระมีกำลังสูงสุดเป็น 2

4.15.3.4 กราฟของฟังก์ชันกำลัง 3 (cubic) จะมีรูปร่างต่าง ๆ กัน ขึ้นอยู่กับขนาดและทิศทางของค่า coefficient เช่น รูปที่ 4.15



รูปที่ 4.15 แสดงลักษณะกราฟที่ตัวแปรอิสระมีกำลังสูงสุดเป็น 3

4.15.3 ฟังก์ชันยกกำลัง (power function)

ตัวอย่าง เกี่ยวกับฟังก์ชันยกกำลัง เช่น จากทฤษฎีการผลิต

$$Y = 280\,L^{0.85} \qquad (4.15)$$

โดย Y = ปริมาณผลผลิต

L = จำนวนแรงงานที่ใช้ในการผลิต

ในกรณีนี้จะให้ตัวแปรอิสระ หนึ่งตัว อธิบายตัวแปรตาม โดยที่ค่า coefficient 0.85 จะเรียกว่าเป็นค่ากำลัง (power)ของ L โดยค่า coefficient นี้จะเป็นค่าคงที่

4.15.3.1 ลักษณะโดยทั่วไปของ Power function

สามารถเขียนความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน 2 ตัวแปรได้เป็น

$$Y = aX^b \tag{4.16}$$

โดยที่ Y และ X เป็นตัวแปร ส่วน a และ b เป็นค่าคงที่ เราจะพิจารณาค่า a และ b เฉพาะค่าที่ เป็นบวก คือ a,b >0 ถ้า b=0 แสดงว่า Y = a จะเป็น constant function ถ้า b เป็นค่า จำนวนเต็มบวกก็จะเป็นชุดของ polynomial function เช่นถ้า b = 1 สมการที่ 4.16 ก็จะมีความสัมพันธ์เป็นแบบ function เชิงเส้น ที่มีค่า intercept เท่ากับ 0 และถ้าค่า b = 2 สมการที่ 4.16 ก็จะ เป็นสมการ Quadratic คือ

$$Y = aX^2 \tag{4.17}$$

4.15.3.2 ลักษณะกราฟของ Power function

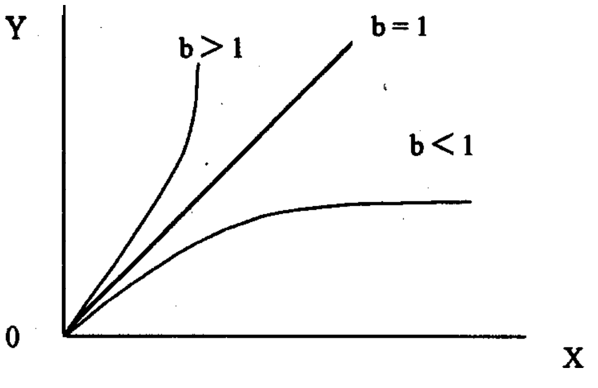
จากสมการที่ 4.16 เมื่อกำหนดให้ค่า b มีค่าต่าง ๆ คือ จาก ทฤษฎีการผลิต

ถ้า ค่า b<1 จะเป็น กรณี diminishing return

ถ้า b = 1 จะเป็น กรณี constant return

และถ้า b>1 จะเป็น กรณี increasing return

สามารถเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ดังรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.16 แสดงกราฟของสมการ $Y = aX^b$ เมื่อ b มีค่าในช่วงต่าง ๆ

จากสมการ 4.16 $Y = aX^b$

ทำการ take log **ฐาน** e **จะได้** $\ln Y = \ln a + b\ln X$ (4.18)

เมื่อกำหนดให้ $Y^* = \ln Y$

$a' = \ln a$

$X^* = \ln X$

เขียนสมการ (4.18) **ใหม่ จะได้**

$$Y^* = a' + bX^* \qquad (4.19)$$

ซึ่งสมการ (4.19) **นี้จะกลายเป็นสมการเชิงเส้น ทั้ง ๆ ที่ ความสัมพันธ์ของตัวแปรเดิม เป็นแบบไม่ใช่เชิงเส้น** (nonlinear) **(เมื่อ** $b \neq 1$) **ดังนั้นเราอาจกล่าวได้ว่า ฟังก์ชันกำลังสามารถทำเป็นสมการเชิงเส้นได้ในรูปของ** logarithms

4.16 ฟังก์ชันของตัวแปรหลายตัวที่มีกำลังมากกว่า 1

(Higher Degree Polynomial Function of Several Variables)

กรณีฟังก์ชันความสัมพันธ์ที่มีหลายตัวแปร และตัวแปรอิสระเหล่านั้นอาจจะมีกำลังมากกว่าหนึ่ง เช่น ผลผลิตข้าว มีความสัมพันธ์กับตัวแปรอิสระ 2 ตัว ที่มีกำลังเป็น 2

ตัวอย่าง $Y = a + b_1N + b_2P + b_3N^2 + b_4P^2 + b_5NP$ (4.20)

โดย Y = ผลผลิตข้าว

N = ปุ๋ยไนโตรเจน

P = ปุ๋ย ฟอสฟอรัส

$a, b_1, b_2, \ldots, b_5$ = ค่า coefficient หรือค่า parameter

ถ้ามีปุ๋ยตัวอื่น ๆ เพิ่มขึ้นมาอีก เช่น K หมายถึง ปุ๋ยโปรแตสเซียม และความสัมพันธ์ยังเป็นแบบกำลัง 2 เราอาจจะเขียนสมการใหม่ได้ว่า

$$Y = a + b_1N + b_2P + b_3K + b_4N^2 + b_5P^2 + b_6K^2 + b_7NP + b_8NK + b_9PK \qquad (4.21)$$

ในทำนองเดียวกันถ้าเป็นสมการแบบกำลัง 3 ก็สามารถเขียนได้เช่นกัน

คำถามท้ายบทที่ 4

1. นักศึกษามีวิธีปรับตัวแปรแบบไม่ต่อเนื่องให้เป็นตัวแปรต่อเนื่องหรือไม่ อย่างไร
2. ลักษณะความแตกต่างของตัวแปรต่อเนื่องและตัวแปรไม่ต่อเนื่องคืออะไร อธิบายให้เข้าใจ พร้อมยกตัวอย่างประกอบ
3. ข้อจำกัดของการนำเสนอข้อมูลด้วยกราฟมีอะไรบ้างนักศึกษาจะมีวิธีแก้ไขอย่างไร หรือไม่จงอธิบาย
4. กำหนดให้ $Qc = 20 - 0.3\ Pc - 0.2\ Pm$

    โดย Qc = ปริมาณกาแฟ

    Pc = ราคากาแฟ

    Pm = ราคาน้ำตาล

    จงเติมค่าลงไปในตารางแสดงความสัมพันธ์ดังสมการข้างต้นให้ถูกต้องครบถ้วน

รายการ		ราคากาแฟ (บาท/กก.)		
		10	20	30
ราคาน้ำตาล (บาท/กก.)	10			
	20			
	30			

5. จงสร้างกราฟ 3 มิติ จากสมการในข้อ 4
6. จงสร้างกราฟ 2 มิติ จากสมการในข้อ 4 โดยกำหนดให้ ค่า $Pm = 20$ และ $Pm = 30$ ตามลำดับ