เฉลยคำถามท้ายบทที่ 11

แบบจำลองพลวัต

(Dynamic Model)

1. จงหากาลวิถีของสมการต่อไปนี้

ก) $Y_{t+1} = Y_t + 1$ $(Y_0 = 10)$

วิธีทำ :

จากมาตรฐานทั่วไปของสมการผลต่างสืบเนื่อง:

$$Y_{t+1} + aY_t = c$$

กรณี $a = -1$ จะได้ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$Y_t = Y_0 + ct$$

ในที่นี้ : $Y_{t+1} - Y_t = 1$

นั่นคือ $a = -1$ และ $c = 1$

ดังนั้น : กาลวิถี คือ $Y_t = 10 + t$

ข) $Y_{t+1} = aY_t$ $(Y_0 = b)$

วิธีทำ :

จากมาตรฐานทั่วไปของสมการผลต่างสืบเนื่อง:

$$Y_{t+1} + aY_t = c$$

ในที่นี้ : $Y_{t+1} - aY_t = 0$

นั่นคือ $a = -a$ และ $c = 0$

โดยผลเฉลยทั่วไป คือ $Y_t = (-a)^t Y_0$

ดังนั้น : กาลวิถี คือ $Y_t = a^t b$

ค) $Y_{t+1} + 3Y_t = 4$ $(Y_0 = 4)$

วิธีทำ : จากมาตรฐานทั่วไปของสมการผลต่างสืบเนื่อง:

$$Y_{t+1} + aY_t = c$$

จะได้ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$Y_t = (Y_0 - \frac{c}{1+a})(-a)^t + \frac{c}{1+a}$$

ในที่นี้ $Y_{t+1} + 3Y_t = 4$

โดยที่ $a = 3$ และ $c = 4$

ดังนั้น : กาลวิถี คือ $Y_t = 3(-3)^t + 1$

ง) $Y_{t+1} = 0.2Y_t + 4$ $(Y_0 = 4)$

วิธีทำ : จากมาตรฐานทั่วไปของสมการผลต่างสืบเนื่อง :

$$Y_{t+1} + aY_t = c$$

จะได้ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$Y_t = (Y_0 - \frac{c}{1+a})(-a)^t + \frac{c}{1+a}$$

ในที่นี้ $Y_{t+1} - 0.2Y_t = 4$

โดยที่ $a = -0.2$ และ $c = 4$

ดังนั้น : กาลวิถี คือ $Y_t = -(0.2)^t + 5$

จ) $2Y_{t+1} - Y_t = 6$ $(Y_0 = 7)$

วิธีทำ : จากมาตรฐานทั่วไปของสมการผลต่างสืบเนื่อง :

$$Y_{t+1} + aY_t = c$$

จะได้ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$Y_t = (Y_0 - \frac{c}{1+a})(-a)^t + \frac{c}{1+a}$$

ในที่นี้ $2Y_{t+1} - Y_t = 6$

จะได้ $Y_{t+1} - 0.5Y_t = 3$

โดยที่ $a = -0.5$ และ $c = 3$

ดังนั้น : กาลวิถี คือ $Y_t = 0.5^t + 6$

2. กาลวิถีที่ได้จากข้อ 1 จงพิจารณาลักษณะทางเดินสู่ดุลยภาพว่าเป็นเช่นไร

ก) กาลวิถี : $Y_t = 10 + t$

จากกาลวิถีจะพบว่าเมื่อ $t \rightarrow \infty$ จะทำให้ Y_t มีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด

ดังนั้น กาลวิถีมีลักษณะลู่ออกจากดุลยภาพ

ข) กาลวิถี : $Y_t = a^t b$

พิจารณาจาก complementary function : Y_c

ซึ่ง $Y_c = Ab^t$

โดยพิจารณาค่า b เมื่อ $t \rightarrow \infty$ ถ้า

$b > 0$: กาลวิถีไม่กวัดแกว่ง

$b < 0$: กาลวิถีกวัดแกว่ง

$|b| > 1$: กาลวิถีลู่ออกจากดุลยภาพ

$|b| < 1$: กาลวิถีลู่เข้าหาดุลยภาพ

ในที่นี้ $Y_t = a^t b$

โดยที่ $b = a > 0$: กาลวิถีไม่กวัดแกว่ง

และถ้า $|a| > 1$: กาลวิถีลู่ออกจากดุลยภาพ

หรือ $|a| < 1$: กาลวิถีลู่เข้าหาดุลยภาพ

ค) กาลวิถี : $Y_t = 3(-3)^t + 1$

จากกาลวิถีจะพบว่า $b = -3 < 0$: กาลวิถีกวัดแกว่ง

และพบว่า $|b| = 3 > 1$: กาลวิถีลู่ออกจากดุลยภาพ

ดังนั้น กาลวิถีมีลักษณะกวัดแกว่ง และลู่ออกจากดุลยภาพที่ Y_t=1

ง) กาลวิถี : $Y_t = -(0.2)^t + 5$

จากกาลวิถีจะพบว่า $b = 0.2 > 0$: กาลวิถีไม่กวัดแกว่ง

และพบว่า $|b| = 0.2 < 1$: กาลวิถีลู่เข้าหาดุลยภาพ

ดังนั้น กาลวิถีมีลักษณะลู่เข้าหาดุลยภาพ ที่ $Y_t = 5$

จ) กาลวิถี : $Y_t = 0.5^t + 6$

จากกาลวิถีจะพบว่า $b = 0.5 > 0$: กาลวิถีไม่กวัดแกว่ง

และพบว่า $|b| = 0.5 < 1$: กาลวิถีลู่เข้าหาดุลยภาพ

ดังนั้น กาลวิถีมีลักษณะลู่เข้าหาดุลยภาพ ที่ $Y_t = 6$

3. จงหา general solution และ definite solution จากสมการ differential ต่อไปนี้

ก) $\frac{dY}{dt} + 4Y = 12$ $(Y_0 = 2)$

จากรูปทั่วไปของ differential equation : $\frac{dY}{dt} + aY = b$

จะได้ general solution : $Y_t = \frac{b}{a} + Ae^{-at}$

และได้ definite solution : $Y_t = \frac{b}{a} + (Y_0 - \frac{b}{a})e^{-at}$

ในที่นี้ : $\frac{dY}{dt} + 4Y = 12$

นั่นคือ $a = 4, \quad b = 12$

ดังนั้น general solution คือ $Y_t = 3 + Ae^{-4t}$

และ definite solution หรือ time path คือ $Y_t = 3 - e^{-4t}$

ข) $\frac{dY}{dt} + 10Y = 15$ $(Y_0 = 0)$

จากรูปทั่วไปของ differential equation : $\frac{dY}{dt} + aY = b$

จะได้ general solution คือ $Y_t = \frac{b}{a} + Ae^{-at}$

และได้ definite solution หรือ time path คือ $Y_t = \frac{b}{a} + (Y_0 - \frac{b}{a})e^{-at}$

ในที่นี้ : $\frac{dY}{dt} + 10Y = 15$

นั่นคือ $a = 10, \quad b = 15$

ดังนั้น General solution คือ $Y_t = \frac{3}{2} + Ae^{-10t}$

และ Definite solution หรือ Time path คือ $Y_t = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-10t}$

ค) $\frac{dY}{dt} - 2Y = 0$ $(Y_0 = 9)$

จากรูปทั่วไปของ differential equation : $\frac{dY}{dt} + aY = b$

จะได้ general solution: $Y_t = \frac{b}{a} + Ae^{-at}$

และได้ definite solution: $Y_t = \frac{b}{a} + (Y_0 - \frac{b}{a})e^{-at}$

ในที่นี้ : $\frac{dY}{dt} - 2Y = 0$

นั่นคือ $a = -2, \quad b = 0$

ดังนั้น general solution คือ $Y_t = Ae^{2t}$

และ definite solution หรือ time path คือ $Y_t = 9e^{2t}$

ง) $2\frac{dY}{dt} + 4Y = 12$ $(Y_0 = 1)$

จากรูปทั่วไปของ differential equation : $\frac{dY}{dt} + aY = b$

จะได้ general solution : $Y_t = \frac{b}{a} + Ae^{-at}$

และได้ definite solution : $Y_t = \frac{b}{a} + (Y_0 - \frac{b}{a})e^{-at}$

ในที่นี้ : $2\frac{dY}{dt} + 4Y = 6$

หรือ $\frac{dY}{dt} + 2Y = 3$

นั่นคือ $a = 2, \quad b = 3$

ดังนั้น general solution คือ $Y_t = \frac{3}{2} + Ae^{-2t}$

และ definite solution หรือ time path คือ $Y_t = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$

4. จงพิจารณา time path ในข้อ 3 มีลักษณะทางเดินสู่ดุลยภาพอย่างไร

ก) time path : $Y_t = 3 - e^{-4t}$

จาก $Y_t = \frac{b}{a} + (Y_0 - \frac{b}{a})e^{-at}$

ถ้า $Y_0 = \frac{b}{a}$ แสดงว่า เกิดดุลยภาพที่ $Y_t = \frac{b}{a}$

แต่ถ้า $Y_0 \neq \frac{b}{a}$ สามารถพิจารณาความมีเสถียรภาพของจุดดุลยภาพได้จากค่า e^{-at}

ถ้า $a > 0$ จะได้ว่า $e^{-at} \longrightarrow 0$ เมื่อ $t \to \infty$: กาลวิถีของ Y_t จะลู่เข้าหาดุลภาพที่ $Y_t = \frac{b}{a}$ และเป็นดุลภาพที่มีเสถียรภาพ

และ $a < 0$ จะได้ว่า $e^{-at} \longrightarrow \infty$ เมื่อ $t \longrightarrow \infty$: กาลวิถีของ Y_t จะลู่ออกจากดุลภาพ หมายความว่า ไม่มีเสถียรภาพที่จุดดุลยภาพ

ในที่นี้ $\frac{dY}{dt} + 4Y = 12$; $a = 4$

และ time path คือ $Y_t = 3 - e^{-4t}$

จะพบว่า $a = 4 > 0$ จะได้ว่า $e^{-4t} \longrightarrow 0$ เมื่อ $t \longrightarrow \infty$

แสดงว่า กาลวิถีของ Y_t จะลู่เข้าหาดุลภาพที่ $Y_t = 3$ และเป็นดุลภาพที่มีเสถียรภาพ

ข) $\frac{dY}{dt} + 10Y = 15$; $a = 10$

และ time path คือ $Y_t = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-10t}$

จะพบว่า $a = 10 > 0$ จะได้ว่า $-\frac{3}{2}e^{-10t} \longrightarrow 0$ เมื่อ $t \longrightarrow \infty$

แสดงว่า กาลวิถีของ Y_t จะลู่เข้าหาดุลภาพที่ $Y_t = \frac{3}{2}$ และเป็นดุลภาพที่มีเสถียรภาพ

ค) $\frac{dY}{dt} - 2Y = 0$; $a = -2$

และ time path คือ $Y_t = 9e^{2t}$

จะพบว่า $a = -2 < 0$ จะได้ว่า $9e^{2t} \longrightarrow \infty$ เมื่อ $t \longrightarrow \infty$

แสดงว่า กาลวิถีของ Y_t จะลู่ออกจากดุลภาพ นั่นคือไม่มีเสถียรภาพที่จุดดุลยภาพ

ง) $\frac{dY}{dt} + 2Y = 3$; a = 2

และ time path คือ $Y_t = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$

จะพบว่า $a = 2 > 0$ จะได้ว่า $-\frac{1}{2}e^{-2t} \rightarrow 0$ เมื่อ $t \rightarrow \infty$

แสดงว่า กาลวิถีของ Y_t จะลู่เข้าหาดุลภาพที่ $Y_t = \frac{3}{2}$ และเป็นดุลภาพที่มีเสถียรภาพ

5. จากแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์มหภาค

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$C_t = 150 + 0.7Y_{t-1}$$

กำหนดให้ $Y_0 = 200$ และ $I_0 = 100$

จงหา time path ของ Y_t และ C_t แล้วพิจารณาด้วยว่าเป็นดุลยภาพที่มีเสถียรภาพหรือไม่

วิธีทำ : จากโจทย์จะได้ $Y_t = 150 + 0.7Y_{t-1} + 100$

$$= 250 + 0.7Y_{t-1}$$

$$Y_t - 0.7Y_{t-1} = 250$$

เลื่อนเวลาขึ้นไป 1 หน่วยเวลา จะได้

$$Y_{t+1} - 0.7Y_t = 250$$

จากรูปทั่วไปของ difference equation:

$$Y_{t+1} + aY_t = c$$

และมี time path: $Y_t = (Y_0 - \frac{c}{1+a})(-a)^t + \frac{c}{1+a}$

ในที่นี้ : $a = -0.7$ และ $c = 250$

ดังนั้น จะได้ time path ดังนี้ $Y_t = -633(0.7)^t + 833$

พิจารณาความมีเสถียรภาพของดุลภาพของ time path:

จาก time path จะพบว่า

$b = 0.7 > 0$ แสดงว่ากาลวิถีไม่กวัดแกว่ง

$|b| = 0.7 < 1$ แสดงว่ากาลวิถีลู่เข้าหาดุลยภาพ

ดังนั้น time path ของ Y_t มีลักษณะลู่เข้าหาดุลยภาพที่ $Y_t = 833$ และเป็นดุลยภาพที่มีเสถียรภาพ

จากโจทย์ $C_t = 150 + 0.7Y_{t-1}$

และ $Y_t = C_t + I_t$

ที่ $t = 0$ $Y_0 = C_0 + I_0$

แทนค่า จะได้ $200 = C_0 + 100$

$C_0 = 100$

จาก $Y_t = C_t + I_t$

ทำการเลื่อนไป 1 หน่วยเวลา จะได้

$Y_{t-1} = C_{t-1} + I_{t-1}$

แทนค่าลง สมการ $C_t = 150 + 0.7Y_{t-1}$

จะได้ $C_t = 150 + 0.7(C_{t-1} + I_{t-1})$

ที่ $I_{t-1} = 100$

$C_t = 150 + 0.7(C_{t-1} + 100)$

$C_t = 150 + 0.7C_{t-1} + 70$

$C_t - 0.7C_{t-1} = 220$

ทำการเลื่อนไป 1 หน่วยเวลา จะได้

$C_{t+1} - 0.7C_t = 220$

โดยที่ $a = -0.7$ และ $c = 220$

ดังนั้น จะได้ time path ดังนี้

$$C_t = \left(100 - \frac{220}{1-0.7}\right)(0.7)^t + \frac{220}{1-0.7}$$

$$C_t = (-633)(0.7)^t + 733$$

จาก time path จะพบว่า

$b = 0.7 > 0$ แสดงว่ากาลวิถีไม่กวัดแกว่ง

$|b| = 0.7 < 1$ แสดงว่ากาลวิถีลู่เข้าหาดุลยภาพ

ดังนั้น time path ของ C_t มีลักษณะลู่เข้าหาดุลยภาพที่ $C_t = 733$ และเป็นดุลยภาพที่มีเสถียรภาพ

6. จากแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์มหภาค

$$Y = C + I + G$$

$$C = 150 + 0.7(\frac{dY}{dt})$$

$$I = 50$$

$$G = 80$$

จงหา time path ของ Y_t และ C_t แล้วพิจารณาด้วยว่าเป็นดุลยภาพที่มีเสถียรภาพหรือไม่

วิธีทำ:

จากโจทย์จะได้ $Y_t = 150 + 0.7(\frac{dY}{dt}) + 130$

$$= 280 + 0.7(\frac{dY}{dt})$$

จากรูปทั่วไปของ differential equation:

$$\frac{dY}{dt} + aY = b$$

และมี time path:

$$Y_t = \frac{b}{a} + (Y_0 - \frac{b}{a})e^{-at}$$

ในที่นี้ : $0.7(\frac{dY}{dt}) - Y = -280$

จะได้ : $\frac{dY}{dt} - \frac{10}{7} Y = -400$

โดยที่ : $a = -\frac{10}{7}$ และ $b = -400$

ดังนั้น จะได้ time path ดังนี้

$$Y_t = 280 + (Y_0 - 280)\, e^{1.43t}$$

พิจารณาความมีเสถียรภาพของดุลภาพของ Time path :

จาก time path จะพบว่า $a = -\frac{10}{7} < 0$ ทำให้ $(Y_0 - 280)\, e^{1.43t} \rightarrow \infty$ เมื่อ $t \rightarrow \infty$

ดังนั้น time path ของ Y_t มีลักษณะลู่ออก และไม่มีเสถียรภาพที่ดุลยภาพ

จากโจทย์ Y $= C + I + G$

ทำการ take total derivative จะได้

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dC}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dG}{dt}$$

เนื่องจาก I และ G ไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้น $\frac{dI}{dt}$ และ $\frac{dG}{dt}$ เท่ากับ 0 (ศูนย์)

จาก $C_t = 150 + 0.7(\frac{dY}{dt})$

จึงได้ว่า $C_t = 150 + 0.7(\frac{dC}{dt})$

จะได้ $\frac{dC}{dt} - \frac{1}{0.7} C_t = -\frac{150}{0.7}$

โดยที่ $a = -\frac{1}{0.7}$, $b = -\frac{150}{0.7}$

ดังนั้น จะได้ time path ดังนี้

$$C_t = 150 + (C_0 - 150)\, e^{1.43\, t}$$

จาก time path จะพบว่า $a = -\frac{1}{0.7} < 0$ ทำให้ $(Y_0 - 150)\, e^{1/0.7\, t} \to \infty$ เมื่อ $t \to \infty$

ดังนั้น time path ของ C_t มีลักษณะลู่ออก และไม่มีเสถียรภาพที่ดุลยภาพ