บทที่ 8

แบบจำลองสมการเกี่ยวเนื่อง

(Simultaneous Equation Model)

วัตถุประสงค์ : เพื่อศึกษาลักษณะของแบบจำลองที่มีสมการมากกว่า 1 สมการ และตัวแปรตามของแต่ละสมการไปมีความสัมพันธ์กับตัวแปรตามของสมการอื่น ๆ ในฐานะที่เป็นตัวแปรอิสระ ทำให้เกิดปัญหาทางด้านสมการเกี่ยวเนื่องขึ้น นักศึกษาจะได้ศึกษาถึงวิธีแก้ปัญหาดังกล่าวตลอดจนจะได้ศึกษาถึงกฎการชี้ชัดซึ่งมี 2 ขั้นตอนคือ การพิจารณาเงื่อนไขลำดับที่ และเงื่อนไขแร้งค์

บทที่ 8

แบบจำลองสมการเกี่ยวเนื่อง

(Simultaneous Equation Model)

แบบจำลองสมการเดี่ยว (Single- equation model) ซึ่งมีตัวแปรตามเพียงหนึ่งตัว (Y) และตัวแปรอิสระ (X) 1 ตัวหรือมากกว่า ซึ่งแต่ละแบบจำลองจะประมาณค่า Y จากตัวแปร X ที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์เป็นเหตุเป็นผลกัน ดังนั้นตัวแปร X เป็นตัวกำหนด Y

แต่บางสถานการณ์ ถ้าตัวแปร Y ถูกกำหนดโดย X และตัวแปร X บางตัวถูกกำหนดโดย Y ซึ่งก็คือมีความสัมพันธ์สองทางหรือต่อเนื่องกัน ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร Y และตัวแปร X บางตัวนี้จะทำให้เกิดความแตกต่างระหว่างตัวแปรตาม (dependent) และตัวแปรอิสระ (explanatory) ได้ค่าออกมาที่ไม่ถูกต้อง (dubious value)

ในแบบจำลองที่มีมากกว่า 1 สมการ ตัวแปรตามที่เกี่ยวเนื่องกันนี้เรียกว่า **ตัวแปรภายใน** (endogenous variables) ซึ่งไม่เหมือนกับใน Single-equation model ใน Simultaneous-equation model จะไม่สามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ใดๆ ในสมการหนึ่งก่อน จะต้องคำนึงถึงสมการอื่นๆ ในระบบด้วย

ดังนั้น จะเกิดอะไรขึ้นถ้าค่าพารามิเตอร์ของแต่ละสมการทำการประมาณค่าด้วยวิธี OLS โดยไม่ได้คำนึงถึงสมการอื่นๆ จากข้อสมมติของวิธี OLS ตัวแปรอิสระ (X_1 explanatory) เป็นอิสระจากตัวคลาดเคลื่อน (random) และถ้าไม่เป็นตามเงื่อนไข ตัวประมาณค่ากำลังสองน้อยที่สุด (least-squares estimators) ก็จะมีความเอนเอียง (bias) และไม่แนบนัย (inconsistent) นั่นคือ เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ขึ้นตัวประมาณค่าจะไม่เข้าใกล้ค่าที่เป็นจริง (population) ดังนั้นสมมติฐานของระบบสมการจะเป็นดังนี้

$$Y_{1i} = \beta_{10} + \beta_{12} Y_{2i} + \gamma_{11} X_{1i} + u_{1i} \qquad (1)$$

$$Y_{2i} = \beta_{20} + \beta_{21} Y_{1i} + \gamma_{21} X_{1i} + u_{2i} \qquad (2)$$

โดย Y_1 และ Y_2 คือ ตัวแปรภายใน (mutually dependent or endogenous)

X_1 คือ ตัวแปรภายนอก (exogenous variable)

u_1 และu_2 คือ stochastic disturbance term

ดังนั้นถ้าตัวแปรตาม Y_2 ในสมการ (1)มีความสัมพันธ์กับ u_1 และ ตัวแปรตาม Y_1 ในสมการ (2) มีความสัมพันธ์กับ u_2 ถ้าทำการประมารค่าด้วยวิธี OLS ก็จะทำให้ได้ค่าประมาณที่ไม่มีความแนบนัย

วิธีการคำนวณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองสมการเกี่ยวเนื่องมี 2 วิธี คือ

1. **ลักษณะการประมาณค่าสมการที่ละสมการ** มีวิธีการประมาณค่าหลายวิธี เช่น
   - วิธีกำลังสองน้อยที่สุดทางอ้อม (Indirect Least Squares or ILS)
   - วิธีประมาณค่าแบบตัวแปรเครื่องมือ (Instrumental Variable or IV)
   - วิธีกำลังสองน้อยที่สุดสองชั้น (Two Stage Least Squares or 2SLS)
   - วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดแบบจำกัดข้อสนเทศ (Limited Information Maximum Likelihood or LIML)

2. ลักษณะการประมาณค่าสมการทุกสมการพร้อมกันทั้งระบบสมการ

มีวิธีการประมาณค่าหลายวิธี เช่น
- วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบ 3 ชั้น (Three Stage Least Squares or 3SLS)
- วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดแบบข้อสนเทศสมบูรณ์ (Full Information Maximum Likelihood หรือ LIML)

การพิจารณาปัญหาความชี้ชัด(Identification)

การประมาณสมการเกี่ยวเนื่องนั้นต้องทำการพิจารณาก่อนว่า สมการโครงสร้างมีลักษณะของความชี้ชัด (Identification) หรือไม่ โดยลักษณะการชี้ชัดแบ่งได้เป็น 3 แบบคือ

1. สมการที่มีลักษณะชี้ชัดพอดี (Exactly Identification) คือการที่สามารถหาค่าพารามิเตอร์ของสมการโครงสร้างออกมาได้ชุดเดียว
2. สมการที่มีลักษณะชี้ชัดเกินจำเป็น (Over Identification)คือการที่สามารถหาค่าพารามิเตอร์ของสมการโครงสร้างแล้วได้ค่าพารามิเตอร์ของตัวแปรต่าง ๆ มากกว่า 1 ชุด

3. สมการที่มีลักษณะชี้ชัดไม่ได้ (Under Identification) คือการที่ไม่สามารถหาค่าพารามิเตอร์ของสมการโครงสร้างนั้นได้

ในการแก้ปัญหาสมการที่มีลักษณะชี้ชัดเกินจำเป็นนั้น อาจทำได้โดยการตัดตัวแปรที่ไม่สำคัญออกเพื่อที่จะได้ค่าพารามิเตอร์ที่ชัดเจนเพียงชุดเดียว

ส่วนในการแก้ปัญหาสมการที่มีลักษณะชี้ชัดไม่ได้ ก็ทำได้โดยการเพิ่มจำนวนตัวแปรหรือสมการเข้าไปในระบบเพื่อให้มีความสำคัญมากขึ้นจะได้อธิบายตัวแปรตามที่ไม่สามารถชี้ชัดได้

กฎการชี้ชัด (Rules for Identification)

ในการพิจารณาปัญหาการชี้ชัดนั้น มีขั้นตอนการดำเนินการพิจารณา 2 ขั้นตอน โดยขั้นตอนแรก คือ การพิจารณาเงื่อนไขลำดับที่ ซึ่งเป็นเงื่อนไขจำเป็นต้องมี เมื่อพิจารณาขั้นตอนแรกผ่านแล้วต้องพิจารณาขั้นตอนที่ 2 คือ ขั้นตอนเงื่อนไขแรงค์ เป็นสิ่งจำเป็นและเป็นเงื่อนไขเพียงพอสำหรับการชี้ชัด

1. เงื่อนไขลำดับที่ (Order condition of Identification)

เงื่อนไขลำดับที่ของการชี้ชัด เป็นเงื่อนไขที่ทุกสมการที่มีลักษณะชี้ชัดจำเป็นต้องมี กล่าวคือ สมการใดก็ตามที่ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขลำดับแรกย่อมสรุปได้ว่าสมการนั้นมีลักษณะชี้ชัดไม่ได้

สัญลักษณ์ที่ใช้พิจารณาสมการชี้ชัด

G = จำนวนตัวแปรภายในทั้งหมดที่ปรากฏอยู่ในระบบสมการ

G^* = จำนวนตัวแปรภายในที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ต้องการพิจารณา

G^{**} = จำนวนตัวแปรภายในที่ไม่ได้ปรากฏในสมการที่ต้องการพิจารณา

K = จำนวนตัวแปรกำหนดค่าล่วงหน้าทั้งหมดที่ปรากฏอยู่ในระบบสมการ

K^* = จำนวนตัวแปรกำหนดค่าล่วงหน้าที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ต้องการพิจารณา

K^{**} = จำนวนตัวแปรกำหนดค่าล่วงหน้าที่ไม่ได้ปรากฏอยู่ในสมการที่ต้องการพิจารณา

คำนิยามของเงื่อนไขลำดับที่

$K^{**} < G^*-1$ สมการนั้นจะมีลักษณะชี้ชัดไม่ได้

ถ้า $K^{**} = G^{*}-1$ สมการนั้นจะมีลักษณะชี้ชัดพอดี

$K^{**} > G^{*}-1$ สมการนั้นจะมีลักษณะชี้ชัดเกินจำเป็น

2. การทดสอบเงื่อนไขแรงค์เพื่อการชี้ชัด (Rank condition of Identification)

เมื่อผ่านขั้นตอนการทดสอบเงื่อนไขลำดับที่แล้ว จะต้องนำสมการที่สามารถชี้ชัดได้มาทำการทดสอบเงื่อนไขแรงค์ เพื่อเป็นการยืยยันว่าสมการนั้นสามารถชี้ชัดได้จริง

ขั้นตอนการทดสอบเงื่อนไขแรงค์

1) เขียนระบบสมการใหม่ โดยจัดให้ตัวแปรภายในและตัวแปรภายนอกอยู่ด้ายซ้ายมือ และตัวคลาดเคลื่อนอยู่ทางขวามือ
2) สร้างตารางของสัมประสิทธิ์โครงสร้างทั้งตัวแปรภายในและตัวแปรภายนอก
3) ขีดฆ่าสัมประสิทธิ์โครงสร้างของสมการที่ต้องการพิจารณาออกทั้งแถวนอน (row) และขีดฆ่าสัมประสิทธิ์โครงสร้างของสมการที่ต้องการพิจารณาที่ไม่ได้มีค่าเป็นศูนย์ออกทั้งแถวตั้ง (Column) ทุกแถว
4) สัมประสิทธิ์โครงสร้างที่เหลือจากการขีดฆ่าในข้อที่ 3 คือสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในระบบสมการ แต่ไม่ได้ปรากฏอยู่ในสมการที่ต้องการพิจารณา นำสัมประสิทธิ์ที่เหลือมาสร้างเป็นเมตริกซ์แล้วหา rank ของ matrix ถ้าหาค่า rank ได้ = G – 1 สมการที่พิจารณาอยู่นั้น จะมีลักษณะชี้ชัดได้ แต่ ถ้า rank < G – 1 สมการนี้มีลักษณะชี้ชัดไม่ได้

ตัวอย่าง อุปสงค์ $Q_t^d = \alpha_0+\alpha_1 P_t+\alpha_2 I_t+\alpha_3 T_t+u_t$

อุปทาน$Q_t^s = \beta_0+\beta_1 P_t+u_{tt}$

Q = ปริมาณ

P = ราคา

I = รายได้

T = รสนิยม

ตัวแปรภายใน (G) ในระบบสมการนี้ คือ P_t กับ Q_t = 2 ตัว

ตัวแปรกำหนดค่าล่วงหน้า (K) ในระบบสมการนี้ คือ I_t, T_t = 2 ตัว

ขั้นตอนที่ 1 ทำการทดสอบเงื่อนไขลำดับที่ (Order Condition) โดย

พิจารณา สมการ อุปสงค์ K** = 0 (ไม่มีเลย)

G*-1 = 2 - 1 = 1 (G* คือ P_t, Q_t)

K** $<$ G* - 1 สมการอุปสงค์มีลักษณะชี้ชัดไม่ได้

พิจารณา สมการ อุปทาน K** = 2 (K** คือ I_t, R_t)

G* - 1 = 2 - 1 = 1 (G* คือ P_t, Q_t)

K** $>$ G*-1 สมการอุปทานมีลักษณะชี้ชัดเกินจำเป็น

ขั้นตอนที่ 2 ทำการทดสอบเงื่อนไขแร้งค์ Rank Condition โดย

1) ย้ายระบบสมการเสียใหม่ดังนี้

อุปสงค์ $Q_t^d - \alpha_0 - \alpha_1 P_t - \alpha_2 I_t - \alpha_3 T_t = u_t$

อุปทาน $Q_t^s - \beta_0 - \beta_1 P_t = u_{tt}$

2) สร้างตารางของสัมประสิทธิ์โครงสร้างจากข้อ 1) คือ

ชื่อสมการ	Q_t	1	P_t	I_t	T_t
อุปสงค์	1	$-\alpha_0$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$
อุปทาน	1	$-\beta_0$	$-\beta_1$	0	0

3) พิจารณา สมการอุปทาน โดยขีดฆ่าแถวนอนที่ 2 ออกและขีดฆ่าสัมประสิทธิ์โครงสร้างของสมการอุปทานที่มิได้มีค่าเป็น 0 ออกในแนวตั้งทั้งแถว

4) สร้าง Matrix ของ สัมประสิทธิ์โครงสร้าง ส่วนที่เหลือซึ่งได้แก่

$$\begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อนำ Matrix นี้ มาหา rank จะได้ = 1 ซึ่ง = (G-1) คือ 2-1 = 1 แสดงว่าสมการอุปทานมีลักษณะชี้ชัดพอดี

สรุปว่า สมการอุปสงค์ไม่สามารถชี้ชัดได้ ในขณะที่สมการอุปทานมีลักษณะชี้ชัดเกินจำเป็น

ตามที่ได้กล่าวไว้แล้วว่าถ้าหากสมการใดไม่สามารถชี้ชัดได้ก็ให้ทำการเพิ่มตัวแปรให้พอกับความต้องการในการชี้ชัดได้พิจารณาจากตัวอย่างที่ 2 พบว่าสมการอุปสงค์ไม่สามารถชี้ชัดได้ เพราะ K** $<$ (G* - 1) อยู่ 1 แสดงว่าเราต้องทำการเพิ่มตัวแปรที่อยู่นอกสมการอุปสงค์ขึ้นอีก 1 ตัว เพื่อที่สมการอุปสงค์จะสามารถชี้ชัดได้ โดยพิจารณาแล้วเห็นว่าควรเพิ่มตัวแปร P_{t-1} เขาไปไว้ในสมการอุปทาน

สำหรับสมการใดที่ชี้ชัดเกินจำเป็นก็ให้ทำการลดตัวแปรที่เห็นว่าไม่ค่อยสำคัญออกจากระบบสมการเพื่อที่สมการจะมีลักษณะการชี้ชัดพอดี เมื่อพิจารณาจากตัวอย่างที่ 2 พบว่าสมการ

อุปทานเป็นสมการที่มีลักษณะชี้ชัดเกินจำเป็นเพราะ K** > (G* - 1) อยู่ 1 แสดงว่าเราต้องทำการลดตัวแปรที่อยู่นอกสมการอุปทานลงอีก 1 ตัวเพื่อที่สมการอุปทานจะสามารถชี้ชัดได้พอดี โดยพิจารณาแล้วเห็นว่าควรลดตัวแปร T_t เพราะเป็นตัวแปรประเภทเชิงคุณภาพที่มีความลำบากในการวัดค่าออกมาเป็นปริมาณอยู่แล้วด้วย

เมื่อทำการเพิ่มตัวแปร P_{t-1} เข้าไปไว้ในสมการอุปทาน และทำการลดตัวแปร T_t ในสมการอุปสงค์แล้ว ทำการพิจารณาใหม่จะพบว่าทั้งสมการอุปสงค์ และสมการอุปทาน สามากรถชี้ชัดได้พอดีดังตัวอย่าง ต่อไปนี้

ตัวอย่าง อุปสงค์ $Q_t^d = \alpha_0+\alpha_1 P_t+\alpha_2 I_t+u_t$

อุปทาน $Q_t^s = \beta_0+\beta_1 P_t+\beta_2 P_{t-1}+u_t$

ตัวแปรภายใน (G) ในระบบสมการนี้ คือ P_t กับ Q_t = 2 ตัว

ตัวแปรกำหนดค่าล่วงหน้า (K) ในระบบสมการนี้ คือ I_t, P_{t-1} = 2 ตัว

ขั้นตอนที่ 1 ทำการทดสอบเงื่อนไขลำดับที่ (Order Condition) โดย

พิจารณา สมการอุปสงค์ K** = 1 (K** คือ P_{t-1})

G*-1 = 2 - 1 = 1 (G*คือ P_t, Q_t)

K** = G* - 1 สมการอุปสงค์มีลักษณะชี้ชัดพอดี

พิจารณา สมการอุปทาน K** = 1 (K** คือ I_t)

G* - 1 = 2 - 1 = 1 (G* คือ P_t, Q_t)

K** = G*-1 สมการอุปทานมีลักษณะชี้ชัดพอดี

ขั้นตอนที่ 2 ทำการทดสอบเงื่อนไขแร้งค์ Rank Condition โดย

1) ย้ายระบบสมการเสียใหม่ดังนี้

อุปสงค์ $Q_t^d-\alpha_0-\alpha_1 P_t-\alpha_2 I_t = u_t$

อุปทาน $Q_t^s-\beta_0-\beta_1 P_t-\beta_2 P_{t-1} = u_t$

2) สร้างตารางของสัมประสิทธิ์โครงสร้างจากข้อ 1) คือ

ชื่อสมการ	Q_t	1	P_t	I_t	P_{t-1}
อุปสงค์	1	$-\alpha_0$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	0
อุปทาน	1	$-\beta_0$	$-\beta_1$	0	$-\beta_2$

3) พิจารณาสมการอุปสงค์ โดยขีดฆ่าแถวนอนที่ 1 ออก และขีดฆ่าสัมประสิทธิ์โครงสร้างของสมการอุปสงค์ที่มิได้ มีค่าเป็น 0 ออกในแนวตั้งทุกแถว

4) สร้าง Matrix ของ สัมประสิทธิ์โครงสร้างส่วนที่เหลือซึ่งได้แก่ $|-\beta_2|$ Matrix นี้ ถ้านำมาหา rank จะได้ = 1 ซึ่งเท่ากับ G – 1 = (2-1) = 1 พอดีดังนั้นสมการอุปสงค์ตามเงื่อนไข แร้งค์ มีลักษณะชี้ชัดพอดี

ต่อไปพิจารณาสมการอุปทานโดยทำเหมือนขั้นตอนที่ 1 และ 2จะได้ตารางของสัมประสิทธิ์โครงสร้างดังนี้

ชื่อสมการ	Q_t	1	P_t	I_t	P_{t-1}
อุปสงค์	1	$-\alpha_0$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	0
อุปทาน	1	$-\beta_0$	$-\beta_1$	0	$-\beta_2$

และดำเนินการต่อไปโดย

5) พิจารณา สมการอุปทาน โดยขีดฆ่าสมการอุปทานหรือแถวนอนที่ 2 ออก และขีดฆ่าสัมประสิทธิ์โครงสร้างของสมการอุปทานที่มิได้มีค่าเป็น 0 ออกในแนวตั้งทุกแถว

6) สร้าง Matrix ของ สัมประสิทธิ์โครงสร้าง ส่วนที่เหลือซึ่งได้แก่ $|-\alpha_2|$ เมื่อนำ Matrix นี้ มาหา rank จะได้ = 1 ซึ่ง = (G-1) คือ 2-1 = 1 แสดงว่าสมการอุปทานมีลักษณะชี้ชัดพอดี

สรุปว่า ทั้งสมการอุปสงค์ และสมการอุปทานมีลักษณะชี้ชัดพอดี