บทที่ 11

แบบจำลองพลวัต

(Dynamic Model)

วัตถุประสงค์ : เพื่อศึกษาถึงแบบจำลอง เมื่อมีเวลาเข้ามาเกี่ยวข้อง การหาทางเดินหรือกาลวิถี (Time Path) ของตัวแปรตามของแบบจำลองแบบขาดช่วงและแบบต่อเนื่อง ด้วยวิธี Iterative และวิธี General การพิจารณาดุลยภาพของแบบจำลองพลวัตว่ามีเสถียรภาพหรือไม่

บทที่ 11

แบบจำลองพลวัต

(Dynamic Model)

การพิจารณาหาค่าดุลยภาพ กรณี Static กับ Dynamic

1. กรณี Static การพิจารณาหาค่าดุลยภาพของระบบสมการไม่ยุ่งยาก เช่น มีสมการ Demand และ Supply ของสินค้าชนิดหนึ่งคือ

$$Q^d = a + bP \quad \text{..........................(1)}$$

$$Q^d = c + dP \quad \text{..........................(2)}$$

ที่ดุลยภาพ $Q^d = Q^s$

ได้

$$P = \frac{c-a}{b-d} = \frac{a-c}{d-b}$$

และ

$$Q = \frac{bc-ad}{b-d} = \frac{ad-bc}{d-b}$$

2. กรณี comparative Static คือกรณีที่การนำค่าที่ได้จากการคำนวณของกรณี Static 2 ค่ามาเปรียบเทียบกัน เช่น กรณีแรกเรามีสมการ Demand และ Supply ดังนี้

$$Q^d = a + bP \quad \text{..........................(3)}$$

$$Q^d = c + dP \quad \text{..........................(4)}$$

ได้

$$P = \frac{c-a}{b-d} = \frac{a-c}{d-b}$$

และ

$$Q = \frac{bc-ad}{b-d} = \frac{ad-bc}{d-b}$$

กรณีต่อมา ถ้ารัฐบาลเก็บภาษี Specific tax = t จากผู้ขายแล้ว ดุลยภาพใหม่จะเป็น

จาก (3)

$$P^d = \frac{Q^d - a}{b} \quad \text{.........................(5)}$$

จาก (4)

$$P^s = \frac{Q^s - c}{d} \quad \text{.........................(6)}$$

เมื่อ รัฐบาลเก็บภาษี Specific tax = t

$$P^t = P^s + t = \frac{Q^s - c}{d} + t$$

ที่ดุลยภาพ (3) = (5)

$$\frac{Q^d - a}{b} = \frac{Q^s - c}{d} + t$$

$$d\overline{Q}' - ad = b\overline{Q}' - bc + bdt$$

$$\overline{Q}' = \frac{ad - bc + bdt}{d - b} = \frac{bc - ad - bdt}{b - d}$$

$$\overline{P}' = \frac{bc - ab - bdt}{b(b - d)} = \frac{c - a - dt}{b - d}$$

จะเห็นได้ว่า ราคาก่อนการเก็บภาษีมีความแตกต่างกัน และกรณีปริมาณก็เช่นเดียวกัน ซึ่งเราสามารถเปรียบเทียบกันได้ว่าต่างกันมากน้อยแค่ไหน

3. กรณี Dynamic

เช่น กรณีแบบจำลองใยแมงมุม (Cobweb model)

$$Q_t^d = a + bP_t$$

$$Q_t^s = c + dP_{t-1}$$

ที่ดุลยภาพ ถ้าเราดำเนินการ Solve หาค่าเหมือนกรณี Static เราจะได้ว่า

$$Q_t^d = Q_t^s$$

$$a+bP_t \quad = \quad e+dP_{t-1}$$

$$bP_t - dP_{t-1} = \quad c-a$$

$$P_t - \frac{d}{b}P_{t-1} = \frac{c-a}{b}$$

หรือ

$$P_{t+1} - \frac{d}{b}P_t = \frac{c-a}{b}$$

จะเห็นได้ว้าเราไม่สามารถหาค่า P_t และ P_{t-1} ออกมาได้เนื่องจากเป็นตัวแปรที่ต่างกัน เนื่องจากว่าระบบสมการ ณ เวลา t ขึ้นอยู่กับภาวะการณ์ที่เป็นมาแล้วในอดีต คือ t - 1 ดังนั้นจึงเป็นไปไม่ได้ที่เราจะหาจุดดุลยภาพของความสมดุลต่าง ๆ ณ เวลา t เท่านั้น เราต้องหาจุดดุลยภาพของสำหรับทุก ๆ จุดของเวลา ซึ่งแสดงถึงจุดดุลยภาพเชิงพลวัต (dynamic equilibrium) ถ้าแบบจำลองมีจุดดุลยภาพเชิงพลวัต เราจะมี $P_t = P_{t-1} = P_{t-2} .=\ldots= P$ ซึ่งแสดงถึงราคาดุลยภาพในช่วงเวลาต่าง ๆ กัน ค่า P เป็นราคาดุลยภาพพลวัต ในขณะเดี่ยวกันก็หาปริมาณดุลยภาพได้โดยให้

$$Q_t^d = Q_{t-1}^d = \ldots.. = \overline{Q} = \ldots\ldots. = Q_{t-1}^s = Q_t^s$$

การแก้สมการ First Order Difference Equation

1. วิธี Iterative Method โดยการทำซ้ำ ๆ

ตัวอย่าง จงหา time path ของสมการ First Order Difference Equation

	$Y_{t+1} - Y_t$	=	2	วิธี Iterative Method	
วิธีทำ จะได้ว่า	Y_t	=	$2 + Y_t$		
ให้ t = 0 ;	Y_1	=	$2 + Y_0$		
t = 1 ;	Y_2	=	$2 + Y_1$	$=2 + 2 + Y_0$	$=2.2 + Y_0$
t = 2 ;	Y_3	=	$2 + Y_2$	$=2 + 2 + 2+Y_0$	$=2.3 + Y_0$
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t = t – 1 ;	Y_t	=	$2 + Y_{t-1}$	$=2+2\ldots +2+ Y_0$	$=2.t + Y_0$

เราทราบว่าค่า $Y_0 = 5$ จะได้ Y = 2t + 5 Ans.

2. วิธี General Method

สมมติว่าสมการ first – order difference equation มีลักษณะ

$Y_{t+1} \quad + \quad a\,y_t \quad = \quad c$

โดยค่า a และ c เป็นค่าคงที่ กาลวิถีของสมการนี้ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ ส่วนที่ 1 Complementary Function (y_c) โดยทำสมการข้างบนให้เป็นสมการ homogeneous difference equation จะได้

$$Y_{t+1} + a\,y_t = 0$$

สมมติให้ $Y_c = y_t = Ab^t$

$$Y_{t+1} = ab^{t+1}$$

$$Ab^{t+1} + aAb^t = 0$$

$$(b + a)\,Ab^t = 0$$

ถ้า $b + a = 0$

$$b = -a$$

$$Y_c = A(-a)^t$$

เป็นคำตอบหนึ่งที่เป็นไปได้ โดยคำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ Y_c คือ$Y_c = A(-a)^t$ โดยค่าที่เป็น A เป็นค่าคงที่ใด ๆ ที่สามารถหาค่าได้ในเทอมของ Y_0

ส่วนที่ 2 Particular Intigral $= Y_p$

ลอง $Y_p = Y_t = K$ (constant)

$$K + aK = c$$

$$K = \frac{c}{1+a}$$

$$Y_p = \frac{c}{1+a} \quad \text{เมื่อ } a \neq -1$$

ถ้าค่า $a = -1$ เราต้องการหาค่า Y_p ใหม่

ลองให้ $Y_p = Y_t = Kt$

$$k(t+1) + akt = c$$

$$k = \frac{c}{t+1+at} = c \quad \text{เพราะว่า } a = -1$$

ดังนั้น $Y = ct$

เมื่อ General Solution = Complementary Function + Particular Intigral

$Y_t \quad = \quad Y_c + Y_p$

$Y \quad = \quad A(-a)^t + \frac{c}{1+a}$ เมื่อ $a \neq -1$

และ $Y \quad = \quad A(-a) + ct \quad = \quad A + c$ เมื่อ $a = -1$

เนื่องจากค่า A เป็นค่าคงที่ที่เราสมมติขึ้น เราสามารถแทนที่ค่า A ได้โดยกำหนดเงื่อนไขเบื้องต้นคือ $Y_t = Y_0$ เมื่อเวลา $t = 0$

ดังนั้น $Y_0 \quad = \quad A + \frac{c}{1+a}$

หรือ $A \quad = \quad Y_0 - \frac{c}{1+a}$

แทนค่า A จะได้ $Y_t \quad = \quad (Y_0 - \frac{c}{1+a})(-a)^t + \frac{c}{1+a}$ เมื่อ $a \neq -1$

และ $Y_t \quad = \quad Y_0 + ct$ เมื่อ $a = -1$

ความเสถียรภาพของจุดดุลยภาพ (Stability of Equilibrium)

ในการพิจารณาความมีเสถียรภาพจากกาลวิธีของตัวแปรที่มีลักษณะแบบขาดช่วงนั้น จะพิจารณาจาก Complementary Function คือ Y_c เพราะ Y_c คือค่าที่แสดงการเบี่ยงเบนของกาลวิถีจากจุดดุลยภาพโดย $Y_c = Ab^t$ ถ้าค่า Y_c หรือ Ab^t มีค่าเข้าสู่ 0 (ศูนย์) เมื่อค่า t เข้าสู่ ∞ จะถือว่าเป็นกาลวิถีที่มีเสถียรภาพ

การเปลี่ยนแปลงของ Y_c จะขึ้นอยู่กับค่า b^t ถ้าค่า $t \rightarrow \infty$ ค่า Y_c จะมีลักษณะเช่นใดขึ้นอยู่กับค่า b ซึ่งสามารถจำแนกได้ดังนี้

ถ้า $b > 0$ ลักษณะของกาลวิถี จะไม่แกว่งคือ Nonoscillatory

ถ้า $b < 0$ ลักษณะของกาลวิถี จะแกว่งคือ Oscillatory

ถ้า $b > 1$ ลักษณะของกาลวิถี จะมีค่าออกห่างจากดุลยภาพ (Divergent)

ถ้า $b < 1$ ลักษณะของกาลวิถี จะมีค่าเข้าสู่ดุลยภาพ (Convergent)

เช่นจงพิจารณา ลักษณะของต่อไปนี้ $Y_t = 2(-\frac{4}{5})^{-t} + 9$

จากโจทย์พบว่าค่า $b \quad = \quad -\frac{4}{5} < 0$ แสดงว่ามีลักษณะแกว่ง

และ $|b| \quad = \quad \frac{4}{5} < 1$ แสดงว่ามีลักษณะเข้าสู่ดุลยภาพ

สรุป กาลวิถีของ $Y_t = 2(-\frac{4}{5})^{-t} + 9$ จะมีลักษณะแกว่งเข้าหาดุลยภาพที่ $Y_t = 9$

การแก้สมการ First Order Differential Equation

การแก้สมการ First Order Differential Equation หรือการหากาลวิถี (time Path) กรณีตัวแปรตามมีลักษณะเป็นตัวแปรแบบต่อเนื่อง(Continuous variable) ซึ่งมีลักษณะสมการดังนี้

คือ $\frac{dy}{dt} + aY = b$ โดยที่ a,b เป็นค่าคงที

จะได้ว่า general solution (Y_t) คือ $Y_t = \frac{b}{a} + \left(Y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-at}$

นั่นคือ เป็น definite solution หรือ เป็น time path ของ Y

ความเสถียรภาพของจุดดุลยภาพ (Stability of Equilibrium)

ในการพิจารณาความมีเสถียรภาพของจุดดุลยภาพกรณีที่ตัวแปรมีลักษณะเป็นตัวแปรแบบต่อเนื่อง(continuous)นั้นจะพิจารณา จาก time path ของ $Y_t = \frac{b}{a} + \left(Y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-at}$

สามารถมีดุลยภาพได้ ถ้า $Y_0 = b/a$ แสดงว่า เกิดดุลยภาพที่ $Y_t = b/a$

แต่ถ้า $Y_o \neq b/a$ สามารถพิจารณาความมีเสถียรภาพของดุลยภาพได้โดย พิจารณา ค่า e^{-at}

ถ้า $a > 0$ จะได้ว่า $e^{-at} \longrightarrow 0$ ถ้า $t \longrightarrow \propto$ นั่นคือ กาลวิถีของ Y_t จะเข้าสู่(Convergence) ดุลยภาพที่ $Y_t = b/a$ หมายความว่าเป็นดุลยภาพที่เสถียรภาพ

ถ้า $a < 0$ จะได้ว่า $e^{-at} \longrightarrow \propto$ ถ้า $t \longrightarrow \propto$ นั่นคือ กาลวิถีของ Y_t จะไม่สามารถเข้าสู่ (divergence) ดุลยภาพที่ $Y_t = b/a$ ได้ หมายความว่า เป็นดุลยภาพที่ไม่ เสถียรภาพ

ตัวอย่าง จงหา time path ของ Y_t เมื่อกำหนดให้ $\frac{dY}{dt} + 2Y = 6$ โดย $Y_0 = 10$ และพิจารณาด้วยว่า จะเกิดดุลภาพหรือไม่ ถ้าเกิดเป็นดุลยภาพที่มีเสถียรภาพหรือไม่

วิธีทำ จากโจทย์ เราได้ว่า a = 2 , b =6 และ Y_0 =10 จาก $\frac{dY}{dt} + aY = b$

ได้ time path คือ $Y_t = \left(Y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-at} + \frac{b}{a}$

เมื่อแทนค่า a = 2 และ b = 6 โดย $Y_0 = 10$

จะได้ $Y_t = \left(10 - \frac{6}{2}\right)e^{-2t} + \frac{6}{2}$

$Y_t = 7e^{-2t} + 3$ เป็น time path

พิจารณาเทอมแรกทางขวามือ พบว่า $7e^{-2t} \longrightarrow 0$ เมื่อ $t \longrightarrow \propto$ แสดงว่าจะเกิดดุลยภาพที่ $Y_t = 3$ และเป็นดุลยภาพที่มีเสถียรภาพ