บทที่ 11

แบบจำลองพลวัต

(Dynamic Model)

วัตถุประสงค์ : เพื่อศึกษาถึงแบบจำลอง เมื่อมีเวลาเข้ามาเกี่ยวข้อง การหาทางเดินหรือกาลวิถี (Time Path) ของตัวแปรตามของแบบจำลองแบบขาดช่วงและแบบต่อเนื่อง ด้วยวิธี Iterative และวิธี General การพิจารณาดุลยภาพของแบบจำลองพลวัตว่ามีเสถียรภาพหรือไม่

บทที่ 11

แบบจำลองพลวัต

(Dynamic Model)

11.1 บทนำ

การศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ กรณีไม่ได้มีเวลาเข้ามาเกี่ยวข้องเราเรียกว่า เป็นแบบจำลองชนิด Static และถ้าเราต้องการทราบว่าถ้าหากตัวแปรภายนอกเปลี่ยนแปลงไปแล้วทำให้ตัวแปรตามเปลี่ยนไปเมื่อเปรียบเทียบกับดุลยภาพเดิมเป็นเช่นไร เราเรียกว่า เป็นการศึกษาแบบ Comparative Static นั่นเองแต่ถ้าหากเราทำการศึกษาตัวแปรต่าง ๆ ที่มีเวลาเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยเราจะเรียกว่าเป็นการใช้แบบจำลองชนิด Dynamic

11.2 การพิจารณาหาค่าดุลยภาพ กรณี Static กับ Dynamic

11.2.1 กรณี Static

การพิจารณาหาค่าดุลยภาพของระบบสมการไม่ยุ่งยาก เช่น มีสมการ Demand และ Supply ของสินค้าชนิดหนึ่งคือ

$$Q^d = a+bP \qquad (1)$$

$$Q^s = c+dP \qquad (2)$$

ที่ดุลยภาพ $\quad Q^d = Q^s$

$$a+bP = c+dP$$

ได้

$$\bar{P} = \frac{c-a}{b-d} = \frac{a-c}{d-b}$$

และ

$$\bar{Q} = \frac{bc-ad}{b-d} = \frac{ad-bc}{d-b}$$

11.2.2 กรณี Comparative Statics

คือกรณีการนำค่าที่ได้จากการคำนวณของกรณี Static 2 ค่ามาเปรียบเทียบกัน เช่น กรณีแรก เรามีสมการ demand และSupply ดังนี้

$$Q^d = a+bP \quad (1)$$

$$Q^s = c+dP \quad (2)$$

ได้ $$\bar{P} = \frac{c-a}{b-d} = \frac{a-c}{d-b}$$

และ $$\bar{Q} = \frac{bc-ad}{b-d} = \frac{ad-bc}{d-b}$$

กรณีต่อมา ถ้ารัฐบาลเก็บภาษี Specific tax = t จากผู้ขายแล้ว ดุลยภาพใหม่จะเป็นอย่างไร ต่างจากดุลยภาพเดิมหรือไม่

จาก(1)

$$P^d = \frac{Q^d - a}{b} \quad (3)$$

จาก(2)

$$P^s = \frac{Q^s - c}{d} \quad (4)$$

เมื่อรัฐบาลเก็บภาษี Specific tax = t

$$P^t = P^s + t = \frac{Q^s - c}{d} + t \quad (5)$$

ที่ดุลภาพ (3) = (5)

$$\frac{Q^d - a}{b} = \frac{Q^s - c}{d} + t$$

$$d\overline{Q}' - ad = b\overline{Q}' - bc + bdt$$

$$\overline{Q}' = \frac{ad - bc + bdt}{d-b} = \frac{bc\text{-}ad\text{-}bdt}{b\text{ - }d}$$

$$\overline{P}' = \frac{bc\text{-}ab\text{-}bdt}{b(b\text{-}d)} = \frac{c\text{-}a\text{-}dt}{b\text{-}d}$$

จะเห็นได้ว่า ราคาก่อนเก็บภาษีกับหลังเก็บภาษีมีความแตกต่างกัน และกรณีปริมาณก็เช่นเดียวกัน ซึ่งเราสามารถเปรียบเทียบกันได้ ว่าต่างกันมากน้อยแค่ไหน

โดย

$$\bar{P}' - \bar{P} = \frac{c-a-dt}{b-d} - \frac{c-a}{b-d} = \frac{-dt}{b-d} = \frac{dt}{d-b}$$

และ

$$\bar{Q}' - \bar{Q} = \frac{bc-ad-bdt}{b-d} - \frac{bc-ad}{b-d} = \frac{-bdt}{b-d} = \frac{bdt}{d-b}$$

11.2.3 **กรณี** Dynamic

เช่น กรณีแบบจำลองใยแมงมุม (Cobweb model)

$$Q_t^d = a + bP_t$$

$$Q_t^s = c + dP_{t-1}$$

ที่ดุลยภาพ

$$Q_t^d = Q_t^s$$

ถ้าเราดำเนินการ Solve **หาค่าเหมือนกรณี Static เราจะได้ว่า**

$$a+bP_t = c+dP_{t-1}$$

$$bP_t - dP_{t-1} = c-a$$

$$P_t - \frac{d}{b}P_{t-1} = \frac{c-a}{b}$$

หรือ

$$P_{t+1} - \frac{d}{b}P_t = \frac{c-a}{b}$$

จะเห็นได้ว่าเราไม่สามารถหาค่า P_t และ P_{t-1} ออกมาได้เนื่องจากเป็นตัวแปรที่ต่างกัน เนื่องจากว่าระบบสมการ ณ เวลา t ขึ้นอยู่กับภาวะการณ์ที่เป็นมาแล้วในอดีต คือ t - 1 ดังนั้นจึงเป็นไปไม่ได้ที่เราจะหาจุดดุลยภาพของความสมดุลต่าง ๆ ณ เวลา t เท่านั้น เราต้องหาจุดดุลยภาพของสำหรับทุก ๆ จุดของเวลา ซึ่งแสดงถึงจุดดุลยภาพเชิงพลวัต (dynamic equilibrium) ถ้าแบบจำลองมีจุดดุลยภาพเชิงพลวัตร เราจะมี $P_t = P_{t-1} = P_{t-2} = \ldots = \bar{P}$ ซึ่งแสดงถึงราคาดุลยภาพในช่วงเวลาต่าง ๆ กัน ค่า $\bar{P}$ เป็นราคาดุลยภาพพลวัต ในขณะเดียวกันก็หาปริมาณดุลยภาพได้โดยให้

$$Q_t^d = Q_{t-1}^d = \ldots = \bar{Q} = \ldots = Q_{t-1}^s = Q_t^s$$

ซึ่งเมื่อเรา Solve สมการ ข้างต้นใหม่เราจะได้

$$\bar{P} = \frac{a-c}{d-b} = \frac{c-a}{b-d}$$

$$\bar{Q} = \frac{ad-bc}{d-b}$$

ตัวอย่างแบบจำลองที่มีเวลาต่างออกไปเช่น

$$Q_t^d = a + bP_t$$

$$Q_t^s = c + dP_{t-2}$$

$$Q_t^d = Q_t^s$$

เมื่อทำการแก้สมการหาค่าที่ดุลยภาพจะได้

$$\overline{P} = \frac{a-c}{d-b} = \frac{c-a}{b-d}$$

$$\overline{Q} = \frac{ad-bc}{d-b}$$

ทั้งสองกรณีนี้จะมีค่าดุลยภาพเหมือนกับกรณี Static **แต่ความจริงแล้วยังมีข้อแตกต่างอีกคือความแตกต่างอันเนื่องมาจากการเชื่อมโยงภาวะการต่างเวลากัน ซึ่งแสดงในรูปของกาลวิถี หรือทางเดินของตัวแปรภายในผ่านเวลา** (time path) **สู่จุดดุลยภาพโดยที่กาลวิถีในแต่ละแบบจำลองอาจไม่เหมือนกัน**

11.3 การแก้สมการ First Order Difference Equation

การแก้สมการ First Order Difference Equation **หรือการหากาลวิถี** (time path) **เมื่อตัวแปรมีลักษณะแบบขาดช่วง**(Discrete Model)**มีวิธีการหาได้หลายวิธีโดยวิธีที่นิยมใช้มี 2 วิธีดังนี้**

11.3.1 **วิธี** Iterative Method **โดยการทำซ้ำๆ**

ตัวอย่างที่ 11.1 **จงหา** time path **ของสมการ** first order difference equation

$$Y_{t+1} - Y_t = 2 \qquad \text{วิธี iterative method}$$

วิธีทำ **ได้ว่า** $Y_{t+1} = 2 + Y_t$

ให้ $t=0$; $Y_1 = 2 + Y_0$

$t=1$; $Y_2 = 2 + Y_1 = 2+2+Y_0 = 2.2 + Y_0$

$t=2$; $Y_3 = 2 + Y_2 = 2+2+2+Y_0 = 2.3 + Y_0$

$\vdots$

$t=t-1$; $Y_t = 2 + y_{t-1} = 2+2+\ldots+2+Y_0 = 2.t + Y_0$

ถ้าเราทราบค่า $Y_0 = 5$

จะได้ $Y = 2t + 5$ Ans

วิธีนี้เป็นการแก้สมการพลวัตแบบขาดช่วง (discrete model)

ตัวอย่างที่ 11.2 จากแบบจำลองใยแมงมุม (cobweb model)

$$Q_t^d = a + bP_t \quad (1)$$

$$Q_t^s = c + dP_{t-1} \quad (2)$$

จงหา time path ของราคาและ ปริมาณด้วยวิธี iterative method

วิธีทำ

จากสมการที่ (1) ที่ดุลยภาพจะได้

$$\overline{Q} = a + b\overline{P} \quad (3)$$

สมการที่ (1) – (3) จะได้

$$Q_t^d - \overline{Q} = b(P_t - \overline{P}) \quad (4)$$

จากสมการที่ (2) ที่ดุลยภาพจะได้

$$\overline{Q} = c + d\overline{P} \quad (5)$$

สมการที่ (2) – (5) จะได้

$$Q_t^s - \overline{Q} = d(P_{t-1} - \overline{P}) \quad (6)$$

สมการที่ (4) คือความเบี่ยงเบนของปริมาณซื้อจากดุลยภาพ และสมการที่ (6) คือความเบี่ยงเบนของปริมาณขายจากดุลยภาพถ้าทั้งสองส่วนนี้เท่ากันจะได้

$$b(P_t - \overline{P}) = d(P_{t-1} - \overline{P})$$

หรือ

$$(P_t - \overline{P}) = \frac{d}{b}(P_{t-1} - \overline{P})$$

แสดงว่าการเบี่ยงเบนของราคาในช่วงเวลา t กับจุดดุลยภาพขึ้นอยู่กับสัดส่วนของความเบี่ยงเบนของราคาช่วงก่อนหน้ากับจุดดุลยภาพ และค่าคงที่ค่าหนึ่งคือ จำนวน d / b ดังนี้ถ้าเราทราบค่า P_0 ก็สามารถคำนวณหากาลวิถีของราคา และ ปริมาณได้ดังแสดงด้วยตารางต่อไปนี้

เวลา	ราคา $P_t-\bar{P}$	ปริมาณ $Q_t-\bar{Q}$
0	$(P_0-\bar{P})$	
1	$(P_1-\bar{P})=\frac{d}{b}(P_0-\bar{P})$	$(Q_1-\bar{Q})=d(P_0-\bar{P})$
2	$(P_2-\bar{P})=(\frac{d}{b})^2(P_0-\bar{P})$	$(Q_2-\bar{Q})=\frac{d^2}{b}(P_0-\bar{P})$
3	$(P_3-\bar{P})=(\frac{d}{b})^3(P_0-\bar{P})$	$(Q_3-\bar{Q})=\frac{d^3}{b^2}(P_0-\bar{P})$
	⋮	⋮
t	$(P_t-\bar{P})=(\frac{d}{b})^t(P_0-\bar{P})$	$(Q_t-\bar{Q})=(\frac{d}{b})^t b(P_0-\bar{P})$

จากตารางข้างต้นเราจะได้ว่า

$$\left(P_t-\bar{P}\right)=\left(\frac{d}{b}\right)^t\left(P_0-\bar{P}\right)$$

หรือ $P_t=\bar{P}+\left(P_0-\bar{P}\right)\left(\frac{d}{b}\right)^t$ เป็น time path ของ P

ในทำนองเดียวกันจะได้ $Q_t=\bar{Q}+\left(P_0-\bar{P}\right)b\left(\frac{d}{b}\right)^t$ เป็น time path ของ Q

วิธี General Method

สมมติว่าสมการ first – order difference equation มีลักษณะ

$$Y_{t+1} + aY_t = c$$

โดย a และ c เป็นค่าคงที่ กาลวิถีของสมการนี้จะประกอบด้วย 2 ส่วนคือ

ส่วนที่ 1 Complementary Function (Y_c) โดยการทำสมการข้างบนให้เป็นสมการ homogeneous difference equation จะได้

$$Y_{t+1} + aY_t = 0$$

สมมติให้ $Y_c = Y_t = ab^t$

$$Y_{t+1} = ab^{t+1}$$

$$ab^{t+1}+ab^t = 0$$

$$(b+a)b^t = 0$$

ถ้า $b+a = 0$

$$b = -a$$

$$Y_c = (-a)^t$$

เป็นคำตอบหนึ่งที่เป็นไปได้ โดยคำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ Y_c คือ $Y_c = A(-a)^t$ โดยที่ค่า A เป็นค่าคงที่ใด ๆที่สามารถหาค่าได้ในเทอมของ Y_0

ส่วนที่ 2 Particular Intigral $= Y_p$

ลอง $Y_p = Y_t = K$ (constant)

$$k+ak = c$$

$$k = \frac{c}{1+a}$$

$$Y_p = \frac{c}{1+a} \quad \text{เมื่อ} \quad a \neq -1$$

ถ้าค่า $a = -1$ เราต้องหา Y_p ใหม่

ลองให้ $Y_p = Y_t = kt$

$$k(t+1)+akt = c$$

$$k = \frac{c}{t+1+at} = c \quad \text{เพราะว่า } a = -1$$

$$\therefore Y = ct$$

เมื่อ General Solution = Complementary Function + Particular Intigral

$$Y_t = Y_c+Y_p$$

$$Y = A(-a)^t + \frac{c}{1+a} \quad \text{เมื่อ} \quad a \neq -1$$

และ $Y = A(-a)+ct = A+ct$ เมื่อ $a = -1$

เนื่องจากค่า A เป็นค่าคงที่ที่เราสมมติขึ้น เราสามารถแทนที่ค่า A ได้โดยกำหนดเงื่อนไขเบื้องต้นคือ $Y_t = Y_0$ เมื่อเวลา $t = 0$

ดังนั้น $$Y_0 = A + \frac{c}{1+a}$$

หรือ $$A = Y_0 - \frac{c}{1+a}$$

แทนค่า A จะได้

$$Y_t = \left(Y_0 - \frac{c}{1+a}\right)(-a)^t + \frac{c}{1+a} \qquad \text{เมื่อ } a \neq -1$$

และ $$Y_t = \left(Y_0 - \frac{c}{1+a}\right) + ct \qquad \text{เมื่อ } a = -1$$

$$= Y_0 + ct$$

ตัวอย่างที่ 11.3 กรณี

$$Q_t^d = a + bP_t \qquad (1)$$

$$Q_t = c + dP_{t-1} \qquad (2)$$

(1) = (2) $$a + bP_t = c + dP_{t-1}$$

$$bP_t + dP_{t-1} = c - a$$

หรือ $$P_{t+1} - \frac{dP}{b} = \frac{c-a}{b}$$

เทียบ $$Y_t + aY_{t+1} = c$$

คือ $a = \frac{-d}{b}$ และ $c = \frac{c-a}{b}$

แทนค่าได้

$$P_t = \left(P_0 - \frac{\frac{c-a}{b}}{1 - \frac{d}{b}}\right)\left(\frac{d}{b}\right)^t + \frac{\frac{c-a}{b}}{1 - \frac{d}{b}}$$

หรือ $$P_t = \left(P_0 - \frac{c-a}{b-d}\right)\left(\frac{d}{b}\right)^t + \frac{c-a}{b-d}$$

แทนค่า $\frac{c-a}{b-d}$ ด้วย $\overline{P}$

จะได้ $$P_t = (P_0 - \overline{P})(d/b)^t + \overline{P}$$

เป็น time path ซึ่งเท่ากับกรณีคำนวณแบบ Iterative

และกรณี $Y_{t+1}-Y_t = 2$

จะเห็นว่ากรณีนี้ $a = -1$ และ $c=2$

จะได้ $Y_t = Y_0+ct$

$Y_t = Y_0+2t$ เป็น time path

และถ้า $Y_0 = 5$

$Y_t = 2t+5$

ซึ่งเท่ากับกรณีคำนวณแบบ Iterative เช่นกัน

11.3.2 ความเสถียรภาพของจุดดุลยภาพ (Stability of Equilibrium)

ในการพิจารณาความมีเสถียรภาพของดุลยภาพจากกาลวิถีของตัวแปรที่มีลักษณะแบบขาดช่วง (Discrete) นั้น จะพิจารณาจากComplementary function คือ Y_c เพราะ Y_c คือค่าที่แสดงการเบี่ยงเบนของกาลวิถีจากจุดดุลยภาพโดย $Y_c=Ab^t$ ถ้าค่า Y_c หรือ Ab^t มีค่าเข้าสู่ 0 (ศูนย์) เมื่อค่า t เข้าสู่ ∞ จะถือว่าเป็นกาลวิถีที่มีเสถียรภาพ

การเปลี่ยนแปลงของ Y_c จะขึ้นอยู่กับค่า b^t ถ้าค่า $t \longrightarrow \infty$ ค่า Y_c จะมีลักษณะเช่นไรจะขึ้นอยู่กับค่า b ซึ่งสามารถจำแนกได้ดังนี้

ถ้า $b > 0$ ลักษณะของกาลวิถี จะไม่แกว่ง คือ Nonoscillatory

ถ้า $b < 0$ ลักษณะของกาลวิถี จะแกว่ง คือ Oscillatory

ถ้า $|b| > 1$ ลักษณะของกาลวิถี จะมีค่าออกห่างจากดุลยภาพ (Divergent)

ถ้า $|b| < 1$ ลักษณะของกาลวิถี จะมีค่าเข้าสู่ดุลยภาพ (Convergent)

ตัวอย่างที่ 11.4 จงพิจารณาลักษณะของกาลวิถีต่อไปนี้ $Y_t = 2(-4/5)^t+9$

จากโจทย์พบว่าค่า $b = -4/5 < 0$ แสดงว่ามีลักษณะแกว่ง

และ $|b| = 4/5 < 1$ แสดงว่ามีลักษณะเข้าหาดุลยภาพ

สรุป กาลวิถี ของ $Y_t = 2(-4/5)^t+9$ จะมีลักษณะแกว่งเข้าหาดุลยภาพที่ $Y_t = 9$

ข้อสังเกต ค่า $2(-4/5)^t$ กับ $-2(4/5)^t$ มีความแตกต่างกันมากโดยเฉพาะผลของลักษณะกาลวิถี นักศึกษาต้องระวังเครื่องหมายให้มากอย่าสับสน

ตัวอย่างที่ 11.5 จงพิจารณาลักษณะของกาลวิถีต่อไปนี้ $Y_t = 3(2)^t+4$

จากโจทย์พบว่าค่า $b = 2 > 0$ แสดงว่ามีลักษณะไม่แกว่ง

และ $|b| = 2 > 1$ แสดงว่า จะมีค่าออกห่างจากดุลยภาพ

สรุป กาลวิถีของ $Y_t = 3(2)^t+4$ จะมีลักษณะสู่ออกจากดุลยภาพที่ $Y_t = 4$

11.4 การแก้สมการ First Order Differential Equation

การแก้สมการ First Order Differential Equation **หรือการหากาลวิถี** (time Path) **กรณีตัวแปรตามมีลักษณะเป็นตัวแปรแบบต่อเนื่อง(Continuous** variable) **ซึ่งมีลักษณะสมการดังนี้คือ**

$$\frac{dy}{dt} + aY = b \qquad (1)$$

โดยที่ a,b **เป็นค่าคงที**

ในการหาคำตอบหรือ time path ของสมการลักษณะเช่นนี้จะมีผลลัพท์อยู่ 2 ส่วน เช่นเดียวกับกรณีของ difference equation หรือแบบ discrete variable คือ แบบไม่ต่อเนื่องในหัวข้อก่อนโดย

general solution = particular integral + **complementary** function

ทำการหา Partieular **integral** = Y_p

โดยให้ $Y_p = K$ **โดยที่** K **เป็นค่าคงที่**

ดังนั้น $$\frac{dY}{dt} = \frac{dK}{dt} = 0$$

แทนค่า Y = K **และ** dY/dt = 0 **ลง(1) จะได้**

$$0 + aK = b$$

หรือ $$K = b/a$$

นั่นคือจะได้ particular integral = Y_p = K = b/a $(a \neq 0)$

ต่อไปทำการหา Complementary **function** (Y_c)

โดย เขียนสมการที่(1) ให้อยู่ในรูป homogeneous differential equation

จะได้ $$\frac{dY}{dt} + ay = 0$$

หรือ $$\frac{1}{Y}dY = -adt$$

$$\int \frac{1}{Y}dY = \int -adt$$

$$\ln Y = -at + c$$ **เมื่อ** C = **ค่าคงที่**

$$Y = e^{-at+c}$$

$$Y = e^{-at}e^{c}$$

เมื่อ e = 2.178... และ C เป็นค่าคงที่ใด ๆ ดังนั้น เราอาจจะเขียน

e^c = A โดยที่ A คือค่าคงที่ใด ๆ

นั่นคือ Y = $A.e^{-at}$

หรือ Complementary function Y_c = $A.e^{-at}$

จะได้ว่า general solution (Y_t) คือ

$$Y_t = Y_p + Y_c$$

$$Y_t = \frac{b}{a} + Ae^{-at}$$

เมื่อ t = 0 จะได้

$$Y_0 = \frac{b}{a} + Ae^{(-a)(0)}$$

$$A = Y_0 - \frac{b}{a}$$

นั่นคือ $$Y_t = \frac{b}{a} + \left(Y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-at}$$

เป็น definite solution หรือ เป็น time path ของ Y

11.4.1 ความเสถียรภาพของจุดดุลยภาพ (stability of Equilibrium)

ในการพิจารณาความมีเสถียรภาพของจุดดุลยภาพกรณีที่ตัวแปรมีลักษณะเป็นตัวแปรแบบต่อเนื่อง(continuous) นั้นจะพิจารณา จาก time path ของ $Y_t = \frac{b}{a} + \left(Y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-at}$

สามารถมีดุลยภาพได้ ถ้า Y_0 = b/a แสดงว่า เกิดดุลยภาพที่ Y_t = b/a

แต่ถ้า $Y_0 \neq$ b/a สามารถพิจารณาความมีเสถียรภาพของดุลยภาพได้โดย พิจารณา ค่า e^{-at}

ถ้า a > 0 จะได้ว่า $e^{-at} \longrightarrow 0$ ถ้า $t \longrightarrow \infty$ นั่นคือ กาลวิถีของ Y_t จะเข้าสู่(Convergence) ดุลยภาพที่ Y_t = b/a หมายความว่าเป็นดุลยภาพที่เสถียรภาพ

ถ้า a < 0 จะได้ว่า $e^{-at} \longrightarrow \infty$ ถ้า $t \longrightarrow \infty$ นั่นคือ กาลวิถีของ Y_t จะไม่สามารถเข้าสู่ (divergence) ดุลยภาพที่ Y_t = b/a ได้ หมายความว่า เป็นดุลยภาพที่ไม่ เสถียรภาพ

ในการพิจารณาความมีเสถียรภาพยังสามารถพิจารณาได้จากสมการ differential โดยไม่จำเป็นต้องหา กาลวิถีก่อนได้คือ

จาก $$\frac{dY}{dt} + aY = b$$

หรือ $$\frac{dY}{dt} = -aY + b$$

ถ้า a > 0 แสดงว่ากาลวิถีของ Y หรือ Y_t จะสามารถเข้าสู่ (convergence) ดุลยภาพได้

หมายความว่า เป็นกาลวิถีที่ดุลยภาพมีเสถียรภาพ

ถ้า a < 0 แสดงว่ากาลวิถีของ Y หรือ Y_t จะไม่สามารถเข้าสู่ (divergence) ดุลยภาพได้ หมายความว่าเป็นกาลวิถีที่อาจจะมีดุลยภาพแต่ไม่เสถียรภาพ

ตัวอย่างที่ 11.6 จงหา time path ของ Y_t เมื่อกำหนดให้ $\frac{dY}{dt}+2Y=6$ โดย $Y_0=10$ และพิจารณาด้วยว่า จะเกิดดุลภาพหรือไม่ ถ้าเกิดเป็นดุลยภาพที่มีเสถียรภาพหรือไม่

วิธีทำ วิธีที่ 1

จากโจทย์ เราได้ว่า a = 2 และ b = 10

จาก $$\frac{dY}{dt}+aY=b$$

ได้ time path คือ $$Y_t=\left(Y_0-\frac{b}{a}\right)e^{-at}+\frac{b}{a}$$

เมื่อแทนค่า a = 2 และ b - 6 โดย $Y_0 = 0$

จะได้ $$Y_t=\left(10-\frac{6}{2}\right)e^{-2t}+\frac{6}{2}$$

$Y_t=7e^{-2t}+3$ เป็น time path

พิจารณาเทอมแรกทางขวามือ พบว่า $7e^{-2t} \longrightarrow 0$ เมื่อ $t \longrightarrow \infty$ แสดงว่าจะเกิดดุลยภาพ ที่ $Y_t = 3$ และเป็นดุลยภาพที่มีเสถียรภาพ

หรือ วิธีที่ 2

พิจารณา $$\frac{dY}{dt}+2Y=6$$

พบว่าค่า a = 2 ซึ่งมากกว่า 0 แสดงว่า Y_t จะเป็นกาลวิถีที่ดุลยภาพมีเสถียรภาพเหมือนวิธีแรก

คำถามท้ายบทที่ 11

จงหากาลวิถีของสมการต่อไปนี้ด้วยวิธี Iterative และวิธี Gereral

n) $Y_{t+1} = Y_t + 1 \qquad (Y_0=10)$

U) $Y_{t+1} = aY_t \qquad (Y_0=b)$

ค) $Y_{t+1} + 3Y_t = 4 \qquad (Y_0=4)$

ง) $Y_{t+1} = 0.2Y_t + 4 \qquad (Y_0=4)$

จ) $2Y_{t+1} - Y_t = 6 \qquad (Y_0=7)$

1. กาลวิถีที่หาได้จากข้อ 1 จงพิจารณาลักษณะทางเดินสู่ดุลยภาพจะเป็นเช่นไร

2. จงหา general solution และ definite solution จากสมการ differential ต่อไปนี้

ก) $dY/dt + 4Y = 12 \qquad (Y_0=2)$

ข) $dY/dt + 10Y = 15 \qquad (Y_0=0)$

ค) $dY/dt - 2Y = 0 \qquad (Y_0=9)$

ง) $2dY/dt + 4Y = 6 \qquad (Y_0=1)$

3. จงพิจารณาว่า time path ในข้อ 3 มีลักษณะทางเดินสู่ดุลยภาพอย่างไร

4. จากแบบจำลองเศรษฐศาสตร์มหภาค

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$C_t = 150 + 0.7y_{t-1}$$

กำหนดให้ $y_0 = 200$ และ $I_t = 100$

จงหา time path ของ Y_t และ C_t และพิจารณาด้วยว่าเป็นดุลยภาพที่มีเสถียรภาพหรือไม่

6. จากแบบจำลองเศรษฐศาสตร์มหภาค

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

$$C_t = 150 + 0.7(dY/dt)$$

$$I_t = 50$$

$$G_t = 80$$

จงหา time path ของ Y_t และ C_t และพิจารณาด้วยว่าเป็นดุลยภาพที่มีเสถียรภาพหรือไม่