บทที่ 8
แบบจำลองพลวัตร
(DYNAMIC MODEL)

1 บทนำ

การศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ กรณีไม่ได้มีเวลาเข้ามาเกี่ยวข้องเราเรียกว่า เป็นแบบจำลองชนิด Static และถ้าเราต้องการทราบว่าถ้าหากตัวแปรภายนอกเปลี่ยนแปลงไปแล้วทำให้ตัวแปรตามเปลี่ยนไปเมื่อเปรียบเทียบกับดุลยภาพเดิมเป็นเช่นไร เราเรียกว่า เป็นการศึกษาแบบ Comparative Static นั่นเองแต่ถ้าหากเราทำการศึกษาตัวแปรต่าง ๆ ที่มีเวลาเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยเราจะเรียกว่าเป็นการใช้แบบจำลองชนิด Dynamic

2 การพิจารณาหาค่าดุลยภาพ กรณี Static กับ Dynamic

2.1 กรณี Static

การพิจารณาหาค่าดุลยภาพของระบบสมการไม่ยุ่งยาก เช่น มีสมการ Demand และ Supply ของสินค้าชนิดหนึ่งคือ

$$Q^d = a+bP \qquad (1)$$

$$Q^s = c+dP \qquad (2)$$

ที่ดุลยภาพ $Q^d = Q^s$

$$a+bP = c+dP$$

ได้

$$\bar{P} = \frac{c-a}{b-d} = \frac{a-c}{d-b}$$

และ

$$\bar{Q} = \frac{bc-ad}{b-d} = \frac{ad-bc}{d-b}$$

2.2 กรณี Comparative Static

คือกรณีการนำค่าที่ได้จากการคำนวณของกรณี Static 2 ค่ามาเปรียบเทียบกัน เช่น กรณีแรก เรามีสมการ demand และSupply ดังนี้

$$Q^d = a+bP \quad (1)$$

$$Q^s = c+dP \quad (2)$$

ได้ $$\bar{P} = \frac{c-a}{b-d} = \frac{a-c}{d-b}$$

และ $$\bar{Q} = \frac{bc-ad}{b-d} = \frac{ad-bc}{d-b}$$

กรณีต่อมา ถ้ารัฐบาลเก็บภาษี Specific tax = t จากผู้ขายแล้ว ดุลยภาพใหม่จะเป็นอย่างไร ต่างจากดุลยภาพเดิมหรือไม่

จาก(1) $$P^d = \frac{Q^d - a}{b} \quad (3)$$

จาก(2) $$P^s = \frac{Q^s - c}{d} \quad (4)$$

เมื่อรัฐบาลเก็บภาษี Specific tax = t

$$P^t = P^s + t = \frac{Q^s - c}{d} + t \quad (5)$$

ที่ดุลภาพ (3) = (5)

$$\frac{Q^d - a}{b} = \frac{Q^s - c}{d} + t$$

$$d\bar{Q}' - ad = b\bar{Q}' - bc + bdt$$

$$\bar{Q}' = \frac{ad - bc + bdt}{d-b} = \frac{bc - ad - bdt}{b-d}$$

$$\bar{P}' = \frac{bc - ab - bdt}{b(b-d)} = \frac{c - a - dt}{b-d}$$

จะเห็นได้ว่า ราคาก่อนเก็บภาษีกับหลังเก็บภาษีมีความแตกต่างกัน และกรณีปริมาณก็เช่นเดียวกัน ซึ่งเราสามารถเปรียบเทียบกันได้ ว่าต่างกันมากน้อยแค่ไหน

โดย $$\bar{P}' - \bar{P} = \frac{c-a-dt}{b-d} - \frac{c-a}{b-d} = \frac{-dt}{b-d} = \frac{dt}{d-b}$$

และ $$\bar{Q}' - \bar{Q} = \frac{bc-ad-bdt}{b-d} - \frac{bc-ad}{b-d} = \frac{-bdt}{b-d} = \frac{bdt}{d-b}$$

2.3 กรณี Dynamic

เช่น กรณีแบบจำลองใยแมงมุม (Cobweb model)

$$Q_t^d = a + bP_t$$

$$Q_t^s = c + dP_{t-1}$$

ที่ดุลยภาพ

$$Q_t^d = Q_t^s$$

ถ้าเราดำเนินการ Solve หาค่าเหมือนกรณี Static เราจะได้ว่า

$$a+bP_t = e+dP_{t-1}$$

$$bP_t - dP_{t-1} = c-a$$

$$P_t - \frac{d}{b}P_{t-1} = \frac{c-a}{b}$$

หรือ

$$P_{t+1} - \frac{d}{b}P_t = \frac{c-a}{b}$$

จะเห็นได้ว่าเราไม่สามารถหาค่า P_t และ P_{t-1} ออกมาได้เนื่องจากเป็นตัวแปรที่ต่างกัน เนื่องจากว่าระบบสมการ ณ เวลา t ขึ้นอยู่กับภาวะการณ์ที่เป็นมาแล้วในอดีต คือ t - 1 ดังนั้นจึงเป็นไปไม่ได้ที่เราจะหาจุดดุลยภาพของความสมดุลต่าง ๆ ณ เวลา t เท่านั้น เราต้องหาจุดดุลยภาพของสำหรับทุก ๆ จุดของเวลา ซึ่งแสดงถึงจุดดุลยภาพเชิงพลวัต (dynamic equilibrium) ถ้าแบบจำลองมีจุดดุลยภาพเชิงพลวัตร เราจะมี $P_t = P_{t-1} = P_{t-2} .=....= \overline{P}$ ซึ่งแสดงถึงราคาดุลยภาพในช่วงเวลาต่าง ๆ กัน ค่า $\overline{P}$ เป็นราคาดุลยภาพพลวัต ในขณะเดี่ยวกันก็หาปริมาณดุลยภาพได้โดยให้

$$Q_t^d = Q_{t-1}^d = ... = \overline{Q} = ... = Q_{t-1}^s = Q_t^s$$

ซึ่งเมื่อเรา Solve สมการ ข้างต้นใหม่เราจะได้

$$\overline{P} = \frac{a-c}{d-b} = \frac{c-a}{b-d}$$

$$\overline{Q} = \frac{ad-bc}{d-b}$$

ตัวอย่าง แบบจำลองที่มีเวลาต่างออกไปเช่น

$$Q_t^d = a + bP_t$$

$$Q_t^s = c + dP_{t-2}$$

$$Q_t^d = Q_t^s$$

เมื่อทำการแก้สมการหาค่าที่ดุลยภาพจะได้

$$\overline{P} = \frac{a-c}{d-b} = \frac{c-a}{b-d}$$

$$\overline{Q} = \frac{ad-bc}{d-b}$$

ทั้งสองกรณีนี้จะมีค่าดุลยภาพเหมือนกับกรณี Static แต่ความจริงแล้วยังมีข้อแตกต่างอีก คือความแตกต่างอันเนื่องมาจากการเชื่อมโยงภาวะการณ์ต่างเวลากัน ซึ่งแสดงในรูปของกาลวิถี หรือทางเดินของตัวแปรภายในผ่านเวลา (time path) สู่จุดดุลยภาพโดยที่กาลวิถีในแต่ละแบบจำลองอาจไม่เหมือนกัน

3 การแก้สมการ First Order Difference Equations

ในการศึกษาทางเศรษฐศาสตร์นั้นพบว่าจุดเริ่มต้นของตัวแปรหนึ่งจะส่งผลถึงตัวแปรอื่น ๆ ได้อีกในช่วงเวลาต่อ ๆ ไป เช่น การออมในปัจจุบันจะทำให้เกิดการบริโภคในอนาคต การลงทุนในปีนี้จะทำให้เกิดศักยภาพในการผลิตในปีต่อไป

ซึ่งเหตุการณ์เหล่านี้เราอาจจะเรียกว่า เป็นการวิเคราะห์ความเคลื่อนไหวของตัวแปรที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา โดยในบทนี้จะเป็นการวิเคราะห์ความเคลื่อนไหวแบบขาดช่วง (Discrete time analysis) โดย Discrete time analysis เป็นการวิเคราะห์โดยให้ชุดของเวลามีค่าเป็นจำนวนเต็มอย่างชัดเจน เช่น 1 วัน 1 เดือน หรือ 1 ปี เป็นต้นและที่สำคัญที่สุดคือในแต่ละช่วงเวลานั้นตัวแปรต่าง ๆ จะมีค่าเพียงค่าเดียว

เครื่องมือที่ใช้วิเคราะห์แบบขาดช่วงนี้ได้แก่ Difference equation สมการ difference เป็นการเชื่อมโยง ค่าของตัวแปรตามในช่วงเวลาหนึ่งกับค่าของตัวมันเองในช่วงเวลาอื่น ๆ ทำเหมือนกับเป็นตัวแปรอื่น ๆ โดยในบทนี้จะแสดงให้เห็นถึงการแก้สมการ difference เชิงเส้น โดย

จะเริ่มจากการวิเคราะห์อย่างง่าย ๆ ก่อน โดยใช้วิธีการแทนค่าแบบซ้ำ ๆ กัน (repeated Substitution) และจะใช้วิธีการเขียนกราฟช่วยในการอธิบาย

First-Order Difference Equations

การวิเคราะห์แบบไดนามิคเป็นการหาคำตอบของตัวแปรตามเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงในการวิเคราะห์แบบ difference equations เป็นการวิเคราะห์ โดยใช้เวลาแบบช่วง (discrete time) มูลค่าของตัวแปรจะแสดงเป็นชุดของตัวแปร เช่น

$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 ,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ลักษณะของสมการ difference คือ

$$X_t = aX_{t-1} + Y_t \qquad (3\text{-}1)$$

โดย X_t = ตัวแปรตาม

Y_t = ตัวแปรอิสระ

a = ค่า parameter ของตัวแปรอิสระ

นั่นคือ X_{t-1} = ตัวแปรอิสระตัวหนึ่ง

วิธีพิจารณา order ของสมการ difference สามารถพิจารณาได้จากช่วงห่างของเวลาที่มากที่สุดกับ น้อยที่สุด เช่น

$$X_t = aX_{t-1} + bX_{t-2} + Y_t$$

สมการข้างบนนี้ จะเป็นสมการ difference ที่มี order = 2 โดยพิจารณาจาก t-(t-2) = 2

การหาคำตอบ ของ สมการ difference เป็นการแสดงถึงค่าของ ชุดตัวแปรทั้งหมดในรูปของฟังก์ชั่นของเวลา และค่าของตัวแปรอิสระ คำตอบที่ได้จะขึ้นอยู่กับค่าตั้งต้นของตัวแปรตามว่าเป็นเท่าใด

3.1 วิธี Iterative Method

ต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นถึงกับการวิเคราะห์ สมการ difference โดยการหาค่าของตัวแปรตามโดยใช้สมการ difference ลำดับที่ 1 คือ

$$X_t = aX_{t-1} + Y$$

โดยวิธีแทนค่า ค่าที่ได้จากสมการต่าง ๆ 4 สมการ (4 ช่วง เวลา) จะขึ้นอยู่กับ ค่าของ a เช่น

ให้ $$X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} + 300 \qquad (3\text{-}2)$$

สมมติว่า $X_0 = 400$

ดังนั้น จากการแทนค่า โดยลำดับ จะได้ว่า

$$X_1 = \frac{1}{2}X_0+Y$$

$$= \frac{1}{2}*400+300 = 500$$

$$X_2 = \frac{1}{2}X_1+Y$$

$$= \frac{1}{2}*500+300 = 550$$

$$X_3 = \frac{1}{2}X_2+Y$$

$$= \frac{1}{2}*550+300 = 575$$

$$X_4 = \frac{1}{2}X_3+Y$$

$$= \frac{1}{2}*575+300 = 587.5$$

จะเห็นได้ว่า ค่าที่ได้จะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ในทางเดียวกัน (monotonic) พิจารณาจากเครื่องหมายของผลต่างของค่า X_t กับ X_{t-1} สำหรับทุกค่าของ t ซึ่งมีเครื่องหมายเหมือนกัน

ชุดของค่า X_t ที่คำนวณได้จะแสดงให้เห็นดังรูป (3-1)

นอกจากนี้เราจะทำการแทนค่า หาค่า X_t ณ.เวลาต่าง ๆ เมื่อสมการ difference เปลี่ยนไปเป็น

$$X_t = -\frac{1}{2}X_{t-1}+300 \qquad (3\text{-}3)$$

เมื่อสมมติให้ $X_0 = 400$ ดังนั้น จะได้

$$X_1 = -\frac{1}{2}X_0+Y$$

$$= -\frac{1}{2}*400+300$$

$$= 100$$

$$X_2 = -\frac{1}{2}X_1+Y$$

$$= -\frac{1}{2}*100+300$$

$$= 250$$

$$X_3 = -\frac{1}{2}X_2+Y$$

$$= -\frac{1}{2}*250+300$$

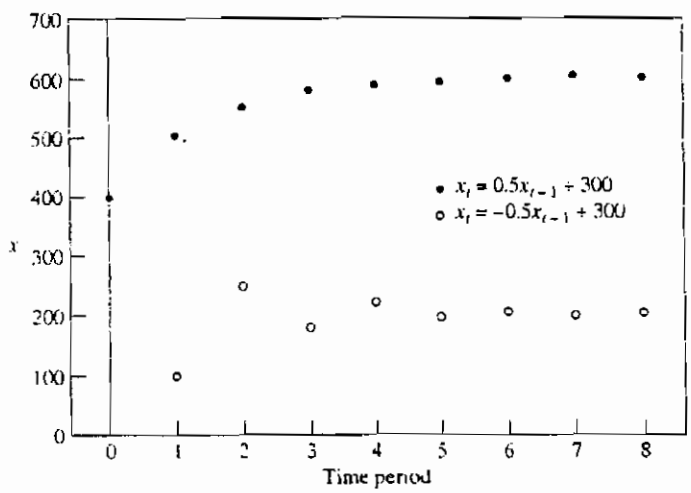
$$= 175$$

$$X_4 = -\frac{1}{2}X_3+Y$$

$$= -\frac{1}{2}*175+300$$

$$= 212.5$$

จะเห็นได้ว่า ค่า X_t ต่าง ๆ ที่ได้ จะมีลักษณะกวัดแกว่ง (Oscillatory) เนื่องจากเครื่องหมายของผลต่างของ X_t กับ X_{t-1} จะสลับกัน เช่น $(X_1-X_0)=-300$, $(X_2-X_1)= 150$, $(X_3-X_2)= -75$ และ $X_4-X_3 = 37.5$ เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ค่าของ X_t ที่คำนวณได้ จากสมการนี้จะแสดงไว้ดังรูป (3-1)



รูป (3-1) Stable Difference Equations (3-2) and (3-3)

สรุป กรณี Monotonic จะเกิดเมื่อผลต่างของค่า X_t ที่ต่อเนื่องกัน จากสมการ $X_t = aX_{t-1}+Y$ จะมีเครื่องหมายเหมือนกัน ถ้าค่า $a > 0$

กรณี Oscillatory จะเกิดเมื่อผลต่างของค่า X_t ที่ต่อเนื่องกันจากสมการ $X_t = aX_{t-1}+ Y$จะมีเครื่องหมายสลับกัน ถ้าค่าของ $a < 0$

3.2 Steady State

ส่วนหนึ่งของคำตอบของสมการ difference คือการเกิดสภาวะคงที่ (steady state value) ของตัวแปรตามเมื่อกำหนดค่าของตัวแปรอิสระให้ ซึ่งค่าที่คงที่นี้เราเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าค่าดุลยภาพ (equilibrium value) ค่าที่หยุดนิ่ง (Stationary Value) หรือ มูลค่าระยะยาว (Long-run Value)

จะทำการวิเคราะห์ให้เห็นค่า Steady State ในเบื้องต้นนี้โดยกำหนดให้ค่าตัวแปรอิสระเป็นค่าคงที่ตลอดทุกช่วงเวลา

พิจารณา สมการ linear first-order difference เมื่อ $Y_t = Y$ สำหรับทุกค่าของ t จะได้ว่า

$$X_t = aX_{t-1} + Y \qquad (3\text{-}4)$$

ค่า Steady State จะเกิดเมื่อ X_α หาค่าได้ ถ้าชุดของตัวแปร X_t มีลักษณะ Converges

นั่นคือ ถ้า $\lim_{t\to\alpha} X_t = X_\alpha$

แต่ถ้าค่า X_t ไม่สามารถหาค่าจำนวนจริงได้ นั่นคือ ชุดของ X_t จะมีลักษณะ diverges โดย $\lim_{t\to\alpha} X_t = \alpha$ นั่นคือ จะไม่เกิดดุลยภาพขึ้น

ดังนั้นถ้า $\lim_{t\to\alpha} X_t = \lim_{t\to\alpha} X_{t-1}$

$= X_\alpha$ จะมีดุลยภาพเกิดขึ้น

จาก $X_t = aX_{t-1}+Y$

จะได้ว่า $\lim_{t\to\alpha} X_t = \lim_{t\to\alpha} (aX_{t-1}+Y)$

$X_\alpha = aX_\alpha+Y$

หรือ $X_\alpha = \dfrac{Y}{1-a}$ เมื่อ $a \neq 1$

(ค่าดุลยภาพจะไม่เกิดถ้า a=1 ซึ่งเป็นกรณีพิเศษ จะแสดงให้เห็นในภายหลัง)

จากสมการ $X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} + 300$

ที่ดุลยภาพ $X_\alpha = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} * 300 = 600$

แสดงว่า ค่า X_t จะมีค่าเข้าใกล้ 600 เนื่องจาก $|X_t - X_{t-1}|$ มีค่าลดลงเมื่อเวลามากขึ้น แสดงว่าในระยะยาวจะเกิดดุลยภาพที่มีเสถียรภาพ

และจากสมการ $X_t = -\frac{1}{2}X_{t-1} + 300$

จะได้ว่า $X_\alpha = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} * 300 = 200$

แสดงว่าค่า X_t จะมีค่าเข้าใกล้ 200 เนื่องจาก $|X_t - X_{t-1}|$ มีค่าลดลงเรื่อย ๆ เมื่อ t มีค่ามากขึ้น แสดงว่า ในระยะยาวก็จะเกิดดุลยภาพที่มีเสถียรภาพเช่นกัน

สำหรับตัวอย่างกรณีเกิดดุลยภาพแต่ไม่มีเสถียรภาพ เช่น

$$X_t = 2X_{t-1} - 300 \qquad (3\text{-}5)$$

สมมติให้ $X_0 = 400$

ค่าที่ดุลยภาพจะเกิดที่

$$X_\alpha = \frac{1}{1-(2)}(-300) = 300$$

ถ้าคำนวณหาชุดของตัวแปร X_t จะได้

$$X_0 = 400$$

$$X_1 = 2X_0 + Y$$
$$= 2*400-300$$
$$= 500$$

$$X_2 = 2X_2 + Y$$
$$= 2*500-300$$
$$= 700$$

$$X_3 = 2X_2 + Y$$
$$= 2*700-300$$
$$= 1100$$

$$X_4 = 2X_3 + Y$$
$$= 2*1100-300$$
$$= 1,900$$

ค่าตัวแปรนี้จะไม่เข้าหา (diverges) ค่าใดค่าหนึ่ง เมื่อเวลามากขึ้น หรือ $|X_t - X_{t-1}|$ จะเพิ่มขึ้น เมื่อเวลามากขึ้น ซึ่งเป็นลักษณะเพิ่มขึ้นไปในทางเดียวกัน ทุก ๆ ค่าของ X_0 ยกเว้น $X_0 = 300$ เพราะถ้า $X_0 = 300$ จะได้ว่า

$X_0 = 300$

$X_1 = 2X_0+Y$

$= 2*300 - 300$

$= 300$

$X_2 = 2X_1+Y$

$= 2*300 - 300$

$= 300$

นั่นคือ $X_t = 300$ ในทุก ๆ ค่าของ t

อีกตัวอย่างกรณี ดุลยภาพไม่มีเสถียรภาพ

เช่น $X_t = -2X_{t-1}+900$ (3-6)

ค่าเริ่มต้น X_0 ทุกค่าของสมการนี้จะทำให้เกิดดุลยภาพที่ไม่มีเสถียรภาพยกเว้น

ถ้า X_0 มีค่า $= \frac{Y}{1-a} = \left(\frac{1}{1-(-2)} * 900\right) = 300$

ค่าของชุดตัวแปร X_t จะมีลักษณะออกจากดุลยภาพเหมือนตัวอย่างที่แล้วแต่จะมีลักษณะกวัดแกว่ง (Oscillatory) ซึ่งแสดงให้เห็นได้ดังนี้

ถ้ากำหนด $X_0 = 400$

$X_1 = -2X_0+ Y$

$= -2*400+900 = 100$

$X_2 = -2X_1+Y$

$= -2*100+900 = 700$

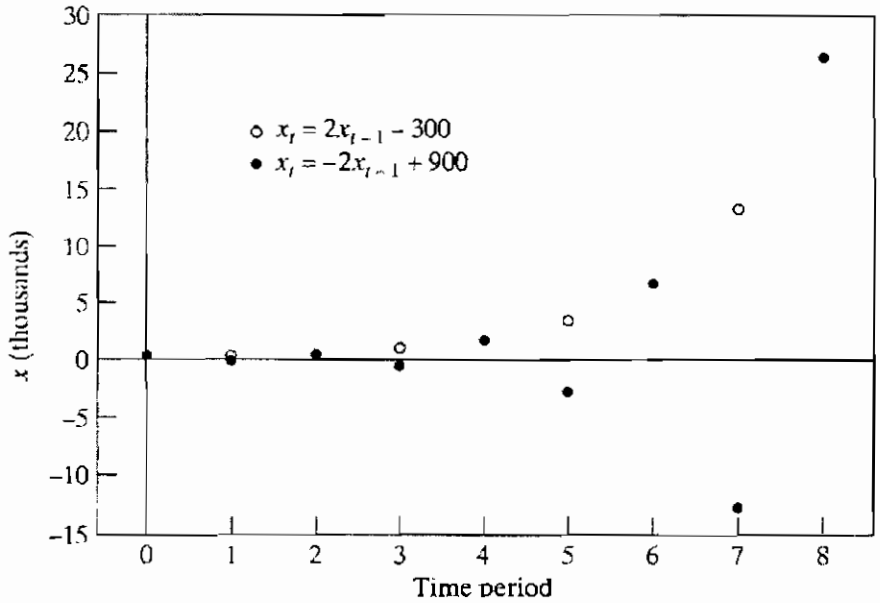
$X_3 = -2X_2+Y$

$= -2*700+900 = -500$

$X_4 = -2X_3+Y$

$= -2(-500)+900 = 1900$

ทั้งสองกรณีที่ดุลยภาพไม่เสถียรภาพ สามารถแสดงดังรูปได้ดังนี้



รูป(3-2) แสดงUnstable Difference Equations (3-5) and (3-6)

สรุป

กรณี Stable

จากสมการ $X_t = ax_{t-1}+y$

จะมีค่าที่ดุลยภาพคือ $X_\alpha = \frac{1}{1-a}Y$

และจะเกิดดุลยภาพที่เสถียรภาพถ้า $-1 < a < 1$ โดยไม่ต้องสนใจว่า X_0 จะมีค่าเท่าใด

กรณี Unstable

จากสมการ $X_t = aX_{t-1}+Y$

จะไม่เกิดดุลยภาพ ถ้า $a>1$ หรือ $a<-1$ ถ้าค่าเริ่มต้นของ $X_0 \neq \frac{1}{1-a}Y$

3.3 The Special cased of a = 1 and a = -1(กรณีพิเศษ เมื่อ a = 1 และ a = -1)

เมื่อ a = 1 เราสามารถเขียนสมการ difference ได้ว่า

$$X_t = X_{t-1}+Y$$

และเมื่อกำหนดค่าเริ่มต้นของ X หรือ $X_0 = K$ แล้วทำการหาค่า X เมื่อ t มีค่า ต่าง ๆ โดยการแทนค่า จะได้ว่า

$$X_0 = K$$

$$X_1 = X_0+y$$

$$X_1 = K+Y$$

$$X_2 = X_1+Y$$

$$X_2 = (K+Y)+Y = K+2Y$$

$$X_3 = X_2+Y$$

$$X_3 = (K+2Y)+Y = K+3Y$$

$$X_4 = X_3+Y$$

$$X_4 = (K+3Y)+Y = K+4Y$$

จากการสังเกตคำตอบข้างต้นจะพบว่า $X_t = X_0+tY$ นั่นคือ สมการลักษณะนี้จะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนเข้าใกล้ $\propto$ ถ้า $Y > 0$ หรือมีค่าลดลงเรื่อย ๆ จนเข้าใกล้ $-\propto$ ถ้า $Y < 0$ ถ้า $Y = 0$ จะได้ว่า $X_t = X_0$ ดังนั้น จะเห็นได้ว่า นอกจากค่า Y=0 แล้วค่า X_t จะมีค่า diverges ไปในทางเดียวกัน จากจุดเริ่มต้น

และเมื่อ $a = -1$

จะได้ว่า $X_t = -X_{t-1}+Y$

เมื่อกำหนดให้ค่าเริ่มต้น X คือ $X_0 = K$ และทำการคำนวณจะได้

$$X_0 = K$$

$$X_1 = -X_0+Y = -K+Y$$

$$X_2 = -X_1+Y$$

$$= -(-K+Y)+Y = K$$

$$X_3 = -X_2+Y$$

$$= -(K)+Y = -K+Y$$

$$X_4 = -X_3+Y$$

$$= -(-K+Y)+Y = K$$

นั่นคือ $X_n = K$ เมื่อ n มีค่าเป็นเลขคู่รวมถึง n=0 ด้วย และ $X_n = -K + Y$ เมื่อ n เป็นเลขคี่

นั่นคือ สมการ $X_t = -X_{t-1}+Y$

จะให้ค่าสลับกันเพียง 2 ค่า เมื่อค่า t เปลี่ยนแปลง ยกเว้นเมื่อ

$$X_0 = \frac{Y}{2} = \frac{1}{1-(-1)}Y$$

จะได้ว่า $X_t = \frac{Y}{2}$ ทุกค่าเมื่อ $t \geq 0$

3.4 Solutions to First –Order Difference Equations

หัวข้อที่แล้วเป็นการหาค่าคำตอบของสมการ first-order linear difference equation โดยใช้ตัวอย่างที่แทนค่าด้วยตัวเลข และการวิเคราะห์ด้วยรูปกราฟ ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นคำตอบต่อไปของ first-order linear difference equation โดยผ่านขบวนการทำซ้ำ (repeated iteration)

เริ่มด้วย $X_t = aX_{t-1}+Y$ ทุก ๆ ค่าของ t

จะได้ว่า $X_{t-1} = aX_{t-2}+Y$

นำค่าที่ได้นี้ไปแทนค่าลงสมการแรกจะได้

$$X_t = a(aX_{t-2}+Y)+Y$$

$$X_t = a^2X_{t-2}+aY+Y$$

ทำการหาค่า X_{t-2} จาก $X_{t-2} = aX_{t-3}+Y$

แล้วนำไปแทนค่าจะได้

$$X_t = a^2(aX_{t-3}+Y)+aY+Y$$

$$X_t = a^3X_{t-3}+a^2Y+aY+Y$$

จากการแทนค่าจะเห็นรูปแบบของสมการ เมื่อกำหนดให้เริ่มต้นที่ t = 0 จะได้ค่า X_0 และเมื่อทำการแทนค่าถึง t ครั้ง จะได้ว่า

$$X_t = a^tX_0+\sum_{i=0}^{t-1} a^iY \qquad (3\text{-}7)$$

พิจารณา ค่า $\sum_{i=0}^{t-1} a^i = \frac{1-a^t}{1-a}$

โดยหาจาก

กำหนดให้ $S = \sum_{t=0}^{t-1} a^t = 1+a+a^2.....+a^{t-1}$

ดังนั้น เอา a คูณตลอดจะได้ $Sa = a+a^2+a^3+....+a^t$

นั่นคือ $S-Sa = 1-a^t$

$(1-a)s = 1-a^t$

ดังนั้นจะได้ว่า $S = \sum_{t=0}^{t-1} a^t = \frac{1-a^t}{1-a}$

เมื่อนำความสัมพันธ์ที่ได้นี้ไปแทนค่าลงสมการ (3-7)จะได้คำตอบของสมการ difference ของ (3-4)

คือ $$X_t = a^t X_0 + \frac{1-a^t}{1-a} Y \qquad (3\text{-}8)$$

ซึ่งสมการนี้สามารถนำไปใช้หาค่า ดุลยภาพว่าจะเกิดขึ้นได้หรือไม่

นั่นคือ ถ้าเกิดดุลยภาพ $\lim_{t\to\alpha} X_t = X_\alpha$

ถ้าไม่เกิดดุลยภาพ $\lim_{t\to\alpha} X_t = \alpha$

พิจารณา ถ้า $|a| < 1$

จะได้ว่า
$$\lim_{t\to\alpha} X_t = \lim_{t\to\alpha}\left(a^t X_0 + \frac{1-a^t}{1-a}Y\right)$$
$$= 0*X_0 + \frac{1}{1-a}Y$$
$$= \frac{1}{1-a}Y$$

แสดงว่า เป็นกรณีที่ทำให้สมการเข้าสู่ดุลยภาพ

พิจารณา ถ้า $|a| > 1$

$$\lim_{t\to\alpha} X_t = \lim_{t\to\alpha}\left(a^t X_0 + \frac{1-a^t}{1-a}Y\right)$$
$$= \lim_{t\to\alpha}\left(a^t X_0 + \frac{1}{1-a}Y - \frac{a^t}{1-a}Y\right)$$
$$= \lim_{t\to\alpha}\left(\frac{1}{1-a}Y + \left(X_0 - \frac{1}{1-a}Y\right)a^t\right)$$
$$= \frac{1}{1-a}Y + \left(X_0 - \frac{1}{1-a}Y\right)\lim_{t\to\alpha} a^t$$

นั่นคือ ค่า $\lim_{t\to\alpha} a^t = \alpha$ หรือ $-\alpha$

ดังนั้น ค่า $\lim_{t \to \alpha} X_t$ = α หรือ $-\alpha$

แสดงว่าไม่สามารถหาค่าได้จึงเป็นกรณีไม่สามารถเข้าสู่ดุลยภาพหรือเป็นการออกจากดุลย-ภาพนั่นเอง

จาก สมการ linear first order difference ในสมการ (3-1)

คือ $X_t = aX_{t-1}+Y_t$

ซึ่งต่างจาก สมการที่ (3-4) เพราะว่า Y_t มีค่าเปลี่ยนแปลงตามเวลาด้วย อย่างไรก็ตามเราสามารถหาคำตอบของสมการนี้ด้วยวิธีการทำซ้ำ ๆ ได้เช่นกันโดยการแทนค่า t ด้วย t-1 จะได้

$$X_{t-1} = aX_{t-2}+Y_{t-1}$$

นำไปแทนลงสมการแรก จะได้

$$X_t = a(aX_{t-2}+Y_{t-1})+Y_t$$

$$= a^2 X_{t-2}+aY_{t-1}+Y_t$$

ทำซ้ำอีกด้วยการหา X_{t-2} มาแทนค่าจะได้

$$X_t = a^3 X_{t-3}+a^2 Y_{t-2}+ aY_{t-1}+Y_t$$

ทำการแทนค่าเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ก็จะได้คำตอบคล้ายกับกรณี Y เป็นค่าคงที่ คือ

$$X_t = a^t X_0 + \sum_{i=0}^{t-1} a^i Y_{t-i} \qquad (3\text{-}9)$$

แต่เราไม่สามารถหาค่าคำตอบโดยใช้ความสัมพันธ์ของ $\sum_{i=0}^{t-1} a^i = \frac{1-a^t}{1-a}$ ได้เพราะค่า Y_t ไม่ใช้ค่าคงที่

ในการพิจารณาสมการ (3-9) ที่มี term Y_t อยู่ด้วยนั้นจะเกิดดุลยภาพที่มีเสถียรภาพหรือไม่ เราจะใช้หลักการของขอบเขตจำกัด (concept of bounded sequence)

Bounded Sequence คือ ถ้า X_t จะมีค่าขอบเขตจำกัดได้ก็ต่อเมื่อสามารถหาค่าจำนวนจริงค่าหนึ่งเช่น δ แล้วทำให้

$$|X_t| < \delta \qquad \text{ในทุก ๆ ค่าของ } t$$

ดังนั้น สมการ (3-1) จะมีเสถียรภาพ ถ้า X_t มีขอบเขตจำกัด X_t จะมีขอบเขตจำกัดได้ก็ต่อเมื่อ Y_t มีขอบเขตจำกัดดังนั้นเมื่อพิจารณาสมการที่ (3-4) แล้วเพิ่ม Y_t ที่ขึ้นกับเวลาเข้าไปด้วยจะพบว่าจะมีเสถียรภาพได้ ถ้า ค่า a อยู่ระหว่าง –1 และ 1 ($-1 < a < 1$) นอกจากนี้แล้วถึงแม้ว่าค่า Y_t จะมีขอบเขตจำกัดแต่ถ้า a^t มีค่าเข้าใกล้ α หรือ $-\alpha$ เมื่อ t มีค่ามาก ๆ แล้ว ค่า X_t ก็ไม่เกิดดุลยภาพที่เสถียรภาพได้เช่นกัน

3.5 Forward Solutions

ในการวิเคราะห์ เกี่ยวกับเศรษฐกิจบางครั้ง เป็นธรรมดาที่จะพูดถึงสมการ difference ที่แสดงมูลค่าของตัวแปรในปัจจุบัน ในรูปของฟังก์ชั่นของตัวแปร ของตัวมันเองในช่วงเวลาต่อไป เช่น การพิจารณาเกี่ยวกับราคาของสินค้าคงคลัง (price of a stock) เงื่อนไขอันหนึ่งในการคำนวณราคาปัจจุบันของสินค้าคงคลัง จะขึ้นอยู่กับการคาดคะเนราคาในอนาคตในการพิจารณา สมการทำนองนี้ เราสามารถแสดงในรูปสมการ difference ดังนี้

$$U_t = bU_{t+1}+V_t \qquad (3\text{-}10)$$

สมการนี้สามารถหาผลลัพธ์ได้ โดยใช้วิธีการทำซ้ำ ๆ เหมือนที่ได้อธิบายมาแล้ว โดยการแทนค่า U_{t+1} ด้วยสมการ

$$U_{t+1} = bU_{t+2}+ V_{t+1}$$

เราจะได้ว่า

$$U_t = b(bU_{t+2}+bV_{t+1})+V_t$$

$$U_t = b^2 U_{t+2}+bV_{t+1}+V_t$$

ทำการแทนค่าเช่นนี้ n ครั้ง จะได้ ความสัมพันธ์ คือ

$$U_t = b^n U_{t+n} + \sum_{i=0}^{n-1} b^i V_{t+i}$$

หาค่า limit เมื่อ n เข้าใกล้ α

$$U_t = \lim_{n\to\alpha}\left[b^n U_{t+n} + \sum_{i=0}^{n-1} b^i V_{t+i}\right]$$

สมมติว่า $|b| < 1$ และถ้า { V_t } เป็นชุดของตัวแปรที่หาขอบเขตได้ (bounded sequence) แล้วจะได้ว่า คำตอบที่เป็นไปได้ ของสมการ (3-10) คือ

$$U_t = \sum_{i=0}^{\alpha} b^i V_{t+i} \qquad (3\text{-}11)$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\alpha} b^n U_{t+n} = 0$

ถ้า { U_t} หาค่าขอบเขตได้ (bounded)

$$bU_{t+1} = b\sum_{i=0}^{\alpha} b^i V_{t+i+1}$$

ดังนั้น

$$U_t - bU_{t+1} = \sum_{i=0}^{\alpha} b^i V_{t+i} - b\sum_{i=0}^{\alpha} b^i V_{t+i+1}$$

$$= (V_t + bV_{t+1} + b^2V_{t+2}+\ldots\ldots)+-(bV_{t+1}+b^2V_{t+2}+\ldots\ldots)$$

$$U_t - bU_{t+1} = V_t$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าจะกลับไปเหมือนสมการเดิม (3-10) นี้คือ Forward Solution ของสมการ difference (3-10) ในขณะที่ U_t แสดงในรูปของฟังก์ชั่นอนาคตของ $\{V_i\}_{i=t}^{\alpha}$

สิ่งที่น่าสนใจในการพิจารณาเกี่ยวกับ Forward Solution อันหนึ่งของ สมการ difference (3-1) คือ เมื่อ $|a| > 1$ จะเป็นอย่างไร เราเขียนสมการ (3-1) ใหม่ได้เป็น

$$X_t = \frac{1}{a} X_{t+1} - \frac{1}{a} Y_{t+1}$$

อาศัยสมการ (3-11) และให้ $X_t = U_t$, $V_t = -\frac{1}{a} Y_{t-1}$ และ $\frac{1}{a} = b$ จะสามารถหาคำตอบได้ว่า

$$X_t = -\sum_{i=0}^{\alpha} \left(\frac{1}{a}\right)^i \frac{Y_{t+i+1}}{a}$$

คำตอบนี้จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $\{Y_t\}$ สามารถหาค่าขอบเขตได้ (bounded Sequence)

3.6 General Solution

ในการหาคำตอบโดยทั่วไป (general solution) ซึ่งวิธีการที่จะพูดถึงนี้จะมีประโยชน์ในการนำไปหาผลลัพธ์ของสมการ difference ที่มี order สูงขึ้นได้ และจะสามารถใช้ในการหาสมการไดนามิคในกรณีที่เป็นตัวแปรแบบต่อเนื่องในบทต่อไปได้ด้วยคำตอบที่ได้จากวิธีการนี้จะมีค่าเหมือนกับคำตอบที่ได้จากวิธีการทำซ้ำ ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้ว

คำตอบโดยทั่วไปของสมการ difference (3-4)

$$X_t = aX_{t-1} + Y$$

สามารถหาได้โดยในชั้นแรกจะต้องแปลงให้อยู่ในรูปสมการ Homogeneous

$$X_t - aX_{t-1} = 0$$

โดยการแทนค่า Y=0 ลงสมการ (3-4) และจากผลการวิเคราะห์ก่อนหน้านี้ เราสามารถคาดคะเนค่าคำตอบของสมการ homogeneous นี้ ได้ในรูป

$$X_t = AK^t$$

เมื่อ A และ K เป็นตัวแปรที่สามารถหาค่าได้

ที่ เวลา t-1 จะได้ว่า $X_{t-1} = AK^{t-1}$

นำค่าทั้งสองนี้ไปแทนลงสมการ homogeneous จะได้

$$AK^t - a\,AK^{t-1} = 0$$

จะได้ว่า $K = a$

ดังนั้นคำตอบของสมการ homogeneous คือ

$$X_t = Aa^t \quad \text{เมื่อ A เป็นค่าคงที่ใด ๆ}$$

คำตอบของสมการ homogeneous จะแตกต่างจากคำตอบของสมการ (3-4) โดยในสมการ (3-4) มีค่าคงที่ Y ซึ่งมีผลต่อการเข้าสู่ดุลยภาพ คำตอบเฉพาะ (Particular Solution) จาก (3-4) เป็นคำตอบอันหนึ่งของสมการ ซึ่งจะพิสูจน์ให้เห็นจริงได้ว่า คำตอบเฉพาะในกรณีที่ $X_t = X_\alpha$ สำหรับทุกค่าของ t คำตอบนี้จะพิจารณาได้จากค่า limit ของ สมการ (3-4) เมื่อ $t \rightarrow \alpha$ ซึ่งเท่ากับ X_α ดังที่ได้แสดงให้เห็นแล้วในทุกค่าของ a ยกเว้น a = 1

$$X_\alpha = \frac{1}{1-a}Y$$

คำตอบโดยทั่วไป (general Solution) ของสมการ difference จะเท่ากับผลรวมของ คำตอบที่ได้จาก สมการ homogeneous และคำตอบเฉพาะ นั่นคือ

$$X_t = Aa^t + \frac{1}{1-a}Y$$

เมื่อ A คือค่าที่กำหนดให้ล่วงหน้า โดยเราสามารถคำนวณค่า A ได้ถ้ากำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปรตามให้ คือ X_0 ที่ t = 0 ดังนั้นค่าคำตอบทั่วไปจะเป็น

$$X_0 = Aa^0 + \frac{1}{1-a}Y$$

นั่นคือ

$$A = \left(X_0 - \frac{1}{1-a}Y\right)$$

ดังนั้น นำค่า A ไปแทนลงสมการคำตอบโดยทั่วไปของสมการ first-order linear difference equation เมื่อ $a \neq 1$ คือ

$$X_t = \left(X_0 - \frac{1}{1-a}.Y\right)a^t + \frac{1}{1-a}Y$$

$$= a^t X_0 + \frac{1-a^t}{1-a}Y$$

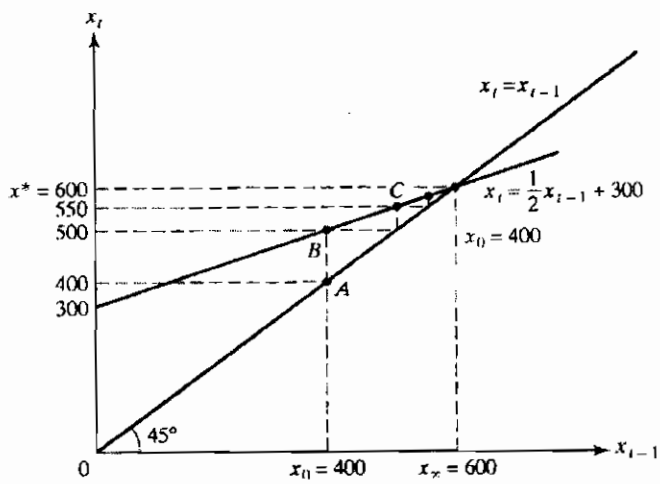
ซึ่งเป็นคำตอบเดียวกันกับที่ได้ตังสมการ (3-8)

3.7 The Phase Diagram

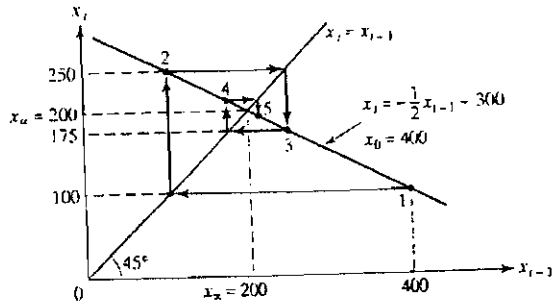
หนทางหนึ่งที่จะแสดงให้เห็นถึง ทางเดินของตัวแปรที่มีลักษณะเป็นสมการ difference ดังสมการ (3-4) คือ การใช้ Phase Diagram

Phase Diagram สำหรับสมการ(3-2) จะแสดงดังรูป (3-3) โดยแกนนอนจะแทนด้วย X_{t-1} และแกนตั้งจะแทนด้วย X_t มีกราฟเส้นแทนสมการ 2 สมการในรูปนี้ ซึ่งประกอบด้วยกราฟจากสมการ difference และกราฟจากสมการ $X_t = X_{t-1}$ ซึ่งแสดงด้วยเส้น 45^0 จุดที่เส้นกราฟ 2 เส้น ตัดกันจะแสดงถึงจุดที่เกิดดุลยภาพ ซึ่งมีค่า เท่ากับ X_α นั่นเอง

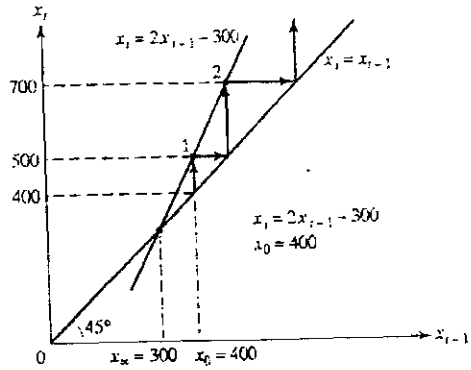
ลักษณะของ phase diagram เป็นการใช้เพื่อแสดงทางเดินของค่าชุดตัวแปร X_0, X_1, X_2 ..... ซึ่งแสดงดังรูป (3-3) เมื่อค่าเริ่มต้น $X_0 = 400$ จากแนวตั้ง เมื่อจะหา X_1 ก็ให้ลากเส้นขนานกับแกนนอน จากจุด $X_0 = 400$ จะไปพบเส้น 45^0 ที่จุด A แล้วลากเส้นตั้งฉากไปพบเส้นสมการ difference ที่จุด B โดยจุดB จะแสดงถึงค่าของ X_1 การหาค่า X_2 ก็จะหาโดยวิธีการเดียวกันกับการหาค่า X_1 ซึ่งจะหาค่าได้ที่จุด C ซึ่งรูปนี้จะแสดงให้เห็นถึงการเคลื่อนที่เข้าหาค่าดุลยภาพ $X_\alpha = 600$



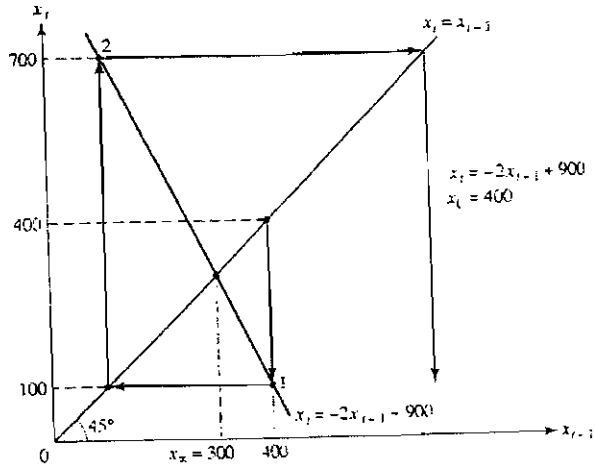
รูป (3-3) แสดง phase diagram ของสมการ(3-2)



Oscillatory
(a)



Unstable and Monotonic
(b)



Unstable and Oscillatory
(c)

รูป (3-4) แสดง phase diagram สำหรับสมการ(3-3),(3-5) และ(3-6)

ตามที่ได้อธิบายประกอบรูป phase diagram ที่แสดงทางเดินเข้าสู่ดุลยภาพของสมการ (3-2) ที่มีลักษณะลู่เข้าหาจุดดุลยภาพ สำหรับรูป phase diagram ดังแสดงในรูป (3-4) (a) , (b) และ (c) ซึ่งแสดงถึงทางเดินสู่ดุลยภาพของสมการ (3-3) , (3-5) และ (3-6) ตามลำดับ ซึ่งเป็นทางเดินสู่ดุลยภาพในลักษณะที่แตกต่างออกไป โดยรูป phase diagram แต่ละรูปจะประกอบด้วยเส้น 45^0 และเส้นที่แสดงถึงสมการ difference ในแต่ละกรณี ที่ดุลยภาพของสมการ difference คือ X_α จะแสดงโดยจุดที่เส้น 45^0 ตัดกับเส้นสมการ difference รูป phase diagram ดังแสดงในรูป (3-4) (a) จะแสดงให้เห็นถึงทางเดินของค่า X เข้าสู่ดุลยภาพในลักษณะกวัดแกว่ง โดยค่าของ X จะมีค่ามากกว่า X_α และน้อยกว่า X_α สลับกันไป จนกระทั่งผลต่างของ X_t กับ X_α มีค่าเข้าใกล้ 0 (ศูนย์) สำหรับรูป phase diagram ตามรูป (3-4) (b) และ (c) จะแสดงถึงความไม่มีเสถียรภาพ (unstable) ของสมการ difference ทางเดินของ phase diagram แสดงให้เห็นค่า X_t ที่ห่างออกจากค่า X_α เรื่อย ๆ เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ถ้าค่า X_0 ไม่เท่ากับค่า X_α โดยรูป (3-4)(b) แสดงให้เห็นถึงความไม่มีเสถียรภาพกรณีที่ค่า X เพิ่มขึ้นในทางเดียวกันออกจากดุลยภาพเดิม ส่วนรูป (3-4)(c) แสดงให้เห็นค่า X_t เพิ่มขึ้นในลักษณะกวัดแกว่ง ออกจากดุลยภาพเดิม

phase diagram จะมีประโยชน์เป็นพิเศษ กรณีที่หาค่าคำตอบของสมการ difference ที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งวิธีการคำนวณหาค่าตัวแปรตามในกรณีนี้จะใช้วิธีการเดียวกับกรณีการหาคำตอบที่เป็นลักษณะเชิงเส้นเริ่มต้นหาด้วยการกำหนดค่าเริ่มต้นให้แล้วลากไปหาเส้น 45^0 แล้วต่อไปยังเส้นที่แสดงสมการ difference เพื่อหาค่าตัวแปรตามของช่วงเวลาต่อไปแต่ละจุดที่เส้นโค้งของสมการ difference ตัดกับเส้น 45^0 จะแสดงให้เห็นเป็นจุดดุลยภาพ

3.8 Stability in a Phase Diagram of a Strictly Increasing Difference Equation

สมการ difference จะมีเสถียรภาพ ดังรูป Phase diagram แสดงให้เห็นกราฟ ของสมการ difference ที่มีลักษณะเพิ่มขึ้นอย่างแท้จริง (strictly increasing) และตัดกับเส้น 45^0 ณ.จุดที่อยู่เหนือเส้นที่เคลื่อนที่จากซ้ายไปขวา

สมการ difference จะไม่มีเสถียรภาพ ถ้ารูป phase diagram แสดงด้วยกราฟของ สมการ difference ที่มีลักษณะเพิ่มขึ้นอย่างแท้จริงและตัดเส้น45^0ณ.จุดที่อยู่ใต้เส้นที่เคลื่อนที่จากซ้ายไปขวา

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นถึงคุณสมบัติดังกล่าวข้างต้น

Two Models of Economic Growth

โครงสร้างของแบบจำลองความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ สามารถใช้คำนวณหาระดับรายได้ในระยะยาวและหาทางเดินของรายได้ เราสามารถวิเคราะห์เชิงคุณภาพของเส้นทางเดินของรายได้ โดยการใช้แบบจำลองความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจโดยอาศัย phase diagram ได้ คือ อาศัยแบบจำลองของโซโล (Solo model) และแบบจำลองฟังก์ชั่นการผลิต เกี่ยวกับการเพิ่มขึ้นของผลตอบแทนต่อขนาด (increasing returns to scale)

ทั้งสองแบบจำลองนี้จะมีชุดของตัวแปรเหมือนกัน โดยให้ K_t หมายถึงปริมาณการสะสมทุนต่อแรงงาน (capital stock per worker) และ i_t หมายถึงปริมาณการลงทุนต่อแรงงาน (investment per worker) การลงทุนคือค่าผลรวมของการสะสมทุน ดังนั้นผลรวมของการสะสมทุนสุทธิจะเท่ากับ ผลต่างระหว่างการลงทุนกับค่าเสื่อมราคา เราสมมติว่าในแต่ละช่วงเวลา ค่าสัดส่วน (δ) ของค่าเสื่อมราคา จะเป็นค่าคงที่ โดยมีค่าระหว่าง 0 กับ 1 ($0<\delta<1$) ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$K_t - K_{t-1} = i_t - \delta K_{t-1}$$

จากการคำนวณทางด้านบัญชี จะได้ว่า $i_t = S_t$ โดยค่า S_t หมายถึงสัดส่วนของการออมต่อแรงงาน โดยสมมติว่ามีค่าเท่ากับสัดส่วนคงที่ระดับหนึ่ง (σ) ของรายได้ต่อแรงงาน ($0<\sigma<1$) โดยค่ารายได้ต่อแรงงานคำนวณจากฟังก์ชั่นการผลิต ($f(K_t)$) ดังนั้นถ้าทำการแทนค่าสมการข้างต้นแล้วทำการจัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$K_t - \sigma f(K_t) = (1 - \delta)K_{t-1}$$

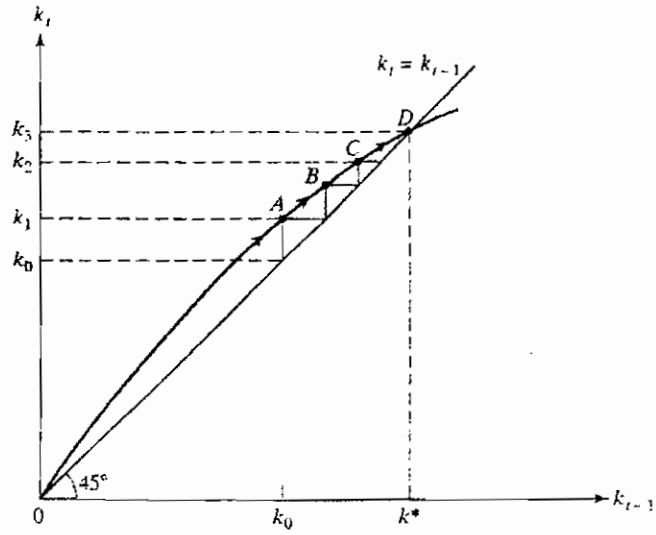
จาก Cobb-Douglas production function ที่ศึกษาโดย Robert Solow จะได้ว่า

$$f(K_t) = A K_t^{\alpha}$$

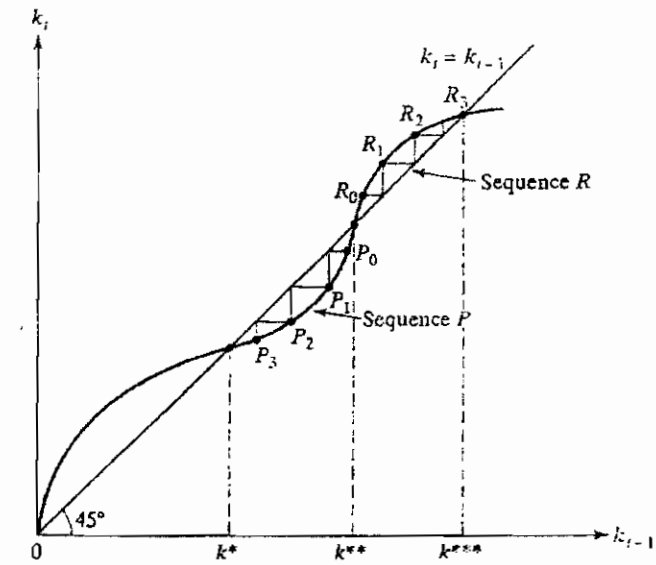
โดย $0 < \alpha < 1$ และ A เป็นค่าคงที่

ฟังก์ชั่นการผลิตนี้แสดงให้เห็นว่าเป็นลักษณะการลดลงของผลตอบแทนต่อขนาดของการสะสมทุน k = $\frac{K}{L}$ ตลอดทั้งช่วงดังรูป (3-5)(a) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ในลักษณะสมการ difference ที่ไม่เป็นเชิงเส้น เมื่อ $f(K_t)$ คือ Cobb-Douglas production function จะเห็นว่าจะเกิดจุดดุลยภาพ (steady state) 2 จุด คือที่ 0 และ K^* โดยจุดดุลยภาพ K^* จะเป็นจุดที่มีลักษณะเสถียรภาพ เพราะตัดเส้น 45^0 ทางช่วงบน ลักษณะนี้แสดงว่าสำหรับทุกระดับทุนที่เป็นบวก จะทำให้ระบบเศรษฐกิจมีแนวโน้ม เข้าหาระดับการสะสมทุนที่ K^* และระดับรายได้จะมีแนวโน้มเข้าหาฟังก์ชั่น $f(K^*)$ เช่น ถ้าจุดเริ่มต้นของการสะสมทุนอยู่ที่ K_0 ซึ่ง $< K^*$ จะแสดงให้เห็นจากรูปว่าจะเกิดทางเดินไปตามจุด A,B,C และ D โดยจะมีค่าเข้าใกล้จุดดุลยภาพ

การที่ทางเดินของการสะสมทุนจะเข้าสู่จุดดุลยภาพเพียงจุดเดียวจะไม่เกิดขึ้น ถ้าแบบจำลองการเจริญเติบโตมีลักษณะสลับกัน ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชั่นการผลิตที่ต่างออกไป เช่นในแบบจำลองความเจริญเติบโต ที่มีการเพิ่มขึ้นของผลตอบแทนต่อขนาดที่เกิดขึ้นเป็นช่วง ๆ ของฟังก์ชั่นการผลิต ที่เราเรียกว่า กับดักแห่งความยากจน "poverty traps" ซึ่งจะนำไปสู่ความแตกต่างกันในรายได้ถาวรระหว่างประเทศที่ร่ำรวยและประเทศที่ยากจน การเพิ่มขึ้นของผลตอบแทนต่อขนาดจะเพิ่มขึ้นเพราะว่า ในประเทศที่พัฒนาแล้ว จะมีการเปลี่ยนแปลงการผลิตจากภาคเกษตรกรรมไปเป็นภาคอุตสาหกรรมและการบริการ ซึ่งในภาคอุตสาหกรรมและภาคการบริหารจะมีการเพิ่มขึ้นในผลตอบแทนต่อขนาด ลักษณะเช่นนี้จะเกิดในฟังก์ชั่นการผลิตที่มีลักษณะเป็นเส้นโค้งเป็นช่วง ๆ ความสัมพันธ์ลักษณะนี้ ดังแสดงในรูป (3-5) (b) จะเกิดจุดดุลยภาพ 3 ชุด นอกจากจุดที่ K = 0 คือ จะเกิดที่ K^*, K^{**} และ K^{***} โดยที่จุด K^* และ K^{***} จะเป็นจุดดุลยภาพที่มีเสถียรภาพ และที่จุด K^{**} จะเป็นจุดดุลยภาพที่ไม่มีเสถียรภาพ สำหรับจุดเริ่มต้นใด ๆ ที่ $K_0 > K^{**}$ ระบบเศรษฐกิจจะปรับตัวไปสู่จุดดุลยภาพที่ K^{***} ซึ่งแสดงให้เห็นในช่วง R ดังรูป และสำหรับทุกค่าที่ $0 < K_0 < K^{**}$ ระบบเศรษฐกิจจะปรับตัวไปเกิดดุลยภาพที่ K^* ซึ่งแสดงให้เห็นในช่วง P ดังรูป แต่ถ้าระบบเศรษฐกิจเกิดขึ้นที่ K^{**} พอดีก็จะเป็นจุดที่เกิดดุลยภาพที่มีเสถียรภาพได้ ความแตกต่างของผลลัพธ์นี้ที่สุดแล้วจะนำไปสู่เงื่อนไขของกับดักแห่งความยากจน ซึ่งทำให้เกิดความแตกต่างของรายได้ระหว่างประเทศที่ร่ำรวยและประเทศที่ยากจนอย่างถาวรสืบไป



The Solow Growth Model
(a)



A Growth Model with Poverty Traps
(b)

รูป (3-5) แสดง Two Growth Models

3.9 Applications of linear first-order difference equations

3.9.1 Keynesian Income Determination

แบบจำลองการกำหนดขึ้นเป็นรายได้ของเคนส์ แสดงได้โดยการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอิสระ เช่น การเปลี่ยนแปลงในการใช้จ่ายของรัฐบาล ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างมากในอุปสงค์รวม (aggregate demand) โดยผลของตัวทวี ในแบบจำลองนี้จะแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของรายได้ อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงในการใช้จ่ายของรัฐบาล

เราจะใช้แบบจำลองสมการไดนามิคของเคนส์อย่างง่าย คือ อุปสงค์รวม ณ.ช่วงเวลา t เกิดจากผลรวมของการบริโภค และการใช้จ่ายของรัฐบาล ในช่วงเวลาเดียวกัน คือ

$$Y_t = C_t + G$$

รายได้ถาวร Y_t^P ให้มีค่าเท่ากับสัดส่วนของรายได้เฉลี่ย ณ ช่วงเวลาเดียวกันและสัดส่วนของรายได้ ณ.ช่วงเวลาก่อนหน้า ซึ่งแสดงได้ดังสมการ

$$Y_t^P = \lambda Y_t + (1-\lambda)Y_{t-1}$$

เมื่อ $1 > \lambda > 0$ เราสมมติว่า ณ.ช่วงเวลา t การบริโภคจะเป็นฟังก์ชั่นของรายได้ถาวร ซึ่งแสดงได้ว่า

$$C_t = \alpha + \beta Y_t^P$$

เมื่อ $\alpha > 0$ และ $1 > \beta > 0$ ทำการแทนค่า จะได้ สมการ difference ของรายได้ดังนี้

$$Y_t = \frac{\beta(1-\lambda)}{1-\beta\lambda}Y_{t-1} + \frac{1}{1-\beta\lambda}(\alpha + G)$$

ค่า $$\frac{\beta(1-\lambda)}{1-\beta\lambda} = \frac{\beta-\beta\lambda}{1-\beta\lambda}$$

ซึ่งมีค่าเป็นบวก แต่น้อยกว่า 1 แสดงว่าเป็นสมการ difference ที่มีดุลยภาพ ในลักษณะมุ่งสู่ดุลยภาพ โดยที่ดุลยภาพจะหาค่าได้คือ

$$Y_t = \frac{1}{1-(\beta-\beta\lambda)/(1-\beta\lambda)}\left[\frac{1}{1-\beta\lambda}(\alpha+G)\right]$$

$$Y_t = \frac{1}{1-\beta}(\alpha+G)$$

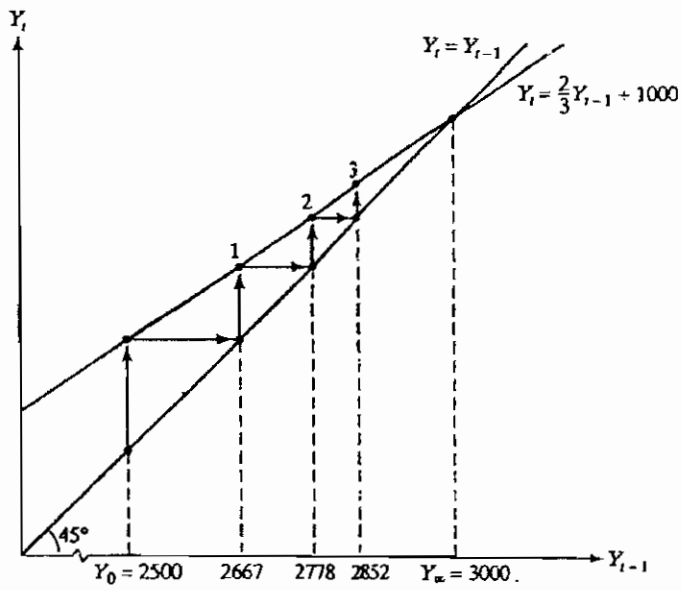
ค่าสัมประสิทธิ์ $\frac{1}{1-\beta}$ จะเหมือน ตัวทวีของ Keyne ที่เมื่อการบริโภคเป็นฟังก์ชั่นของรายได้ปัจจุบันแทนที่จะเป็นฟังก์ชั่นของรายได้ถาวร ลักษณะเช่นนี้เกิดขึ้นเนื่องจาก การปรับตัวของสภาพ

เคลื่อนไหว ที่ดุลยภาพเราจะได้ $Y_{t-1} = Y_t = Y_\alpha$ และนอกจากนี้แล้วก็เกิดจากความไม่มีความแตกต่างระหว่างมูลค่าของรายได้ถาวรกับมูลค่าของรายได้ปัจจุบัน

เราสามารถตรวจสอบสภาพเคลื่อนไหวของการเคลื่อนที่ของรายได้ไปสู่ดุลยภาพโดยพิจารณาจากการเปลี่ยนแปลงการใช้จ่ายของรัฐบาล สมมติให้ $\alpha = 200$ และ $\beta = \frac{4}{5}$ และ $\lambda = \frac{1}{2}$ และเราเริ่มที่รายได้เท่ากับ 2500 สัมพันธ์กับข้อสมมตินี้ จะได้ว่าจุดเริ่มต้นของการใช้จ่ายของรัฐบาลเท่ากับ 300 ดังรูปที่ (3-6) ซึ่งแสดงให้เห็นรูป phase diagram ถ้ารัฐบาลใช้จ่ายเพิ่มขึ้นเป็น 400 จะได้สมการ difference ตามรูปนี้คือ

$$Y_t = \frac{2}{3}Y_{t-1} + 1000$$

ระบบเศรษฐกิจจะปรับตัวเป็นแบบ เคลื่อนเข้าสู่ดุลยภาพ จาก $Y_0 = 2500$ ไปที่จุด $Y^* = 3000$ โดย $Y_1 = 2667$, $Y_2 = 2778$, $Y_3 = 2852$ ไปเรื่อย ๆ



รูป (3-6) แสดงKeynesian Macroeconomic Model Phase Diagram (G = 400)

3.9.2 The Determination of Stock Prices

ราคาของทรัพย์สินสะท้อนให้เห็นถึงมูลค่าของรายรับในอนาคตในการถือทรัพย์สินนั้นไว้ และรวมทั้งการเพิ่มขึ้นในราคาของทรัพย์สินนั้น ข้อสำคัญของราคาของทรัพย์สินในอนาคตที่สะท้อนถึงราคาทรัพย์สินปัจจุบันจะแสดงในรูปสมการเคลื่อนไหวของราคาทรัพย์สิน ตัวอย่างของสมการราคาทรัพย์สิน คือ สมการ difference เชิงเส้นลำดับที่ 1

พิจารณาแบบจำลองของราคาสต๊อก (Stock price) กำหนดให้เป็น P_t ณ.เวลา t ผลตอบแทนของสต๊อคคือผลรวมจากส่วนประกอบตลอดช่วงเวลา t โดยกำหนดให้มีค่าเท่ากับ d^e_{t+1} ส่วนที่สองเกิดจากการที่สามารถขายสต๊อคได้ราคาสูงขึ้นในช่วงเวลาต่อไป โดยกำหนดให้มีค่าเท่ากับ P^e_{t+1} ผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้รับระหว่างการถือหุ้นของสต๊อคไว้กับการถือพันธบัตร มีค่าเท่ากัน และจะถือว่าไม่มีความแตกต่างทางด้านความเสี่ยงและสภาพคล่องในการถือหุ้นหรือถือพันธบัตรได้ ถ้าใช้เงินในการซื้อหุ้นจาก stock มาถือไว้แทนที่จะไปซื้อพันธบัตรซึ่งผลตอบแทนที่จะได้ในรูปอัตราดอกเบี้ย r ในช่วงเวลาหนึ่ง ผลตอบแทนจะเท่ากับ $(1+r)P_t$ และค่าคาดหวังที่จะได้รับผลตอบแทนจากการถือหุ้นจะเท่ากับ ผลตอบแทนที่จะได้รับจากการถือพันธบัตรถ้า

$$(1+r)P_t = P^e_{t+1} + d^e_{t+1}$$

สมมติว่า $P^e_{t+1} = P_{t+1}$ สำหรับทุกช่วงเวลา t จะทำให้ได้สมการ difference เชิงเส้นลำดับที่ 1 คือ

$$(1+r)P_t = P_{t+1} + d^e_{t+1}$$

ซึ่งสามารถหาค่าได้ ด้วยวิธีการที่อธิบายมาแล้ว โดยการจัดรูปใหม่จะได้

$$P_t = \left(\frac{1}{1+r}\right)P_{t+1} + \left(\frac{1}{1+r}\right)d^e_{t+1}$$

คำตอบของสมการ (3-11) แสดงให้เห็นว่าสมการนี้มีคำตอบในลักษณะ forward solution คือ

$$P_t = \sum_{i=0}^{\alpha}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i\left(\frac{d^e_{t+i+1}}{1+r}\right) \qquad (3\text{-}12)$$

สมมติว่าสามารถคำนวณหาค่า d^e_α ได้

ทำให้ $$\lim_{t\to\alpha}\left(\frac{1}{1+r}\right)^t\left(\frac{d^e_\alpha}{1+r}\right) = 0$$

คำตอบจากสมการ (3-12) ทำให้เราทำนายผลได้ว่า ณ.ช่วงเวลา t ราคาของ Stock จะเท่ากับผลตอบแทน (เมื่อคิดในรูปมูลค่าปัจจุบัน) ที่จะได้รับจากค่าคาดหวังของกระแสเงินปันผลที่จะได้รับในอนาคต ในกรณีที่ถ้าค่าคาดหวังของเงินปันผลมีค่าคงที่ และเท่ากับ $\bar{d}$ แล้วจะได้ว่า ราคาของ Stock ในปัจจุบันจะเท่ากับ

$$P_t = \sum_{i=0}^{\alpha}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i\left(\frac{\bar{d}}{1+r}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)}\left(\frac{\bar{d}}{1+r}\right)$$

$$= \frac{\bar{d}}{r}$$

ซึ่งเท่ากับค่ามูลค่าปัจจุบันของกระแสผลตอบแทนที่จะได้รับจากเงินปันผลที่มีค่าคงที่

คำตอบจากสมการ (3-12) แสดงให้เห็นว่าทุกสิ่งสามารถส่งผลถึงผลตอบแทนของเงินปันผลในอนาคตได้ ซึ่งจะส่งผลถึงราคา Stock ในปัจจุบันด้วย ยิ่งมีการกระทบจำนวนมากขึ้น จะยิ่งส่งผลถึงการเปลี่ยนแปลงในปัจจุบันได้มาก ดังนั้น ราคา Stock จะเปลี่ยนแปลงไปสู่ค่าใหม่ ๆ ที่สอดรับกับจำนวนเงินปันผลดังนั้น ค่าคาดหวังของราคา Stock จะ สามารถเปลี่ยนแปลงได้ง่าย

ในความเป็นจริงแล้ว ราคา Stock จะเปลี่ยนแปลงได้ง่ายมาก ซึ่งสอดคล้องกับแบบจำลองนี้ Robert Shiller แสดงให้เห็นว่า เส้นทางเดินของดัชนีราคาตลาดของ Stock มีการเปลี่ยนแปลงมากกว่า เส้นทางเดินของค่าคาดคะเนของแบบจำลองนี้ เมื่อใช้มูลค่าของเงินปันผลที่แท้จริง เพื่อหามูลค่าของชุดสมการ $\{d_t^e\}_{t=0}^n$

4. การแก้สมการ Differential Equations

การแก้สมการ First Order Differential Equation หรือการหากาลวิถี (time path) ของตัวแปรตามที่มีลักษณะเป็นตัวแปรแบบต่อเนื่อง (Continuous Variable) มีรูปแบบของสมการดังนี้คือ

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t) \qquad (4.1)$$

4.1 การพิจารณา Order และ degree ของสมการ differential equations

Order พิจารณาจากค่า derivative ที่สูงสุดของสมการ เช่น

$\frac{dy}{dt}$ จะมี Order = 1 หรือ first order

$\frac{d^2y}{dt^2}$ จะมี Order = 2 หรือ Second order

$\frac{d^ny}{dt^n}$ จะมี Order = n หรือ n^{th} order

ส่วน degree นั้นพิจารณาจากกำลังที่สูงที่สุดของ order ที่สูงที่สุดของสมการ เช่น

(1) $\frac{dy}{dt} = 2x+6$ จะมีลักษณะ First Order , first degree

(2) $\left(\frac{dy}{dt}\right)^4 - 5t^5 = 0$ จะมีลักษณะ First Order , fourth degree

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + X^2 = 0$ จะมีลักษณะ Second Order, first degree

(4) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^7 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^5 = 75y$ จะมีลักษณะ Third Order , fifth degree

4.2 การแก้สมการ First-Order Linear Differential Equation

4.2.1 กรณีค่าสัมประสิทธิ์และเทอมทางขวามือของสมการเป็นค่าคงที่

$$\frac{dy}{dt} + ay = b \qquad \text{(a,b เป็นค่าคงที่)(4.2)}$$

(1) กรณีค่า b = 0 หรือที่เรียกว่า Homogeneous differential equation

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0 \qquad (4.3)$$

การหา Solution ทำได้โดย

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt} = -a$$

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}.dt = \int -adt$$

$$\ln Y + c_1 = -at + c_2$$

$$\ln Y = -at + c \qquad (c = c_2 - c_1)$$

$$\therefore \quad Y(t) = e^{-at+c}$$

ได้คำตอบทั่วไป(general Solution) คือ

$$Y(t) = Ae^{-at} \qquad (A = e^{c})$$

พิจารณาที่ t = 0 จะได้

$$Y(0) = Ae^{-a(0)} = A$$

นั่นคือจะได้คำตอบที่มีค่าจำกัด (แน่นอน) หรือ definite Solution คือ

$$Y(t) = Y(0)e^{-at}$$

(2) กรณีค่า $b \neq 0$ หรือที่เรียกว่า nonhomogeneous differential equations

$$\frac{dy}{dt} + ay = b \qquad (4.4)$$

คำตอบโดยทั่วไปของสมการนี้จะประกอบด้วย 2 ส่วน

$$Y_t = Y_c + Y_p$$

โดยส่วนที่ 1 หาได้จากคำตอบของ homogeneous differential equation หรือเรียกว่า reduced equation คือ เมื่อ b = 0 หรือเป็นส่วนที่แตกต่างไปจากค่าดุลยภาพ เป็นส่วนที่เรียกว่า Complementary function แสดงด้วย Y_c ดังนั้น reduced equation ของกรณีนี้คือ

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0 \qquad (4.5)$$

ซึ่งเป็นกรณีเดียวกันกับ homogeneous differential equation นั่นคือเราจะได้ Complementary function คือ

$$Y_c = Ae^{-at} \qquad \text{เมื่อ } A = e^{c}$$

ส่วนที่ 2 เป็นคำตอบของ nonhomogeneous equation หรือเป็นค่าดุลยภาพของ Y เรียกว่า particular integral แสดงด้วย Y_p

ในการหาค่า Y_p สามารถหาได้โดย

สมมติให้ $y = k$;k = ค่าคงที่

$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = 0$

แทนค่า y และ $\frac{dy}{dt}$ ลงสมการ (4.4) จะได้

$$ak = b$$

หรือ $k = \frac{b}{a}$ เมื่อ $a \neq 0$

นั่นคือ จะได้ $Y_p = \frac{b}{a}$

ดังนั้นคำตอบโดยทั่วไป (general Solution) ในกรณีนี้คือ

$$Y_t = Y_c + Y_p$$

คือ $Y_t = Ae^{-at} + \frac{b}{a}$ เมื่อ $a \neq 0$ (4.6)

ถ้ากำหนดเงื่อนไขเบื้องต้น t = 0 จะได้

$$Y(0) = A + \frac{b}{a}$$

$$\therefore \quad A = Y(0) - \frac{b}{a}$$

แทนค่า A ลงสมการ (4.6) จะได้ definite Solution

$$\boxed{Y_t = \left[Y(0) - \frac{b}{a}\right]e^{-at} + \frac{b}{a}} \quad \text{เมื่อ } a \neq 0 \qquad (4.7)$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาคำตอบโดยทั่วไปของสมการ $\frac{dY}{dt} + 2Y = 6$

กำหนดให้ Y (0) = 10 โดยไม่ใช้สมการที่ (4.7)

วิธีทำ ต้องการหา $Y_t = Y_c + Y_p$

(1) หา Y_c จาก reduced equation

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2dt$$

$$\ln y + c_1 = -2t + c_2$$

$$Y = c^{-2t+c} \qquad \text{เมื่อ } c = c_1 + c_2$$

หรือ $Y_c = Ae^{-2t}$ $\qquad A = e^c$

(2) หา Y_p จาก $\frac{dy}{dt} + 2y = 6$

ให้ $Y = k$ (k = ค่าคงที่)

จะได้ $\frac{dy}{dt} = 0$

แทนค่าจะได้ $2k = 6$

หรือ $k = 3$

นั่นคือ $Y_p = 3$

$\therefore$ general solution

$$Y_t = Y_c + Y_p$$

$$Y_t = Ae^{-2t} + 3$$

เมื่อ $t = 0$

$Y(0) = A + 3$

โจทย์กำหนดให้ $Y(0) = 10$

$\therefore \quad A = 10-3 = 7$

แทนค่า จะได้ $Y_t = 7e^{-2t} + 3$ เป็น definite Solution

4.2.2 กรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์ และเทอมทางขวามือของสมการ เป็นตัวแปร

นั่นคือ $\frac{dy}{dt} + u(t)Y = w(t)$ (4.8)

โดย u(t) และ w(t) เป็นฟังก์ชันของ t

(1) กรณี w(t) = 0 หรือ homogeneous Case

ดังนั้น $\frac{dy}{dt} + u(t)Y = 0$ (4.9)

การหาคำตอบทำได้ดังนี้

$$\frac{dy}{dt} = -u(t)y$$

หรือ $$\frac{1}{y}dy = -u(t)dt$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -u(t)dt$$

$$\ln Y + C = -\int n(t)dt$$

$$Y_t = e^{-c-\int u(t)dt}$$

$$Y(t) = Ae^{-\int udt}$$;เมื่อ $A=e^{-c}$ และ $u=u(t)$ (4.10)

เป็น general solution เมื่อกำหนดเงื่อนไขตั้งต้นมาให้ก็สามารถ หา definite solution ได้

ตัวอย่างที่ 10 จงหาคำตอบของสมการ $\frac{dy}{dt} + 3t^2 y = 0$ กำหนดให้ $Y(0) = 10$

จากโจทย์ จัดรูปใหม่จะได้

$$\frac{dy}{dt} = -3t^2 y$$

หรือ $$\frac{1}{y}dy = -3t^2 dt$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -3t^2 dt$$

$$\ln y + c_1 = -t^3 + c_2$$

$$\ln y = -t^3 + c \qquad (\text{เมื่อ } c = c_2 - c_1)$$

$$Y_t = -e^{-t^3+c}$$

หรือ $Y_t = Ae^{-t^3}$ เป็น general Solution

แทนค่า $t = 0$ ได้ $Y(0) = A = 10$

ดังนั้น $Y_t = 10e^{-t^3}$ เป็น definite solution

(2) เมื่อ $w(t) \neq 0$ หรือ nonhomogeneous differential equations

$$\frac{dy}{dt} + u(t)Y = w(t) \qquad (4.11)$$

ในการหาคำตอบของกรณีนี้ค่อนข้างยุ่งยาก จะต้องอาศัยวิธีการที่เรียกว่า exact differential equations ซึ่งจะได้อธิบายในหัวข้อต่อไปในที่นี้จึงขอแสดงคำตอบกรณีนี้ดังนี้

$$\boxed{Y_t = e^{-\int u dt}\left(A + \int w e^{\int u dt} dt\right)} \qquad \text{โดย } A = \text{ค่าคงที่} \quad (4.12)$$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาคำตอบของ $\frac{dy}{dt} + 2ty = t$

วิธีทำ จากโจทย์เทียบกับสมการ 5.11 จะได้

$$u(t) = 2t \quad \text{และ} \quad w(t) = t$$

ทำการ $\int u(t)dt = \int 2t dt = t^2 + k$ (k=ค่าคงที่)

แทนค่า ลงสมการที่ (4.12) จะได้

$$Y_t = e^{-(t^2+k)}(A + \int te^{(t^2+k)}dt)$$

$$= e^{-(t^2+k)}(A + e^k \int te^{t^2} dt)$$

$$Y_t = e^{-t^2}.e^{-k}(A + e^k\left(\frac{1}{2}e^{t^2} + c\right))$$

$$= Ae^{-t^2}e^{-k} + e^{-t^2}\left(\frac{1}{2}e^{t^2} + c\right)$$

$$= Ae^{-t^2}e^{-k} + \frac{1}{2} + ce^{-t^2}$$

$$= (Ae^{-k} + c)\, e^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

$$= Be^{-t^2} + \frac{1}{2} \qquad \text{เมื่อ } B = Ae^{-k} + c = \text{ค่าคงที่}$$

4.3 การแก้สมการ First order first degree nonlinear differential equations

ในกรณีที่เป็น linear differential equation เรามีข้อจำกัดว่า สมการจะต้องเป็น first degree ไม่เพียงเฉพาะค่า $\frac{dy}{dt}$ เท่านั้นแต่รวมถึงค่าตัวแปรตาม Y ด้วย และไม่มีค่า Y. $\frac{dy}{dt}$ รวมอยู่ด้วย เมื่อค่า Y มีกำลังมากกว่า 1 ทำให้สมการเป็นแบบไม่ใช่เชิงเส้น (nonlinear) แต่ ค่า $\frac{dy}{dt}$ ยังคงต้องมี first degree ดังนั้นลักษณะโดยทั่วไปของสมการจะอยู่ในรูป

$$f(Y,t)dy + g(Y,t)dt = 0$$

หรือ

$$\frac{dy}{dt} = h(Y,t)$$

โดยไม่มีข้อจำกัดใด ๆ เกี่ยวกับกำลังของ Y และ t สมการนี้จึงเป็นสมการไม่ใช่เชิงเส้นที่มี degree เท่ากับ 1 และ Order เท่ากับ 1 ซึ่งสามารถหาคำเฉลยได้หลายแบบโดยในที่นี้จะแสดงให้เห็น 3 วิธี คือ

4.3.1 วิธี Exact differential equations (กรณีนี้ใช้ได้กับสมการที่เป็น Linear differential equation ที่มี degree เป็น 1 และ order เป็น 1 ด้วย)

กำหนดให้ฟังก์ชัน 2 ตัว แปร คือ F(Y,t) เมื่อทำการหา total differential จะได้

$$d\,F(Y,t) = \frac{\partial F}{\partial Y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt \qquad (4.13)$$

เมื่อ Set สมการที่ (4.13) = 0 จะได้

$$\frac{\partial F}{\partial Y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0 \qquad (4.14)$$

เราจะเรียกสมการ (4.14) ว่าเป็น exact differential equation ทั้งนี้เพราะว่า ด้านซ้ายมือของสมการคือ อนุพันธ์ที่แท้จริงของฟังก์ชัน F(Y.t) นั่นเอง

เช่น ให้ $F(Y,t) = y^2t + k$ (k = ค่าคงที่)

ทำการ take total differential จะได้

$$d\,F(Y,t) = 2ytdY + Y^2dt$$

เมื่อ Set ให้เท่ากับ 0 จะได้

$$2ytdy + y^2dt = 0$$

หรือ

$$\frac{dy}{dt} + \frac{Y^2}{2yt} = 0$$

จะเห็นว่า สมการนี้เป็น exact differential equation ทั้งนี้เพราะว่าด้านซ้ายมือ คือ อนุพันธ์ของฟังก์ชันเดิมที่แท้จริง ซึ่งได้จากการหา total differential โดย ตรง

จากการพิจารณาข้างต้นสรุปได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ทั่ว ๆ ไป อยู่ในรูป

$$Mdy + Ndt = 0$$

และจะเป็นสมการ exact differential ก็ต่อเมื่อ

$$M = \frac{\partial F}{\partial Y} \quad \text{และ} \quad N = \frac{\partial F}{\partial t}$$

และจากทฤษฎีของยัง (Young's theorem) จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}$$

หรือ $$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial Y}$$

โดยสรุปแล้วอาจกล่าวโดยนัยกลับกันได้ว่า ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ใดมี $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial Y}$ แสดงว่าสมการนั้นจะมีลักษณะเป็น exact differential

ทำการทดสอบสมการ $2ytdy + y^2dt = 0$ ว่ามีลักษณะเป็น exact differential equation หรือไม่ โดยพิจารณาว่า $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial Y}$ หรือไม่

กรณีนี้ $M = 2Yt \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial t} = 2y$

และ $N = Y^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial y} = 2y$

นั่นคือ $$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

แสดงว่าสมการข้างต้นเป็น exact differential equation จริง

ดังนั้น สำหรับ exact differential equation จะมีลักษณะ

$$d\,F(Y,t) = 0$$

และมีผลเฉลยทั่วไป (general solution) คือ

$$F(Y,t) = c$$

วิธีการหาผลเฉลยทั่วไป (general solution) ของ exact differential equation คือ

(วิธีการนี้สามารถใช้ได้ทั้ง กรณีที่เป็น linear และ nonlinear)

เนื่องจาก $M = \frac{\partial F}{\partial Y}$

หรือ $\frac{\partial F}{\partial Y} = M$

เมื่อทำการอินติเกรตมุ่งต่อ Y จะได้

$$F(Y,t) = \int M dy + \varphi(t) \qquad : \varphi = \text{psi}$$

ในที่นี้ M เป็นอนุพันธ์บางส่วน (partial derivative) ของสมการดั้งเดิม F(Y,t) ที่มุ่งต่อ Y เท่านั้น ซึ่งหมายความว่าในการหาค่าอนุพันธ์บางส่วนของ F(Y,t) มุ่งต่อ Y นั้นจะทำให้ค่าคงที่และพจน์ที่อยู่ในรูปของ t ซึ่งเปรียบเสมือนค่าคงที่หายไปด้วยและเมื่อทำการอินติเกรต M มุ่งต่อ Y ย้อนกลับไปก็ควรจะได้พจน์ของค่าคงที่และพจน์ของค่า t กลับคืนมาด้วย แต่ยังไม่สามารถแสดงให้เห็นอย่างแท้จริงได้จึงแสดงโดยรวมในรูปของ $\varphi(t)$ การหาพจน์ $\varphi(t)$ นั้นสามารถ กระทำได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ของ $N = \frac{\partial F}{\partial t}$ ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นได้ด้วยตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่างที่ 12 จงหาคำตอบของ $2ytdy + y^2dt = 0$

วิธีทำ ก่อนอื่นต้องทำการทดสอบก่อนว่าเป็น exact differential equation หรือไม่

โดยพิจารณาว่า $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$ หรือไม่

จากโจทย์ $M = 2yt \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial t} = 2y$

และ $N = Y^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial y} = 2y$

แสดงว่า เป็น exact differential equation ดังนั้นคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นคือ

$$\begin{aligned} F(Y,t) &= \int M dy + \varphi(t) \\ &= \int 2ytdy + \varphi(t) \\ &= 2t\left(\frac{1}{2}y^2\right) + \varphi(t) \\ &= y^2t + \varphi(t) \end{aligned}$$

ต่อไปกำหนดการหาค่าของ φ (t) โดยการ take partial derivative มุ่งต่อ t จะได้

$$\frac{\partial F}{\partial t} = y^2 + \varphi'(t)$$

เนื่องจาก $\frac{\partial F}{\partial t} = N = y^2$

แทนค่า จะได้ $y^2 = y^2 + \varphi'(t)$

หรือ $\varphi'(t) = 0$

$\therefore \int \varphi'(t)dt = \int o dt$

$\varphi(t) = k$ (k = ค่าคงที่)

ดังนั้น $F(Y,t) = y^2 t + k$

แต่เนื่องจาก Solution ของ exact differential equation คือ

$F(Y,t) = c$

$\therefore Y^2 t + k = c$

หรือ $y^2 t = c$

(รวม k และ c เข้าด้วยกันเพราะเป็นค่าคงที่ด้วยกัน)

นั่นคือ $Y = \sqrt{\frac{c}{t}}$ หรือ $ct^{-1/2}$ (c = ค่าคงที่)

Integrating Factor

เนื่องจาก differential equations จะไม่มีลักษณะเป็นสมการ exact เสมอไป ซึ่งสมการที่ไม่ exact บางสมการเราสามารถที่จะทำให้เป็นสมการที่ exact ได้ โดยการหาตัวคูณร่วมมาคูณตลอดซึ่งตัวคูณร่วมนี้มีชื่อเรียกว่า Integrating factor

กฎที่ใช้หา Integrating Factor

กฎนี้จะใช้ได้กับ first order differential equation กรณีที่เป็นสมการแบบ nonlinear และถ้าสามารถหาค่า Factor ได้โดย $\frac{\partial M}{\partial t} \neq \frac{\partial N}{\partial Y}$ จะได้ว่า

<u>กฎที่ 1</u> ถ้า $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial Y}\right) =$ f(y) alone จะได้

integrating factor คือ $e^{\int f(Y)dY}$

<u>กฎที่ 2</u> ถ้า $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial t}\right) =$ g(t) alone จะได้

integrating factor คือ $e^{\int g(t)dt}$

ตัวอย่างที่ 13 จงหา integrating factor ของสมการ

$5ytdy + (5y^2 + 8t)\,dt = 0$

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้

$$M = 5yt \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial t} = 5y$$

$$N = 5y^2 + 8t \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial y} = 10y$$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M}{\partial t} \neq \frac{\partial N}{\partial y}$

ทำการหา integrating factor โดยใช้กฎที่ 1 จะได้

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) = \frac{1}{5y^2 + 8t}(5y - 10y)$$

$$= \frac{-5y}{5y^2 + 8t}$$

ไม่เป็น f(y) alone เพราะมีตัวแปร t อยู่ด้วย

ดังนั้นใช้กฎข้อ 2 จะได้

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial t}\right) = \frac{1}{5yt}(10y - 5y)$$

$$= \frac{5y}{5yt} = \frac{1}{t}$$ เป็น g(t) alone

นั่นคือ ค่า integrating factor จะหาได้ จาก

$$e^{\int g(t)dt} = e^{\int \frac{1}{t}dt}$$

$$= e^{\ln t} = t$$

เมื่อนำค่า integrating factor ไปคูณกับสมการจากโจทย์ จะได้ exact differential equation คือ $5yt^2dy + (5y^2t+8t^2)dt = 0$ ซึ่งเมื่อนำสมการนี้ไปหาคำตอบจะสามารถหาคำตอบได้

4.3.2 วิธี Separable Variable

เมื่อสมการ differential อยู่ในรูปของ

$$f(Y,t)dy + g(Y,t)dt = 0$$

สามารถจัดให้อยู่ในรูปของ

$$f(y)dy + g(t)dt = 0$$

ก็สามารถใช้เทคนิคการอินติเกรตธรรมดาในการแก้สมการได้

ตัวอย่างที่ 14 จงหาสมการของ $t^2dy + y^2dt = 0$

วิธีทำ จากโจทย์ จะเห็นว่า $M \neq f(y)$ และ $N \neq g(t)$

แต่เมื่อคูณตลอดด้วย $\frac{1}{t^2y^2}$ จะได้

$$\frac{1}{y^2}dy + \frac{1}{t^2}dt = 0$$

ซึ่งสามารถใช้การอินติเกรตธรรมดาในการแก้สมการได้ คือ

$$\int \frac{1}{y^2}dy = -\int \frac{1}{t^2}dt$$

$$-\frac{1}{y} + c_1 = \frac{1}{t} + c_2$$

หรือ $$\frac{1}{y} = -\frac{1}{t} + c \qquad (c = c_1 + c_2)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{-\frac{1}{t} + c}}$$

4.3.3 วิธี Equations reducible to the linear form

ถ้าสมการอยู่ในรูปของ

$$\frac{dy}{dt} + Ry = Ty^m$$

โดย R และ T เป็นฟังก์ชันของ t

m มีค่าเป็นตัวเลขที่ไม่เท่ากับ 0 และ 1

ทำให้สมการดังกล่าวข้างต้นมีชื่อเรียกว่า สมการ Bernouli ซึ่งสามารถลดกำลังให้อยู่ในรูปของ linear differential equation และสามารถแก้สมการได้ โดยมีวิธีการดังนี้

ทำการ หารตลอดด้วยค่า y^m จะได้

$$Y^{-m}\frac{dy}{dt} + RY^{1-m} = T$$

ให้ $Z = y^{1-m}$

จะได้ว่า $\frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{dy}.\frac{dy}{dt} = (1\text{-m})y^{-m}\frac{dy}{dt}$

ทำการแทนค่า สมการข้างต้น จะได้

$$\left(\frac{1}{1-m}\right)\frac{dZ}{dt} + RZ = T$$

ทำการ คูณตลอด ด้วย (1-m)dt และจัดรูปใหม่ จะได้

$$dZ + \left[(1-m)RZ - (1-m)T\right]dt = 0$$

ซึ่งสมการนี้จะมีรูปร่างเหมือนกรณี first order linear differential equation ซึ่งสามารถใช้วิธีการแก้สมการแบบเชิงเส้นได้เมื่อได้ค่าคำเฉลย ในรูป Z(t) แล้ว ก็สามารถแทนค่า $Z = y^{1-m}$ เพื่อหาคำเฉลยของ Y(t) ได้

ตัวอย่างที่ 15 จงแก้สมการของ $\frac{dy}{dt} + ty = 3ty^2$

วิธีทำ สมการนี้เป็นลักษณะของ Bernouli equation ดังนั้นเราสามารถแปลงให้เป็นสมการเชิงเส้นได้โดย

ทำการหารตลอด ด้วย Y^2 จะได้ $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt} + \frac{t}{y} = 3t$

ให้ $Z = y^{1-m}$ เมื่อ m = 2

จะได้ $Z = y^{-1}$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{dy}.\frac{dy}{dt} = -y^{-2}\frac{dy}{dt}$$

แทนค่า จะได้

$$(-1)\frac{dZ}{dt} + tZ = 3t$$

คูณตลอดด้วย (-dt) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$dZ+(3t-tZ)dt = 0$$

ทำการแก้สมการโดยใช้สูตร (4.12) จะได้

$$Z(t) = Ae^{\frac{1}{2}t^2} + 3$$

เนื่องจาก กำหนดให้ $Z = y^{-1}$

หรือ $Y = Z^{-1}$

นั่นคือ $Y(t) = \dfrac{1}{Ae^{\frac{1}{2}t^2} + 3}$ เป็น general solution

4.4 ความเสถียรภาพของจุดดุลยภาพ (stability of Equilibrium)

ในการพิจารณาความมีเสถียรภาพของจุดดุลยภาพกรณีที่ตัวแปรมีลักษณะเป็นตัวแปรแบบต่อเนื่อง(continuous) นั้นจะพิจารณา จาก time path ของ

$$Y_t = \left[Y(0) - \frac{b}{a}\right]e^{-at} + \frac{b}{a} \quad \text{เมื่อ } a \neq 0$$

สามารถมีดุลยภาพได้ ถ้า $Y_0 = \dfrac{b}{a}$ แสดงว่า เกิดดุลยภาพที่ $Y_t = \dfrac{b}{a}$

แต่ถ้า $Y_0 \neq \dfrac{b}{a}$ สามารถพิจารณาความมีเสถียรภาพของดุลยภาพได้โดย พิจารณา ค่า e^{-at}

ถ้า $a > 0$ จะได้ว่า $e^{-at} \to 0$ ถ้า $t \to \infty$ นั่นคือ กาลวิถีของ Y_t จะเข้าสู่(Convergence) ดุลยภาพที่ $Y_t = \dfrac{b}{a}$ หมายความว่าเป็นดุลยภาพที่เสถียรภาพ

ถ้า $a < 0$ จะได้ว่า $e^{-at} \to \infty$ ถ้า $t \to \infty$ นั่นคือ กาลวิถีของ Y_t จะไม่สามารถเข้าสู่ (divergence) ดุลยภาพที่ $Y_t = \dfrac{b}{a}$ ได้ หมายความว่า เป็นดุลยภาพที่ไม่ เสถียรภาพ

ในการพิจารณาความมีเสถียรภาพยังสามารถพิจารณาได้จากสมการ differential โดยไม่จำเป็นต้องหา กาลวิถีก่อนได้คือ

จาก $$\frac{dY}{dt} + aY = b$$

หรือ $$\frac{dY}{dt} = -aY + b$$

ถ้า $a > 0$ แสดงว่ากาลวิถีของ Y หรือ Y_t จะสามารถเข้าสู่ (convergence) ดุลยภาพได้ หมายความว่า เป็นกาลวิถีที่ดุลยภาพมีเสถียรภาพ

ถ้า $a < 0$ แสดงว่ากาลวิถีของ Y หรือ Y_t จะไม่สามารถเข้าสู่ (divergence) ดุลยภาพได้ หมายความว่าเป็นกาลวิถีที่อาจจะมีดุลยภาพแต่ไม่เสถียรภาพ

ตัวอย่างที่ 16 จงหา time path ของ Y_t เมื่อกำหนดให้ $\frac{dY}{dt} + 2Y = 6$ โดย $Y_0 = 10$

และพิจารณาด้วยว่า จะเกิดดุลภาพหรือไม่ ถ้าเกิดเป็นดุลยภาพที่มีเสถียรภาพหรือไม่

วิธีทำ วิธีที่ 1

จากโจทย์ เราได้ว่า $a = 2$ และ $b = 10$

จาก
$$\frac{dY}{dt} + aY = b$$

ได้ time path คือ $Y_t = \left(Y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-at} + \frac{b}{a}$

เมื่อแทนค่า $a = 2$ และ $b = 6$ โดย $Y_0 = 10$

จะได้ $Y_t = \left(10 - \frac{6}{2}\right)e^{-2t} + \frac{6}{2}$

$Y_t = 7e^{-2t} + 3$ เป็น time path

พิจารณาเทอมแรกทางขวามือ พบว่า $7e^{-2t} \to 0$ เมื่อ $t \to \infty$

แสดงว่าจะเกิดดุลยภาพ ที่ $Y_t = 3$ และเป็นดุลยภาพที่มีเสถียรภาพ

หรือ วิธีที่ 2

พิจารณา $\frac{dY}{dt} + 2Y = 6$

พบว่าค่า $a = 2$ ซึ่งมากกว่า 0 แสดงว่า Y_t จะเป็นกาลวิถีที่ดุลยภาพมีเสถียรภาพเหมือนวิธีแรก

ตัวอย่างที่ 17 การนำเวลาเข้ามาพิจารณาในแบบจำลองพลวัตรของราคาตลาด

	Q_d	=	a	-	bP	(a,b>0)	(1)
	Q_s	=	-c	+	dP	(c,d>0)	(2)
ในดุลยภาพ	Q_d	=	Q_s				(3)
กำหนด	Q_d	=	ปริมาณอุปสงค์				
	Q_s	=	ปริมาณอุปทาน				
	P	=	ราคาสินค้า				
ในดุลยภาพ	a - bP	=	-c	+	dP		(4)
ดังนั้น	$\overline{P}$	=	$\frac{a+c}{b+d}$				

เมื่อกำหนด t = 0 และ P(0)= $\overline{P}$ แสดงว่าตลาดของสินค้าชนิดนี้จะเข้าสู่ดุลยภาพทันที กรณีนี้จึงไม่มีความจำเป็นที่จะต้องนำเอาเวลาเข้ามาใช้ในการวิเคราะห์ แต่ในความเป็นจริงแล้ว P(0) $\neq$ $\overline{P}$ ราคาสินค้าจะเข้าสู่ราคาดุลยภาพหรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับราคา อุปสงค์และอุปทานซึ่งต่างก็ขึ้นกับเวลาด้วยดังนั้นปัญหาจึงอยู่ที่ว่าราคาสินค้าจะมีการปรับตัวเข้าสู่ดุลยภาพหรือไม่เมื่อเวลาผ่านไป หรืออาจกล่าวได้ว่า $P(t) \rightarrow \overline{P}$ เมื่อ $t \rightarrow \infty$ หรือไม่?

การที่จะหาคำตอบดังกล่าว จะต้องกำหนดแบบแผนการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้า เมื่อเวลาผ่านไป สมมติว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้า เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไปเป็นสัดส่วนกับอุปสงค์ส่วนเกิน

$$\frac{dp}{dt} = \alpha(Q_d - Q_s) \qquad (5)$$

กำหนด α = สัมประสิทธิ์แสดงการปรับตัวของปริมาณอุปสงค์ส่วนเกิน

แทนค่า Q_d และ Q_s ลงในสมการ (5)

$$\frac{dp}{dt} = \alpha(a-bP+c-dP)$$

$$= \alpha(a+c) - \alpha(b+d)P$$

หรือ $$\frac{dp}{dt} + \alpha(b+d)P = \alpha(a+c) \qquad (6)$$

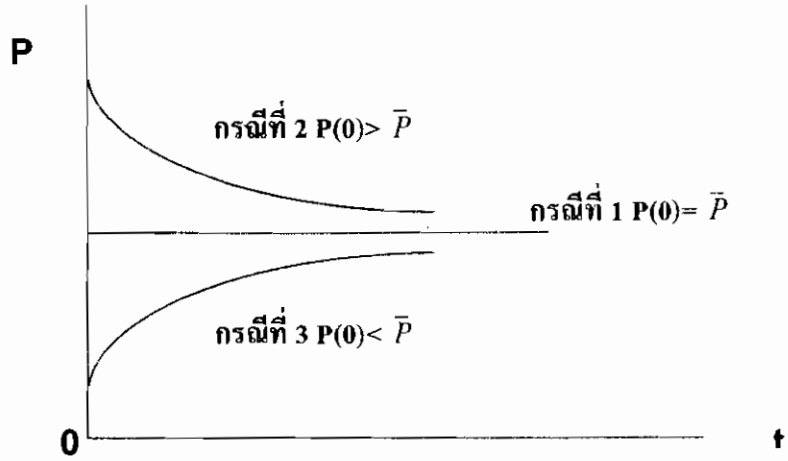
เนื่องจากสมการ (6) เป็นสมการดิฟเฟอร์เรนเชียล ซึ่งสามารถหาคำตอบโดยการแก้สมการ

จะได้ $$P(t) = \left[P(0) - \frac{a+c}{b+d}\right]e^{-\alpha(b+d)t} + \frac{a+c}{b+d} \qquad (7)$$

$$P(t) = \left[P(0) - \overline{P}\right]e^{-kt} + \overline{P}$$ กำหนดให้ $k=\alpha(b+d)$ (8)

ถ้า k > 0 จะได้ว่า $e^{-kt} \rightarrow 0$ ถ้า $t \rightarrow \infty$ นั่นคือ กาลวิถีของ Y_t จะเข้าสู่(Convergence) ดุลยภาพที่ $P_t = \overline{P}$ หมายความว่าเป็นดุลยภาพที่เสถียรภาพ ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 3 กรณี ย่อย

กรณีที่ 1 เมื่อ P(0) = $\overline{P}$ นั่นก็คือ P(t) = $\overline{P}$ กรณีนี้แนวโน้มของราคาเมื่อเวลาผ่านไป จะเป็นเส้นตรงขนานกับแกนนอนที่ระดับราคา $\overline{P}$ การเข้าสู่ดุลยภาพจะเกิดขึ้นทันที



รูปที่ 4-1

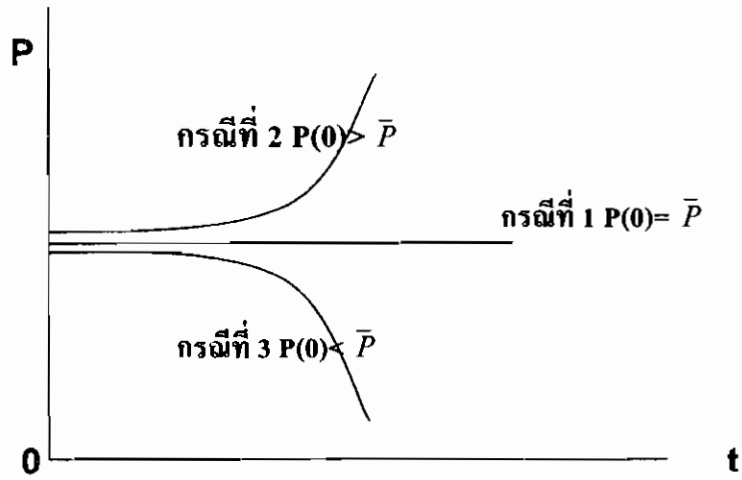
กรณีที่ 2 เมื่อ P(0) > $\bar{P}$ ดังนั้น เทอมแรกของสมการ (8) หรือ P_c จะลดลงเรื่อย ๆ เมื่อมีการเพิ่มขึ้นของระยะเวลา เนื่องจาก e^{-kt} ลดลงเรื่อย ๆ กรณีนี้แนวโน้มของราคาเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไปจะเข้าสู่ดุลยภาพดูรูปที่ 4-1

กรณีที่ 3 เมื่อ P(0) < $\bar{P}$ นั้น P_c จะมีค่าติดลบลดลงเรื่อย ๆ เมื่อเวลาผ่านไป หรือนั่นก็คือ P(t) $\rightarrow \bar{P}$ เมื่อ t $\rightarrow \infty$ ดูรูปที่ 1

ทำให้สามารถกล่าวได้ว่า ความมีเสถียรภาพของราคาดุลยภาพภายใต้สภาพพลวัต คือการที่ complementary function มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เมื่อ t $\rightarrow \infty$

ถ้า k < 0 จะได้ว่า $e^{-kt} \rightarrow \infty$ ถ้า $t \rightarrow \infty$ นั่นคือ กาลวิถีของ Y_t จะไม่สามารถเข้าสู่ (divergence) ดุลยภาพที่ $Y_t = \bar{P}$ ได้ หมายความว่า เป็นดุลยภาพที่ไม่ เสถียรภาพ
ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 3 กรณี ย่อย

กรณีที่ 1 เมื่อ P(0) = $\bar{P}$ นั่นก็คือ P(t) = $\bar{P}$ กรณีนี้แนวโน้มของราคาเมื่อเวลาผ่านไป จะเป็นเส้นตรงขนานกับแกนนอนที่ระดับราคา $\bar{P}$ การเข้าสู่ดุลยภาพจะเกิดขึ้นทันที



รูปที่ 4-2

กรณีที่ 2 เมื่อ P(0) > $\bar{P}$ ดังนั้น เทอมแรกของสมการ (8) หรือ P_c จะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อมีการเพิ่มขึ้นของระยะเวลา เนื่องจาก $[P(0) - \bar{P}]e^{-kt}$ เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ กรณีนี้แนวโน้มของราคาเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไปจะเข้าออกจากดุลยภาพดูรูปที่ 4-2

กรณีที่ 3 เมื่อ P(0) < $\bar{P}$ ดังนั้น เทอมแรกของสมการ (7) หรือ P_c จะลดลงเรื่อย ๆ เมื่อมีการเพิ่มขึ้นของระยะเวลา เนื่องจาก $[P(0) - \bar{P}]e^{-kt}$ ลดลงเรื่อย ๆ กรณีนี้แนวโน้มของราคาเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไปจะเข้าออกจากดุลยภาพดูรูปที่ 2

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8

1. จงหากาลวิถีของสมการต่อไปนี้ด้วยวิธี Iterative และวิธี General

1.1)	Y_{t+1}	=	Y_t	+	1		$(Y_0=10)$
1.2)	Y_{t+1}	=	aY_t				$(Y_0=b)$
1.3)	Y_{t+1}	+	$3Y_t$	=	4		$(Y_0=4)$
1.4)	Y_{t+1}	=	$0.2Y_t$	+	4		$(Y_0=4)$
1.5)	$2Y_{t+1}$	-	Y_t	=	6		$(Y_0=7)$

2. กาลวิถีที่หาได้จากข้อ 1 จงพิจารณาลักษณะทางเดินสู่ดุลยภาพจะเป็นเช่นไร

3. จงหา general solution และ definite solution จากสมการ differential ต่อไปนี้

3.1)	$\frac{dy}{dt}$	+	4Y	=	12	$(Y_0=2)$
3.2)	$\frac{dy}{dt}$	+	10Y	=	15	$(Y_0=0)$
3.3)	$\frac{dy}{dt}$	-	2Y	=	0	$(Y_0=9)$
3.4)	$2\frac{dy}{dt}$	+	4Y	=	6	$(Y_0=1)$

4. จงพิจารณาว่า time path ในข้อ 3 มีลักษณะทางเดินสู่ดุลยภาพอย่างไร

5. จากแบบจำลองเศรษฐศาสตร์มหภาค

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$C_t = 150 + 0.7y_{t-1}$$

กำหนดให้ $I_t = 150$ และ $Y_0 = 100$

จงหา time path ของ Y_t และ C_t และพิจารณาด้วยว่าเป็นดุลยภาพที่มีเสถียรภาพหรือไม่

6. จากแบบจำลองเศรษฐศาสตร์มหภาค

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

$$C_t = 150 + 0.7\frac{dy}{dt}$$

$$I_t = 50$$

$$G_t = 80$$

จงหา time path ของ Y_t และพิจารณาด้วยว่าเป็นดุลยภาพที่มีเสถียรภาพหรือไม่