บทที่ 4

ความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์และฟังก์ชันทางพีชคณิต

(Economic Relationships and Algebraic Functions)

วัตถุประสงค์ : การนำตัวแปรมาสร้างความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์ ในรูปฟังก์ชันทางพีชคณิต ที่มีความสัมพันธ์ของตัวแปรตามกับตัวแปรอิสระตัวเดียว หลายตัว และที่มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นและไม่เป็นแบบเชิงเส้น ตลอดจนการแสดงผลในรูปพีชคณิตและรูปกราฟ

บทที่ 4
ความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์ และ ฟังก์ชันทางพีชคณิต
(Economic Relationships and Algebraic Functions)

ความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์ (Economic Relationships)

เริ่มพิจารณาจากความสัมพันธ์อย่างง่ายซึ่งประกอบด้วยตัวแปรตาม 1 ตัว และอิสระ 1 ตัว จากนั้นก็จะเริ่มมีความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนขึ้นโดยอาจจะประกอบด้วยตัวแปรตาม 1 ตัวและตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว และสุดท้ายจะเป็นความสัมพันธ์แบบเกี่ยวเนื่อง โดยจะมีชุดสมการที่ประกอบด้วยตัวแปรตามหลายตัวและตัวแปรอิสระหลายตัวซึ่งจะมีความสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องกัน ตัวอย่างความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์ เช่น

1. Production Function

เป็นการแสดงความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์ในด้านของปัจจัยเข้า (Input) และปัจจัยออก (Output) เช่น ชาวนาทำการปลูกข้าวเขาสามารถทำให้ผลผลิตเพิ่มขึ้นได้โดยการใส่ปุ๋ย ถ้าชาวนาใส่ปุ๋ยมากเกินไปก็จะทำให้ข้าวบางส่วนตายไป เนื่องจากการได้รับปุ๋ยมากเกินไปจะทำให้ผลผลิตต่อไร่ลดลง

2. Consumption Function

เป็นการแสดงความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์ในด้านของ ตัวแปรอิสระ (Independent Variable) และตัวแปรตาม (Dependent Variable) เช่น ชายคนหนึ่งมีรายได้ 100,000 บาท / ปี เขาต้องเสียภาษีจำนวน 20,000 บาท / ปี เก็บออม 30,000 บาท / ปี ที่เหลือ 50,000 บาท เขานำไปใช้เพื่อการบริโภค ถ้ารายได้ของชายผู้นี้ลดลงเหลือ 70,000 บาท / ปี อาจเป็นไปได้ว่าหลังจากหักภาษีและเก็บออมแล้วเขาจะเหลือเงินสำหรับการบริโภคจำนวน 40,000 บาท แต่ถ้ารายได้ของชายผู้นี้สูงขึ้นเป็น160,000 บาท / ปี หลังจากหักภาษีและเก็บออมแล้วเขาจะเหลือเงินสำหรับการบริโภคจำนวน 70,000 บาท ความสัมพันธ์ระหว่างรายได้และการบริโภคดังกล่าวนี้เรียกว่า Consumption Function

3. Demand Function

เป็นการแสดงความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์ในด้านของราคาและปริมาณ โดยเรียกปริมาณว่าตัวแปรตาม(Dependent Variable) และราคาจะเป็นตัวกำหนดปริมาณซื้อเรียกว่า ตัวแปรอิสระ (Independent Variable) เช่นปริมาณการซื้อเนื้อไก่ขึ้นอยู่กับราคาของเนื้อไก่ เมื่อราคาเนื้อไก่สูงขึ้นก็จะทำให้ความต้องการซื้อเนื้อไก่น้อยลง และเมื่อราคาของเนื้อไก่ถูกลงปริมาณการซื้อเนื้อไก่ก็จะเพิ่มขึ้น เช่นกันความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ เรียกว่า Demand Function

การใช้สัญลักษณ์ (Use of Symbols)

ในการอธิบายความหมายของตัวแปรต่างๆ เราอาจจะใช้สัญลักษณ์แทนตัวแปรเพื่อใช้เรียกตัวแปรที่เราต้องการพิจารณา เช่น ตัวอย่าง

¶ = (Greek Lower case pi) หมายถึง ค่าคงที่เท่ากับ 3.14159...

d = (Roman Lower case D) หมายถึง การ differentiation

e = (Roman Lower case E) มีค่าคงที่เท่ากับ 2.71828...

Inverse Function and Problem of Causality

โดยปกติแล้วจะเขียนความสัมพันธ์ของสมการด้วยการเขียนตัวแปรตามไว้ทางซ้ายมือและตัวแปรอิสระไว้ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ และในความหมายทางเศรษฐศาสตร์แล้วความสัมพันธ์ของตัวแปรจะมีความสัมพันธ์ทางเดียวคือ เกิดจากทางขวามือไปทางซ้ายมือแต่ในความหมายของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์แล้วจะไม่ได้กำหนดความสัมพันธ์เหมือนทางเศรษฐศาสตร์ โดยทางคณิตศาสตร์แล้วจะแสดงความหมายของความสัมพันธ์ของตัวแปรทางซ้ายกับทางขวาเท่านั้น โดยไม่ได้ให้ความสัมพันธ์ว่าตัวแปรตามทางซ้ายจะต้องเกิดจากตัวแปรอิสระทางขวา

เช่น สมการ $C = 0.7Y$

ในทางเศรษฐศาสตร์มีความหมายว่าเมื่อรายได้ (Y) 1 ส่วน จะสามารถนำไปใช้เพื่อการบริโภค (C) 0.7 ส่วน แต่ถ้าเขียนสมการใหม่เป็น $Y = \frac{1}{0.7}C$ ในทางเศรษฐศาสตร์เราไม่สามารถที่จะอธิบายได้ว่าถ้าบริโภค (C) จำนวน 1 /0.7 ส่วน แล้วจะทำให้เกิดรายได้ (Y) จำนวน 1 ส่วน แต่ทางคณิตศาสตร์นั้นสามารถเขียนได้ และยังมีการใช้สัญลักษณ์แทนลักษณะของความสัมพันธ์ในทางกลับกัน เรียกว่า Inverse Function

เช่น เดิม $C = h(Y)$

แต่ถ้าเป็น Inverse Function สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$Y = h^{-1}(C)$$

Implicit and Explicit Functions

จากสมการ $C = 0.7Y$

ซึ่งเป็นสมการ Explicit Functions คือสามารถกำหนดได้อย่างชัดเจนว่าตัวแปรทางซ้ายมือมีความสัมพันธ์อย่างไรกับตัวแปรทางขวามือ ถ้าเขียนใหม่เป็น

$$C - 0.7Y = 0$$

เรียกสมการที่เขียนใหม่ว่าเป็นสมการ Implicit Functions ซึ่งสมการนี้แสดงให้เห็นว่ามีความสัมพันธ์ระหว่าง C กับ Y โดยมีตัวแปรหนึ่งเป็นตัวแปรตาม (Dependent Variable) และอีกตัวหนึ่งคือตัวแปรอิสระ (Independent Variable) เมื่อพิจารณาสมการโดยอาศัยหลักการทางเศรษฐศาสตร์จะทราบว่าตัวแปรตามคือ C และตัวแปรอิสระคือ Y สามารถเขียน Implicit Functions ได้ดังนี้

$$F(C,Y) = 0$$

โดย F แสดงถึงความเป็น Implicit Functions และ C กับ Y แสดงถึงตัวแปรหนึ่งเป็นตัวแปรตาม (Dependent Variable) และอีกตัวหนึ่งคือตัวแปรอิสระ (Independent Variable)

การแสดงผลความสัมพันธ์

1. **การแสดงผลในรูปพีชคณิต**

จากตัวอย่างความสัมพันธ์ที่ผ่านมาจะเห็นว่า สามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$C = h(Y)$$

ถ้าหากต้องการทราบความสัมพันธ์โดยเฉพาะเจาะจงสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้เช่น

$$C = 0.7Y$$

ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ให้เห็นได้อย่างชัดเจนว่าทุก ๆ ระดับมูลค่า Y จะมีความสัมพันธ์กับมูลค่า C โดยการนำมูลค่า Y ในระดับนั้น ๆ ไปคูณด้วย 0.7 โดยที่ 0.7 นั้นเรียกว่าค่าพารามิเตอร์ (parameter) หรือค่าสัมประสิทธิ์ (coefficient) ซึ่งค่านี้สามารถคำนวณได้โดยวิธีการทางเศรษฐมิติ

2. การแสดงผลในรูปกราฟ

การแสดงผลในรูปกราฟจะมีข้อจำกัดทางด้านมิติ เพราะจะต้องใช้ 1 มิติ สำหรับตัวแปร 1 ตัว ดังนั้น ถ้าแสดงกราฟในรูป 2 มิติ ก็จะสามารถแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรได้เพียง 2 ตัว และข้อจำกัดอีกอย่างคือ รูปกราฟสามารถแสดงค่าความสัมพันธ์ที่เฉพาะเจาะจงเท่านั้น ไม่สามารถแสดงความสัมพันธ์ในลักษณะที่เป็นสมการทั่วไปได้

ฟังก์ชันความสัมพันธ์ที่มีตัวแปรอิสระหลายตัว

จากหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ของตัวแปรเพียงสองตัวคือตัวแปรตามและตัวแปรอิสระ แต่เราสามารถสร้างฟังก์ชันความสัมพันธ์ที่มีตัวแปรอิสระหลายตัวได้ดังนี้
ฟังก์ชันการผลิตข้าวกับฟังก์ชันของการบริโภค ให้มีความสมบูรณ์มากขึ้น ด้วยการเพิ่มตัวแปรที่น่าจะมีอิทธิพลต่อตัวแปรตาม เช่น

ฟังก์ชันการผลิตข้าว อาจจะเป็น

	Y	=	f (X,Y)
โดย	Y	=	ปริมาณผลผลิตข้าว เป็น ถังต่อไร่
	X	=	ปริมาณปุ๋ยที่ใส่ เป็นกิโลกรัมต่อไร่
	R	=	ปริมาณน้ำฝน เป็น มิลลิเมตรต่อปี

และสำหรับฟังก์ชันการบริโภคอาจจะประกอบด้วย

	C	=	f (Y,n,A)
โดย	C	=	การใช้จ่ายเพื่อการบริโภคของครัวเรือนมีหน่วยเป็นบาท / ปี
	Y	=	รายได้ของครัวเรือนมีหน่วยเป็นบาท / ปี
	n	=	จำนวนสมาชิกในครัวเรือน มีหน่วยเป็นคน
	A	=	อายุเฉลี่ยของพ่อแม่ มีหน่วยเป็นปี

ความสัมพันธ์ของตัวแปรสามารถที่จะเพิ่มตัวแปรอิสระ ทางขวามือของสมการได้อีกถ้าเห็นว่าเป็นตัวแปรที่มีความสำคัญ แต่ที่สำคัญคือต้องมีทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์รองรับด้วยเมื่อได้ความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระหลายตัวที่มีต่อตัวแปรตามตัวใดตัวหนึ่งแล้วต่อไปต้องพยายามเขียนความสัมพันธ์เหล่านั้นให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อจะได้สามารถทำการวิเคราะห์หาผลของตัวแปรตามในโอกาสต่อไป

ความสัมพันธ์ของตัวแปร 3 ตัว แบบเชิงเส้น

(Linear Relationships Involving Three Variables)

จากหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึงฟังก์ชันความสัมพันธ์ที่มีตัวแปรอิสระหลายตัวแต่เราสามารถสร้างฟังก์ชันความสัมพันธ์ของตัวแปร 3 ตัว แบบเชิงเส้น (Linear Relationships Involving Three Variables) ได้ดังนี้

สมมติว่าพ่อค้าหมูทำการสังเกตปริมาณความต้องการเนื้อหมูของผู้บริโภคพบว่าการเปลี่ยนแปลงในปริมาณการซื้อเนื้อหมูไม่ได้เกิดจากราคาหมูเพียงอย่างเดียว แต่ยังเกิดจากการเปลี่ยนแปลงในราคาของเนื้อไก่ด้วย โดยเขาพบว่าปริมาณการซื้อเนื้อหมูจะลดลงถ้าราคาเนื้อหมูสูงขึ้นแต่จะสูงขึ้นถ้าราคาเนื้อไก่สูงขึ้น เนื่องจากผู้บริโภคเปลี่ยนจากการซื้อเนื้อไก่มาเป็นเนื้อหมูเมื่อราคาไก่สูงขึ้น ในทางคณิตศาสตร์ สามารถเขียนความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้คือ ปริมาณซื้อเนื้อหมูจะมีความสัมพันธ์เป็นลบ (-) กับราคาเนื้อหมู และความสัมพันธ์ของเนื้อหมูกับราคาเนื้อไก่ จะเป็นบวก (+) ถ้าพ่อค้าหมูเป็นผู้มีความรู้ทางเศรษฐมิติ เขาสามารถที่จะใช้ข้อมูลทางเชิงปริมาณ เพื่อหาความสัมพันธ์ดังกล่าว สมมติความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$Q = 8 - 0.2P_p + 0.1P_c$$

โดย Q = ปริมาณเนื้อหมูที่ลูกค้าแต่ละรายซื้อมีหน่วยเป็นกิโลกรัม

P_p = ราคาของเนื้อหมู มีหน่วยเป็นบาทต่อกิโลกรัม

P_c = ราคาของเนื้อไก่ มีหน่วยเป็นบาทต่อกิโลกรัม

จากสมการแสดงให้เห็นถึง ความสัมพันธ์ของตัวแปร 3 ตัว คือ Q, P_p, P_c โดยมี Q เป็นตัวแปรตาม และ P_p กับ P_c เป็นตัวแปรอิสระ

สมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรมากกว่า 3 ตัว

(Linear Equation Involving More than Three Variables)

ขนาดความสัมพันธ์เชิงเส้น สามารถขยายจำนวนตัวแปรออกไปได้อีก เช่นความสัมพันธ์เชิงเส้นของความต้องการซื้อมันฝรั่ง สามารถเขียนได้เป็น

$$Q = a+b_1 P+b_2 Y+b_3 R+b_4 T$$

Q = ปริมาณเสนอซื้อมันฝรั่ง

P = ราคามันฝรั่ง

Y = รายได้ของผู้บริโภค

R = ราคาข้าว

T = รสนิยม

ส่วนค่า a, b_1, b_2, b_3, b_4 หมายถึงค่า coefficient หรือค่า parameter สมการนี้ไม่สามารถเขียนในรูปกราฟได้เพราะถ้าเขียนจะต้องใช้แกนถึง 5 แกน หรือ 5 มิติ ด้วยกัน แต่อย่างไรก็ตาม เราก็สามารถใช้ความสัมพันธ์กรณีมี 2 ตัวแปร มาอธิบายสมการนี้ได้โดยให้ a หมายถึงค่า intercept หรือค่าคงที่เมื่อตัวแปรทุกตัวทางขวามือมีค่าเท่ากับศูนย์ (0) และค่า b ต่าง ๆ เป็นค่า Slope ของตัวแปรที่สัมพันธ์กัน เช่น b_2 จะหมายถึง Slope ของ function อันเนื่องมาจากตัวแปร Y

ความสัมพันธ์ของตัวแปรทางเศรษฐศาสตร์ที่ไม่ใช่เชิงเส้น (Nonlinear Economic Relationships)

ความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ไม่เป็นเส้นตรง (Nonlinear) ที่พบบ่อย ๆ ในการวิเคราะห์ทางเศรษฐศาสตร์ คือ

1. ความสัมพันธ์แบบ Polynomials

สมมติว่ามีฟังก์ชันการผลิต ซึ่งประกอบด้วยตัวแปร Y และ X โดย Y เป็นตัวแปรตาม หมายถึงระดับการผลิต และ X เป็นตัวแปรอิสระหมายถึง ปัจจัยการผลิตดังนี้ คือ

$$Y = 40 + 11X - X^2$$

ค่าของตัวแปรตามทางซ้ายมือจะประกอบด้วยผลบวกของ 3 เทอมที่มีกำลังต่างกัน ทางขวามือ โดย $X^0 = 1$ และ $X^1 = X$ ดังนั้นเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ทางขวามือได้ดังนี้

$$Y = 40 \times X^0 + 11 \times X^1 - 1 \times X^2$$

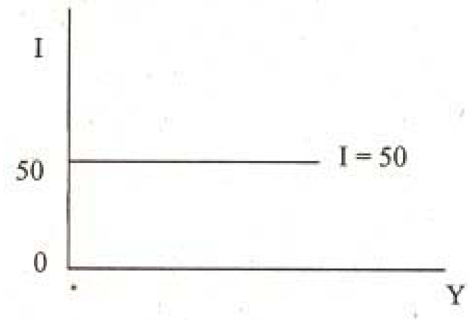
นั่นคือในเทอมแรกจะประกอบด้วย X กำลัง 0 เทอมที่สองประกอบด้วย X กำลัง 1 และเทอมที่สามประกอบด้วย X กำลัง 2

การที่จะเรียก ฟังก์ชันเป็นแบบ Polynomials นั่นจะหมายความเฉพาะกรณีที่ตัวแปรมีกำลังเป็นตัวเลขจำนวนเต็มเท่านั้น ถ้าตัวเลขเป็นเศษส่วน เช่น $\frac{1}{2}$ หรือ $2\frac{1}{4}$ เราจะไม่เรียกว่าเป็นฟังก์ชัน Polynomials แต่เราจะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันกำลัง (power function) แทน

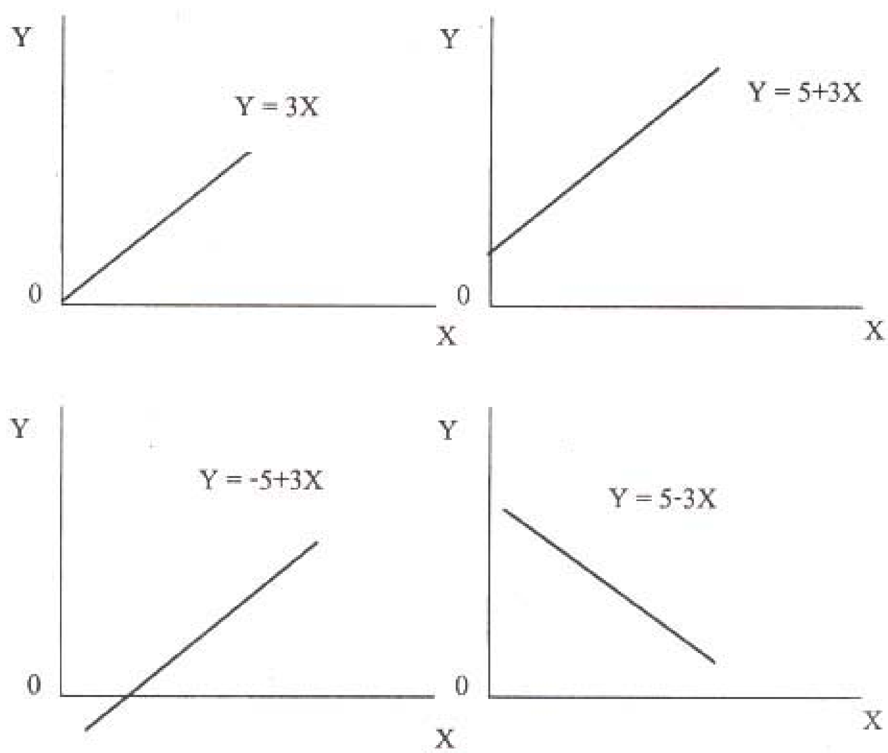
2. ลักษณะกราฟของฟังก์ชัน Polynomials

รูปร่างกราฟของฟังก์ชัน Polynomials จะเปลี่ยนแปลงไปตามขนาดและทิศทางของค่า a_0, a_1, a_2, a_3 ,…………………เช่น

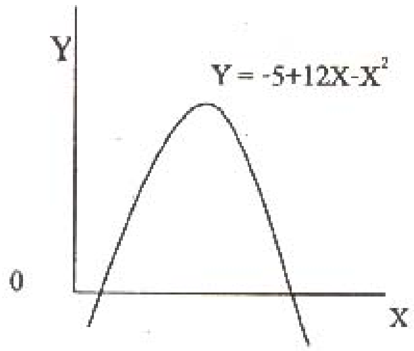
2.1 กราฟที่ตัวแปรอิสระมีกำลังเป็นศูนย์หรือ constant function เช่น I = 50 จะมีลักษณะเป็นเส้นตรงขนานกับแกนนอนห่างจากแกน X เท่ากับ a = 50 ดังรูป

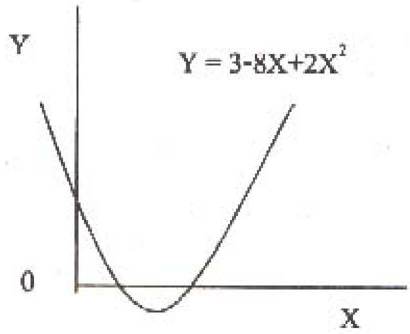


2.2 กราฟที่เป็น linear function จะมีลักษณะเป็นเส้นตรง มี intercept = a_0 และ Slope = a_1 ซึ่งทั้ง a_0 และ a_1 เป็นได้ทั้งค่าบวกและลบ และศูนย์ ดังรูป

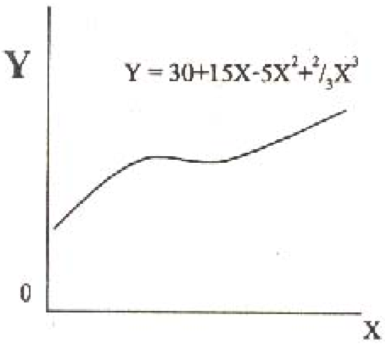


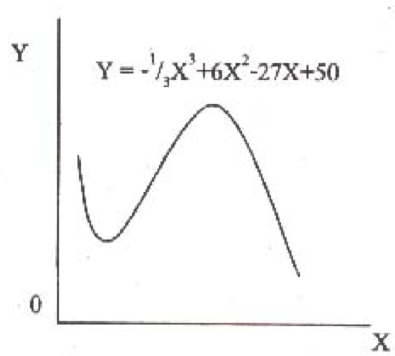
2.3 กราฟของ Quadratic function จะมีลักษณะเป็นรูป parabola จะเป็นรูปเว้าคว่ำ หรือเว้าหงาย ขึ้นอยู่กับ ค่า a_2 ถ้าค่า a_2 เป็นบวกจะได้รูปเว้าหงาย ถ้า a_2 เป็นลบ จะเป็นรูปเว้าคว่ำ ดังรูป





2.4.กราฟของฟังก์ชันกำลัง 3 (cubic) จะมีรูปร่างต่าง ๆ กัน ขึ้นอยู่กับขนาดและทิศทางของค่า coefficient เช่น





3. ฟังก์ชันยกกำลัง (power function)

ตัวอย่าง เกี่ยวกับฟังก์ชันยกกำลัง เช่น จากทฤษฎีการผลิต

	Y	=	$280L^{0.85}$
โดย	Y	=	ปริมาณผลผลิต
	L	=	จำนวนแรงงานที่ใช้ในการผลิต

ในกรณีนี้ จะให้ตัวแปรอิสระหนึ่งตัว อธิบายตัวแปรตามโดยที่ค่า coefficient 0.85 จะเรียกว่าเป็นค่ากำลัง (power) ของ L โดยค่า coefficient นี้จะเป็นค่าคงที่

3.1 ลักษณะทั่วไปของ power function

สามารถเขียนความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร ได้เป็น

$$Y = aX^b$$

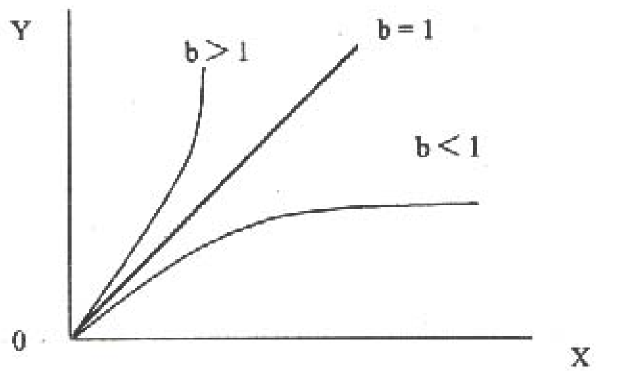
โดยที่ Y และ X เป็นตัวแปรตาม ส่วน a และ b เป็นค่าคงที่ เราจะพิจารณาค่า a และ b เฉพาะค่าที่เป็นบวก คือ a,b>0 ถ้า b=0 แสดงว่า Y = a จะเป็น constant function ถ้า b เป็นค่าจำนวนเต็มบวกก็จะเป็นชุดของ Polynomials function เช่นถ้า b = 1 สมการ $Y=aX^b$ ก็จะมีความสัมพันธ์แบบ function เชิงเส้น ที่มีค่า intercept เท่ากับ 0 และถ้าค่า b = 2 สมการ $Y=aX^b$ ก็จะเป็นสมการ Quadratic คือ $Y = aX^2$

3.2 ลักษณะกราฟของ power function

จากสมการข้างต้นเมื่อกำหนดให้ค่า b มีค่าต่าง ๆ คือ จากทฤษฎีการผลิต

ถ้า	ค่า	$b < 1$	จะเป็นกรณี	diminishing return
ถ้า		$b = 1$	จะเป็นกรณี	constant return
ถ้า		$b > 1$	จะเป็นกรณี	increasing return

สามารถเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังรูป



จากสมการข้างต้น $Y = aX^b$

ทำการ take log ฐาน e จะได้ $\ln Y = \ln a + b\ln X$

เมื่อกำหนดให้ $Y^* = \ln Y$

$$a^* = \ln a$$

$$X^* = \ln X$$

เขียนสมการใหม่จะได้ $$Y^* = a^* + bX^*$$

ซึ่งสมการใหม่นี้จะกลายเป็นสมการเชิงเส้นทั้ง ๆ ที่ ความสัมพันธ์ของตัวแปรเดิม เป็นแบบไม่ใช่เชิงเส้น (nonlinear) (เมื่อ $b > 1$) ดังนั้นเราอาจกล่าวได้ว่าฟังก์ชันกำลังสามารถทำเป็นสมการเชิงเส้นได้ในรูปของ logarithms

ฟังก์ชันของตัวแปรหลายตัวที่มีกำลังมากกว่า 1

(Higher Degree Polynomial Function of Several Variables)

กรณีฟังก์ชันความสัมพันธ์ที่มีหลายตัวแปร และตัวแปรอิสระเหล่านั้นอาจมีกำลังมากกว่าหนึ่ง เช่น ผลผลิตข้าว มีความสัมพันธ์กับตัวแปรอิสระ 2 ตัว ที่มีกำลังเป็น 2

ตัวอย่าง $$Y = a + b_1N+b_2P+b_3N^2+b_4P^2+b_5NP$$

โดย Y = ผลผลิตข้าว

N = ปุ๋ยไนโตรเจน

P = ปุ๋ยฟอสฟอรัส

$a, b_1,b_2,b_3,\ldots,b_5$ = ค่า coefficient หรือค่า parameter

ถ้ามีปุ๋ยตัวอื่นๆอีก เช่น K หมายถึง ปุ๋ยโปรแตสเซียม และความสัมพันธ์ยังเป็นแบบกำลัง 2 จะเขียนสมการใหม่ได้ว่า

$$Y = a + b_1N+b_2P+b_3 K+b_4N^2+b_5P^2+b_6K^2+b_7NP+b_8NK+b_9PK$$