บทที่ 8
การใช้ลิเนียร์โปรแกรมมิ่งในการวางแผนการผลิตทางเกษตร

ความนำ

ลิเนียร์โปรแกรมมิ่ง (Linear Programming) เป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ซึ่งนักบริหารนำมาใช้ในการวางแผนการผลิตที่เหมาะสมและการจัดการด้านต่าง ๆ นักคณิตศาสตร์ชื่อ George B. Dantzing เป็นผู้คิดค้นลิเนียร์โปรแกรมมิ่งโดยวิธี Simplex หลังจากนั้นได้มีการพัฒนาทางเทคนิคให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้นจนสามารถนำไปใช้ประยุกต์กับปัญหาต่าง ๆ ได้เป็นอย่างดี ลิเนียร์โปรแกรมมิ่งช่วยชี้ให้เห็นถึงทางเลือกในการผลิตและการจัดการตลอดจนเป็นหลักให้แก่ผู้ผลิตในการหาระดับการผลิตที่มีความเหมาะสมมากที่สุดภายใต้ข้อจำกัดหรือขีดจำกัด (Constraints) ต่าง ๆ เช่น ข้อจำกัดจำนวนขั้นต่ำสุดและ/หรือสูงสุดของจำนวนผลผลิตปัจจัยการผลิตหรือทรัพยากรการผลิตเป็นต้น

หัวเรื่อง

8.1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับลิเนียร์โปรแกรมมิ่ง

8.2 การหาคำตอบโดยวิธีกราฟ

8.3 การหาคำตอบโดยวิธี Simplex

สาระสำคัญ

8.1 ส่วนประกอบที่สำคัญของลิเนียร์โปรแกรมมีอยู่ 3 ส่วนด้วยกัน คือ เป้าหมาย ข้อกำหนดหรือข้อจำกัด และทางเลือกกิจกรรม

8.2 ในการหาระดับผลผลิตหรือปัจจัยในการผลิตที่เหมาะสม (ให้กำไรสูงสุดหรือเสียต้นทุนในการผลิตต่ำ) และเป็นไปตามข้อกำหนด สามารถหาได้จากวิธีกราฟ แต่วิธีกราฟนั้นจำกัดอยู่เฉพาะปัญหาที่มีตัวแปรอยู่เพียง 2-3 ชนิดเท่านั้น

8.3 ในกรณีที่มีตัวแปรมากกว่า 2 ชนิดขึ้นไป เราสามารถหาระดับการผลิตที่เหมาะสมได้โดยวิธี Simplex ซึ่งเป็นการคำนวณอย่างง่าย ๆ และสามารถใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ช่วยในการหาคำตอบได้ด้วย

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทที่ 8 จบแล้ว นักศึกษาสามารถ

8.1 บอกถึงลักษณะและรูปแบบของลิเนียร์โปรแกรมมิ่งได้

8.2 หาระดับการผลิตที่มีความเหมาะสมที่สุดภายใต้ข้อจำกัดต่างๆโดยวิธีกราฟและโดยวิธี Simplex

8.1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับลิเนียร์โปรแกรมมิ่ง

(8.1.1) ลักษณะของลิเนียร์โปรแกรมมิ่งที่สำคัญ

(1) มีเป้าหมายในการวางแผนการผลิตอย่างแน่ชัดและวัดค่าได้แน่นอน นั่นคือ ควรวางแผนการผลิตและการจัดการอย่างไรจึงจะได้รับกำไรสูงสุด หรือเสียต้นทุนต่ำสุด โดยให้สอดคล้องและเหมาะสมกับปัญหานั้นๆ ลิเนียร์โปรแกรมมิ่งเป็นเทคนิคในการแสวงหาคำตอบที่ดีที่สุด (Best Solution) เพื่อให้เป็นไปตามเป้าหมายที่วางไว้

(2) มีข้อกำหนดหรือข้อจำกัดหรือเงื่อนไขในการผลิตไว้อย่างแน่ชัดและสามารถวัดค่าได้ ซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ประเภท คือ

(2.1) ข้อกำหนดหรือข้อจำกัดขั้นต่ำสุด หมายถึง ข้อกำหนดจำนวนหรือคุณภาพขั้นต่ำสุดของปัจจัยและผลผลิตในปัญหานั้นๆ เช่น ฟาร์มแห่งหนึ่งต้องการใช้ที่ดินปลูกข้าวอย่างน้อย 12 ไร่ หรือมีความต้องการสินค้าชนิดหนึ่งอย่างน้อย 150 กิโลกรัม เป็นต้น จำนวนของที่ดินปลูกข้าวและความต้องการสินค้าในลักษณะนี้ถือว่าเป็นข้อจำกัดขั้นต่ำสุด และมักจะเป็นข้อจำกัดของปัญหาที่ต้องการเสียต้นทุนน้อยที่สุด

(2.2) ข้อกำหนดหรือข้อจำกัดขั้นสูงสุด หมายถึง ข้อกำหนดจำนวนหรือคุณภาพขั้นสูงสุดของปัจจัยและผลผลิต เช่น ฟาร์มแห่งหนึ่งมีที่ดินอยู่ 20 ไร่ มีแรงงานครอบครัวอยู่ 240 ชั่วโมงการทำงาน/ฤดู และมีเงินทุนอยู่ 10,000 บาท เป็นต้น เหล่านี้ถือว่าเป็นข้อจำกัดจำนวนสูงสุดของปัจจัยการผลิตต่างๆ ที่ฟาร์มนี้จะนำเอามาใช้ทำการผลิตได้ ข้อจำกัดในลักษณะเช่นนี้ส่วนใหญ่แล้วจะเป็นข้อจำกัดของปัญหาที่ต้องการได้กำไรสูงสุด

(2.3) ข้อกำหนดหรือข้อจำกัดเท่า หมายถึง ข้อกำหนดจำนวนหรือคุณภาพของปัจจัยและผลผลิตให้เท่ากับจำนวนคงที่จำนวนหนึ่ง เช่นกำหนดให้ปลูกข้าวเป็นจำนวน 10 ถัง เป็นต้น

(3) มีทางเลือกปฏิบัติในการผลิตได้หลายทางจากข้อจำกัดหรือข้อกำหนดที่มีอยู่นั้น เช่น จากข้อจำกัดของปัจจัยในตัวอย่างข้างต้น หากสามารถใช้ทำการเพาะปลูกข้าวโพด ฝ้าย และถั่วลิสงได้ ดังนั้นฟาร์มนี้อาจปลูกข้าวโพด หรือ ฝ้าย หรือถั่วลิสง เพียงอย่างเดียว หรือปลูกพืชเหล่านี้ร่วมกันก็ได้ ตามสถานการณ์ที่กล่าวมานี้แสดงว่าจากข้อจำกัดหรือข้อกำหนดต่างๆ ที่มีอยู่นั้น มีทางเลือกทำการผลิตและจัดการได้หลายทาง และจากทางเลือกต่างๆ ที่มีอยู่นี้ วิธีลิเนียร์โปรแกรมมิ่งจะบอกให้ทราบได้ว่าทางเลือกใดสามารถบรรลุตามเป้าหมายที่วางไว้ได้

(8.1.2) ข้อสมมุติของลิเนียร์โปรแกรมมิ่ง เพื่อให้วิธีลิเนียร์โปรแกรมมิ่งสามารถวิเคราะห์คำตอบที่ต้องการได้ จึงได้กำหนดข้อสมมุติต่างๆ ไว้ดังนี้

1. **Linearity**หมายความว่าความสัมพันธ์ระหว่างข้อจำกัดหรือข้อกำหนด (constraints) เกี่ยวกับการผลิต เป็นแบบเส้นตรงหรือมีอัตราส่วนคงที่ เช่น ผลตอบแทนทั้งหมด หรือ กำไรจากการผลิตสินค้าเป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลผลิต ถ้าผลิตข้าวโพด 2 ตัน ได้รับกำไรสุทธิเท่ากับ $2 \times 1,000 = 2,000$ บาท ถ้าผลิตข้าวโพดได้ 5 ตัน ก็ได้กำไรสุทธิเท่ากับ $5 \times 1,000 = 5,000$ บาท หรือการใช้ปัจจัยในการผลิตแต่ละอย่างเป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลผลิต ซึ่งแสดงถึงผลตอบแทนต่อขนาดแบบคงที่ (constant return to scale)

2. **Additivity** หมายความว่า ปัจจัยการผลิตหรือผลผลิตแต่ละชนิดไม่มีความสัมพันธ์ต่อกัน เป็นอิสระซึ่งกันและกัน ดังนั้นกำไรทั้งหมดของการผลิตสินค้า 2 ชนิด จึงเท่ากับผลบวกของกำไรที่ได้จากการผลิตสินค้าแต่ละอย่าง เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงในผลผลิตชนิดหนึ่งจะไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อผลผลิตอีกชนิดหนึ่ง

3. **Divisibility** หมายความว่า ปัจจัยการผลิตหรือสามารถเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นหรือลดลงในหน่วยย่อยๆ นั้นได้ หรือปรากฏเป็นเศษส่วนได้ ทั้งนี้เพื่อให้แผนการผลิตและการจัดการที่วางไว้สามารถให้กำไรสูงสุดหรือเสียต้นทุนต่ำสุดตามวัตถุประสงค์ที่วางไว้ได้ เช่น เพื่อให้ได้กำไรสูงสุด ควรผลิตแตงโมจำนวน 405.72 ผล และผลผลิตฟักทองจำนวน 80.41 ผล โดยจะต้องจัดสรรแรงงานจ้างจำนวน 28.01 ชั่วโมง และ 17.88 ชั่วโมง ไปผลิตพืชทั้งสองตามลำดับ ซึ่งในความเป็นจริงย่อมเป็นไปไม่ได้หรือเป็นไปได้ยากมากที่จะผลิตหรือจัดหาปัจจัยมาใช้ในหน่วยย่อยๆ ตรงตามแผนการผลิตที่กำหนดขึ้น

4. **Certainty** หมายความว่า ความสัมพันธ์ระหว่างข้อจำกัดกับกิจกรรมการผลิตต่างๆ ตลอดจนราคาหรือผลตอบแทนของปัจจัยและของผลผลิตต้องมีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงในระยะเวลาที่ทำการศึกษาวางแผนการผลิต

(8.1.3) รูปแบบทั่วไปของลิเนียร์โปรแกรมมิ่งในทางคณิตศาสตร์ รูปแบบทางคณิตศาสตร์ในปัญหาลิเนียร์โปรแกรมมิ่งประกอบขึ้นด้วยส่วนประกอบ 2 ส่วน คือ

1. ส่วนที่แสดงวัตถุประสงค์หรือเป้าหมายของปัญหา

2. ส่วนที่แสดงข้อจำกัดหรือข้อกำหนดต่างๆ ของปัญหาหรือเรียกว่า ฟังก์ชั่นข้อจำกัด (constraint function)

วัตถุประสงค์ของปัญหาในลิเนียร์โปรแกรมมิ่ง คือ ต้องการได้กำไรสูงสุด (maximize function)และต้องการเสียต้นทุนน้อยที่สุด(minimize cost) ดังนั้นรูปแบบทั่วไปทางคณิตศาสตร์ของปัญหาลิเนียร์โปรแกรมมิ่ง จึงมีอยู่ 2 แบบ ดังนี้

1. รูปแบบทั่วไปสำหรับเป้าหมายที่ต้องการได้กำไรสูงสุด

สมการเป้าหมาย (Objective Function)

(Max) $Z = P_1X_1 + P_2X_2 + \ldots\ldots\ldots + P_nX_n$

ภายใต้ข้อจำกัด (subject to)

(1) $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n \leq b_1$

(2) $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \leq b_2$

. . . .

. . . .

. . . .

(m) $a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n \leq b_n$

(m+1) Non-Negativity $X_1, X_2, \ldots, X_n \leq 0$

(Max) $Z = \sum_{j=1}^{n} P_j X_j$

ภายใต้ข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j \leq b_j$ (i = 1,2….,m)

$X_j \geq 0$ (i = 1,2,….,n)

ซึ่ง Z หมายถึง ยอดรวมของกำไรสุทธิหรือรายได้สุทธิในการทำกิจกรรมต่างๆ

X_j หมายถึง จำนวนกิจกรรมการผลิตชนิดที่ j

P_j หมายถึง กำไรสุทธิหรือรายได้สุทธิต่อหน่วยของกิจกรรมชนิดที่ j

a_{ij} หมายถึง จำนวนปัจจัยหรือข้อจำกัดชนิดที่ i ที่ต้องการใช้หรือมีขึ้นเนื่องจากการทำกิจกรรมชนิดที่ j จำนวนหนึ่งหน่วย

P_jX_j หมายถึง กำไรสุทธิหรือรายได้สุทธิรวมเนื่องจากการทำกิจกรรมชนิดที่ j

$a_{ij}X_j$ หมายถึง จำนวนของปัจจัยหรือข้อจำกัดชนิดที่ i ที่ต้องการใช้หรือมีขึ้นในการทำกิจกรรมชนิดที่ j

b_I หมายถึง จำนวนรวมของปัจจัยหรือข้อจำกัดชนิดที่ I

2. รูปแบบทั่วไปสำหรับเป้าหมายที่ต้องการเสียต้นทุนน้อยที่สุด

สมการเป้าหมาย (Objective Function)

(Min) $C = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots C_nX_n$

ภายใต้ข้อจำกัด (subject to)

$$
\begin{array}{llcl}
(1) & b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + \dots + b_{1n}X_n & \geq & d_1 \\
(2) & b_{21}X_1 + b_{22}X_2 + \dots + b_{1n}X_n & \geq & d_2 \\
 & .. \quad .. \quad .. \quad .. & .. & .. \\
(m) & b_{m1}X_1 + b_{m2}X_2 + \dots + b_{mn}X_n & \geq & d_n
\end{array}
$$

(m+1) Non Negativity $X_1, X_2, \dots X_n \geq 0$

$$(\text{Min}) \quad C = \sum_{j=1}^{n} C_J X_J$$

ภายใต้ข้อจำกัด $\sum B_{IJ} X_J \geq d_j$ (i.= 1,2,…, m)

$$X_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,\dots, m)$$

โดยกำหนดให้ C หมายถึง ยอดรวมของต้นทุนในการทำกิจกรรมต่างๆ

X_j หมายถึง จำนวนกิจกรรมการผลิตชนิดที่ j

C_j หมายถึง ต้นทุนต่อหน่วยของกิจกรรมชนิดที่ j

b_{ij} หมายถึง จำนวนข้อจำกัดหรือข้อกำหนดชนิดที่ i ต้องการหรือมีขึ้นเนื่องจาก การทำกิจกรรมชนิดที่ j เป็นจำนวนหนึ่งหน่วย

d_j หมายถึง จำนวนจำกัดของข้อกำหนดหรือข้อจำกัดชนิดที่ j

C_jX_j หมายถึง ต้นทุนรวมเนื่องจากการทำกิจกรรมชนิดที่ j

$b_{ij}X_j$ หมายถึง จำนวนรวมของข้อจำกัดหรือข้อกำหนดชนิดที่ i ที่ต้องการหรือมีขึ้นเนื่องจากการทำกิจกรรมชนิดที่ j

ตัวอย่างของปัญหาการผลิตโดยใช้วิธีลิเนียร์โปรแกรมมิ่ง

สมมุติว่าบริษัท เอ ผลิตสินค้า 2 อย่าง คือ นาฬิกา และวิทยุ โดยมีขั้นตอนการผลิต 3 ขั้น คือ การประกอบเครื่อง การประกอบชิ้นส่วน และการบรรจุกล่อง บริษัทจำหน่ายนาฬิกาในราคาเรือนละ 60 บาท และจำหน่ายวิทยุในราคาเครื่องละ 50 บาท

ในการผลิตนาฬิกาแต่ละเรือนต้องใช้เวลาในการประกอบเครื่อง 1 ชั่วโมง ใช้เวลาในการประกอบชิ้นส่วน 5 ชั่วโมง และใช้เวลาในการบรรจุกล่อง 6 ชั่วโมง ในการผลิตวิทยุต้องใช้เวลาในการประกอบเครื่อง 5 ชั่วโมง ใช้เวลาในการประกอบชิ้นส่วน 10 ชั่วโมง และใช้เวลาในการบรรจุกล่อง 9 ชั่วโมง แต่เวลาทำงานเต็มที่ในการประกอบเครื่องเท่ากับ 40 ชั่วโมง และใช้

Choice Variables and Objective Function

ผู้ผลิตต้องการทราบว่า ควรจะผลิตนาฬิกาและวิทยุจำนวนเท่าไรจึงจะได้รับกำไรสูงสุด สิ่งที่เรายังไม่ทราบ คือ จำนวนนาฬิกาและวิทยุที่จะถูกผลิต ซึ่งเรียกว่า choice variables เพราะแสดงถึงผลผลิตระดับต่างๆ ที่ผู้ผลิตจะต้องเลือก โดยสมมุติให้ X_1 คือ จำนวนนาฬิกาที่จะถูกผลิต X_2 คือ จำนวนวิทยุที่จะถูกผลิต ผู้ผลิตต้องการได้ผลตอบแทนหรือกำไรสูงสุด ซึ่งผลตอบแทนทั้งหมดคือ ผลบวกของผลตอบแทนที่ได้จากการผลิตนาฬิกาและผลตอบแทนที่ได้จากการผลิตวิทยุ

นาฬิกาแต่ละเรือนให้ผลตอบแทนเท่ากับ 60 บาท ถ้านำเอาผลตอบแทนนี้ไปคูณกับจำนวนนาฬิกา (X_1) ก็จะได้ผลตอบแทนจากการผลิตนาฬิกาจำนวนนั้น และในทำนองเดียวกันผลตอบแทนจากการผลิตวิทยุ ซึ่งสามรรถเขียนออกได้ดังนี้

$60X_1$ คือ ผลตอบแทนที่ได้จากการผลิตนาฬิกา

$50X_2$ คือ ผลตอบแทนที่ได้จากการผลิตวิทยุ

เมื่อนำเอาผลตอบแทนจากการผลิตสินค้าทั้งสองชนิดมารวมกัน จะได้ผลตอบแทนทั้งหมดที่ผู้ผลิตต้องการจะได้รับสูงสุด ซึ่งเขียนเป็นสมการเป้าหมายได้ดังนี้

$$(\text{Max}) \quad 60X_1 + 50X_2 = Z$$

จากสมการเป้าหมายเราสามารถบอกได้ว่า ผลตอบแทนทั้งหมดเป็นเท่าไร จากการผลิตนาฬิกาและวิทยุจำนวนต่างๆ กัน เช่น ถ้าผลิตวิทยุ 1 เครื่อง และนาฬิกา 5 เรือน ผลตอบแทนทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับ (60)(5) + (50)(1) = 350 แต่จากคำตอบนี้ ยังบอกไม่ได้ว่า การผลิตสินค้า 2 อย่าง ณ ระดับนั้นจะเป็นไปได้หรือไม่ (feasible) เพราะต้องนำเอาข้อจำกัดหรือข้อกำหนดต่างๆ เข้ามาพิจารณาด้วย และระดับการผลิตนั้นจะให้กำไรสูงสุดหรือไม่

The Constraint Inequalities

จากที่ได้กล่าวไปแล้ว ขั้นตอนการผลิตวิยุและนาฬิกามีอยู่ 3 ขั้น และแต่ละขั้นมีเวลาทำงานอยู่จำนวนหนึ่ง และในการผลิตสินค้าแต่ละอย่างใช้เวลาในการผลิตแต่ละขั้นตอนแตกต่างกันด้วย เช่น เวลาที่ใช้ในการประกอบเครื่องมีเต็มที่ 40 ชั่วโมง ซึ่งเขียนออกมาเป็นสมการได้ดังนี้

(จำนวนชั่วโมงในการประกอบนาฬิกา) + (จำนวนชั่วโมงในการประกอบวิทยุ) $\leq$ 40

จงสังเกตเครื่องหมายไม่เท่ากัน ($\leq$ คือน้อยกว่าหรือเท่ากับ) แสดงว่า ผู้ผลิตไม่จำเป็นต้องใช้ชั่วโมงในการประกอบวิทยุและนาฬิกาทั้งหมด 40 ชั่วโมง เพียงแต่ใช้เวลาในการประกอบเครื่องในช่วงระหว่าง 0-40 ชั่วโมง เครื่องหมายไม่เท่ากันเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงข้อจำกัดที่ไม่ได้บ่งไว้อย่างชัดแจ้ง

ในการประกอบนาฬิกาแต่ละเรือนใช้เวลาเท่ากับ 10 ชั่วโมง ถ้าผลิตนาฬิกา 2 เรือน แสดงว่าใช้เวลาเท่ากับ 20 ชั่วโมง ฉะนั้นเราสามารถเขียนออกมาได้เป็นจำนวนชั่วโมงที่ใช้ในการประกอบนาฬิกา ณ ระดับการผลิตต่างๆ ได้ดังนี้

$10X_1$ คือ จำนวนชั่วโมงในการประกอบนาฬิกา

ถ้าผลิตนาฬิกา 5 เรือน ใช้เวลาในการประกอบเครื่องเท่ากับ 50 ชั่วโมง ซึ่งหาได้จากการเอา 5 แทนค่าลงไปในค่า X_1

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหาจำนวนชั่วโมงในการประกอบวิทยุ ณ ระดับการผลิตต่างๆ ได้ดังนี้

$5X_2$ คือ จำนวนชั่วโมงในการประกอบวิทยุ

เมื่อนำเอาจำนวนชั่วโมงในการประกอบนาฬิกาและวิทยุมารวมกันจะได้

$$10X_1 + 5X_2 \leq 40$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหาข้อจำกัดของเวลาทำงานในการประกอบชิ้นส่วนและบรรจุกล่องของสินค้า 2 อย่างได้ดังนี้

$$5X_1 + 10X_2 \leq 50$$

$$6X_1 + 9X_2 \leq 90$$

กิจกรรมที่ 8.1

ข้อความต่อไปนี้ตรงกับข้อสมมุติฐานข้อใดในลิเนียร์โปรแกรมมิ่ง

(ก) ในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง อัตราการเพิ่มขึ้นของผลผลิตทั้งหมดเท่ากับอัตราการเพิ่มขึ้นของการใช้ปัจจัย

(ข) เมื่อการผลิตข้าวโพดเปลี่ยนแปลงไป ไม่มีผลกระทบต่อการผลิตข้าวฟ่าง

(ค) ระดับการใช้ปัจจัยที่เหมาะสม คือ ปัจจัย X_1 เท่ากับ 2.4 หน่วย และใช้ปัจจัย X_2 เท่ากับ 5.1 หน่วย

(ง) ระดับการใช้ปัจจัยการผลิตเป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลผลิต

(จ) ราคาและเทคนิคการผลิตถูกกำหนดให้คงที่

(ฉ) สินค้าสองชนิดที่ถูกผลิตขึ้นนั้นมีลักษณะเสริมกัน

(ช) ผู้ผลิตจะไม่ทำการผลิตหรือใช้ปัจจัยในระดับที่ต่ำกว่าศูนย์

แนวตอบกิจกรรมที่ 8.1

(ก)	Linearity	(ข)	Additivity	(ค)	Divisibility
(ง)	Linearity	(จ)	Certainty	(ฉ)	Additivity
(ช)	Non-Negativity				

8.2 การหาคำตอบจากปัญหาลิเนียร์โปรแกรมมิ่งโดยวิธีกราฟ

เราเริ่มด้วยพิจาณาปัญหาเกี่ยวกับการผลิตนาฬิกาและวิทยุ โดยพิจารณา Non Negativity constraint ก่อน ซึ่งระบุว่า X_1, $X_2 \geq 0$ เพราะฉะนั้นในการวางรูปกราฟทั้งหมดจะต้องปรากฏใน Quadrant ที่ 1 ซึ่งแสดงว่า ค่าของ X_1 และ X_2 จะต้องเป็นบวกเสมอ จาก constraint ที่ 1: $10X_1 + 5X_2 \leq 40$ ในการที่จะพล็อตกราฟ constraint นี้ได้ จะต้องเปลี่ยนรูปอสมการ (Inequality) เป็นรูปสมการ (Equation) เสียก่อน นั่นคือ $10X_1 + 5X_2 = 40$ ในการหา intercept ของแกน X_1 กำหนดให้ $X_2 = 0$ ซึ่งจะได้ $X_1 = 4$ ดังนั้น ถ้าผลิตนาฬิกาอย่างเดียวจะผลิตได้ 4 เรือนจากการใช้ชั่วโมงการทำงานที่มีอยู่ทั้งหมดในการประกอบเครื่อง สำหรับ intercept ของแกน X_2 ก็หาได้โดยการกำหนดให้ $X_1 = 0$ ซึ่งจะได้ $X_2 = 8$ เมื่อเราได้ intercept ของทั้งแกน X_1 และ X_2 แล้วเชื่อมจุดทั้งสองจะได้เส้นตรง CD

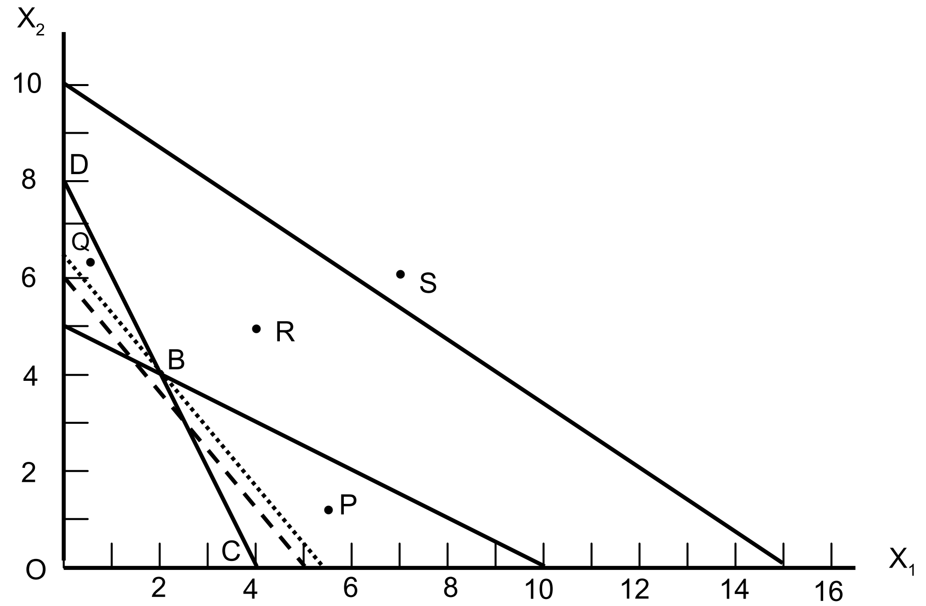
จุดต่างๆ บนเส้น $10X_2 + 5X_2 = 40$ แสดงถึงจำนวนต่างๆ ของวิทยุและนาฬิกาที่ถูกผลิตขึ้นจากการใช้เวลาในการประกอบเครื่องทั้งหมด 40 ชั่วโมง สำหรับจำนวนการผลิตต่างๆ ของวิทยุและนาฬิกาที่ใช้เวลาในการประกอบเครื่องน้อยกว่า 40 ชั่วโมง คือ บริเวณพื้นที่ OCD ดังนั้นเส้นตรง CD บวกกับพื้นที่ OCD แสดงถึง constraint inequality จุดต่างๆ บนเส้นหรือใต้เส้นตรง CD หมายถึงจำนวนผลผลิต 2 อย่างที่สามารถจะถูกผลิตขึ้นได้ตาม constraint แต่จุดใดๆ ที่อยู่เหนือเส้น CD ถือว่าเป็นไปไม่ได้เนื่องจากชั่วโมงการทำงานไม่พอเพียง เราสามารถหาเส้น constraint เส้นอื่นๆ ได้ในทำนองเดียวกัน ดังแสดงในรูป 8.1

Combining Constraints (The Feasible Region)

เมื่อเอา constraint ทั้งสามอันมารวมในรูปกราฟเดียวกัน เราจะได้ระดับการผลิตต่างๆที่เป็นไปได้ จุดใดๆ ก็ตามที่จะเป็นไปตามข้อกำหนดทั้งสามต้องอยู่ทางซ้ายมือของเส้นตรงเหล่านั้น ดังนั้นระดับการผลิตที่เป็นไปได้ (feasible solution) คือ จุดต่างๆ ในบริเวณ

รูป 8.1

ระดับการผลิตที่เหมาะสมกรณี Maximization



ทำไมพื้นที่ OABC จึงเป็นบริเวณการผลิตที่เป็นไปได้ ให้พิจารณาดูที่จุด P การผลิตสินค้าทั้งสองอย่าง ณ จุดนี้เป็นไปไม่ได้เพราะมันอยู่นอกบริเวณการผลิตที่เป็นไปได้ และอยู่ทางขวามือของ constraint ที่ 1 แสดงว่า ชั่วโมงการประกอบเครื่องไม่พอเพียงในการผลิต ส่วนจุด Q ก็เป็นจุดการผลิตที่เป็นไปไม่ได้เพราะจุดนี้อยู่ทางขวามือของเส้น constraint ที่ 3 แสดงว่าชั่วโมงการประกอบชิ้นส่วนไม่พอเพียง สำหรับจุด R และ S ก็เป็นไปไม่ได้เช่นกัน เพราะเป็นจุดที่อยู่นอกบริเวณการผลิตที่เป็นไปได้

การใช้สมการเป้าหมายเพื่อหาคำตอบที่ดีที่สุด

ในบริเวณการผลิตที่เป็นไปได้นั้น มีระดับการผลิตที่เป็นไปได้อยู่หลายจุดมากมาย แต่จะมีอยู่เพียงจุดเดียวที่เป็นจุดแสดงระดับการผลิตที่เหมาะสม (Optimal Solution) ซึ่งโดยทั่วไปตามหลักของลิเนียร์โปรแกรมมิ่ง จุดการผลิตที่เหมาะสมมักจะอยู่ที่จุดมุมของบริเวณการผลิตที่เป็นไปได้การใช้สมการเป้าหมายเป็นเครื่องมือในการหาระดับการผลิตที่เหมาะสมมีอยู่ 2 วิธี คือ

(1) Calculation Method ที่จุด A บนแกน X_2 แสดงว่า ผลิตวิทยุ 5 เครื่อง และไม่ผลิตนาฬิกาเลย จุด C บนแกน X_1 แสดงว่า ผลิตนาฬิกา 4 เรือน และไม่ผลิตวิทยุเลย และจุด B เป็นจุดตัดกันระหว่าง constraint ที่ 1 และที่ 2 หมายความว่า จุด B เป็นจุดเดียวที่ใช้เวลาในการประกอบเครื่องประกอบชิ้นส่วนอย่างเต็มที่ ในการผลิตนาฬิกา 2 เรือน และวิทยุ 4 เครื่อง หรืออาจหาจำนวนการผลิตนาฬิกาและวิทยุได้จากการ solve สมการ 2 อัน ดังนี้

	$10X_1 + 5X_2$	=	40	....(1)
	$5X_1 + 10X_2$	=	50	....(2)
(1) × 2	$20X_1 + 10X_2$	=	80	....(3)
(2) – (3)	$15X_1$	=	30	
	X_1	=	2	
แทนค่า X_1 ใน (2)	$5(2) + 10X_2$	=	50	
	$10X_2$	=	40	
	X_2	=	4	

เพราะฉะนั้น เราก็ทราบว่า ณ จุด B หมายถึง ผลิตนาฬิกา (X_1) เท่ากับ 2 และวิทยุ (X_2) เท่ากับ 4

เรากลับมาย้อนดูสมการเป้าหมาย ซึ่งบอกถึงผลตอบแทนทั้งหมดที่ได้รับจากการผลิตวิทยุและนาฬิกาจำนวนหนึ่ง ถ้าเรานำเอาค่าของ X_1 และ X_2 ไปแทนในสมการเป้าหมาย จะได้ค่าของผลตอบแทนหรือกำไรทั้งหมด ดังนี้

ที่จุด A วิทยุ 5 เครื่อง นาฬิกา 0 เรือน

$$60X_1 + 50X_2 = Z$$

$$60(0) + 50(5) = Z$$

ฉะนั้น ผลตอบแทนทั้งหมดเท่ากับ 250 บาท

ที่จุด C วิทยุ 0 เครื่อง นาฬิกา 4 เรือน

$$60(4) + 50(0) = Z$$

ฉะนั้น ผลตอบแทนทั้งหมดเท่ากับ 240 บาท

ที่จุด B วิทยุ 4 เครื่อง นาฬิกา 2 เรือน

$$60(2) + 50(4) = Z$$

ฉะนั้น ผลตอบแทนทั้งหมดเท่ากับ 320 บาท

ดังนั้น สรุปได้ว่า จุด B เป็นจุดการผลิตที่เหมาะสมเพราะให้ตอบแทนทั้งหมดสูงสุดเท่ากับ 320 บาท

(2) The Slope Method คือ การใช้ความลาดชันของสมการเป้าหมายเพื่อหาระดับการผลิตที่เหมาะสมโดยการแสดงเส้น constraint ต่างๆ และเส้นของสมการเป้าหมายในรูปเดียวกัน แต่เนื่องจากไม่ทราบค่าทางขวามือของสมการเป้าหมาย จึงต้องสมมุติค่าทางขวามือของสมการเป้า หมายขึ้น ซึ่งจะทำให้ได้ค่า intercept ของแกน X_1 และ X_2 ให้เชื่อมค่า intercept ของทั้งสองแกนเข้าด้วยกันจะได้เส้นตรง จากรูป 8.2 ได้เส้นตรง 3 เส้น คือเส้น A,B และ C ซึ่งแสดงผลตอบแทนทั้งหมดเท่ากับ 200, 320 และ 400 ตามลำดับ และทุกๆ จุดบนเส้นแต่ละเส้นจะให้ผลตอบแทนเท่ากัน เราเรียกเส้นเหล่านี้ว่า เส้นผลตอบแทนเท่ากัน (Iso-Contribution Line) หรืออาจหาเส้นของสมการเป้าหมายได้อีกวิธีหนึ่ง ดังนี้

จากสูตรทั่วไปของสมการเส้นตรง

$$Y = a + bX$$

$$b = \text{slope} \qquad a = \text{intercept}$$

เราจัดสมการเป้าหมายให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปของสมการเส้นตรง ดังนี้

$$X_2 = \frac{Z}{50} - \frac{60}{50}X_1$$

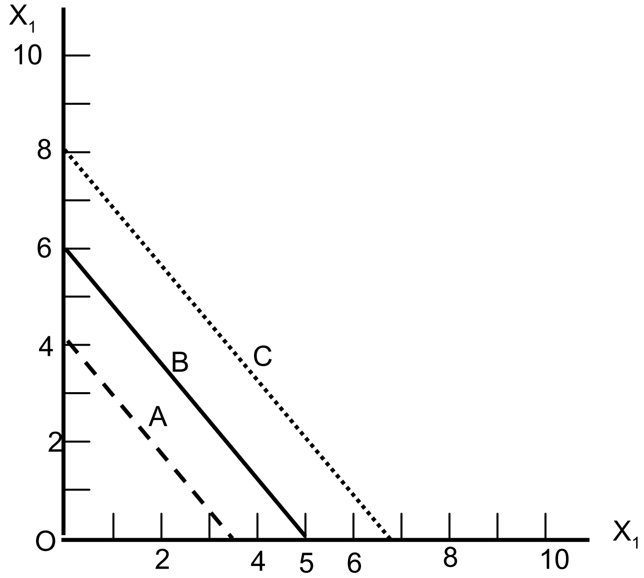
ซึ่งให้ค่าความลาดชัน (slope) ของสมการเป้าหมายเท่ากับ 6/5 หมายความว่า จะต้องผลิตวิทยุ 6 เครื่อง และนาฬิกา 5 เรือน จึงจะได้ผลตอบแทนเท่ากัน

จากรูป 8.2 เส้นผลตอบแทนเท่ากับทั้งสามเส้นขนานกัน เพราะมีค่าความลาดชันเท่ากัน เส้นที่อยู่เหนือขึ้นไปแสดงว่าผลตอบแทนทั้งหมดมีค่ามากกว่า

เมื่อเราได้เส้นผลตอบแทนเท่ากันที่มีค่าความลาดชันเท่ากับ - 6/5 และนำไปรวมกับเส้น Iso-contribution ต่างๆ ในรูป 8.1 จะเห็นว่า เส้นผลตอบแทนเท่ากันเส้นหนึ่งสัมผัสกับบริเวณการผลิตที่เป็นไปได้ที่จุด B ซึ่งแสดงถึงระดับการผลิตที่เหมาะสม

รูป 8.2

เส้นผลตอบแทนเท่ากัน

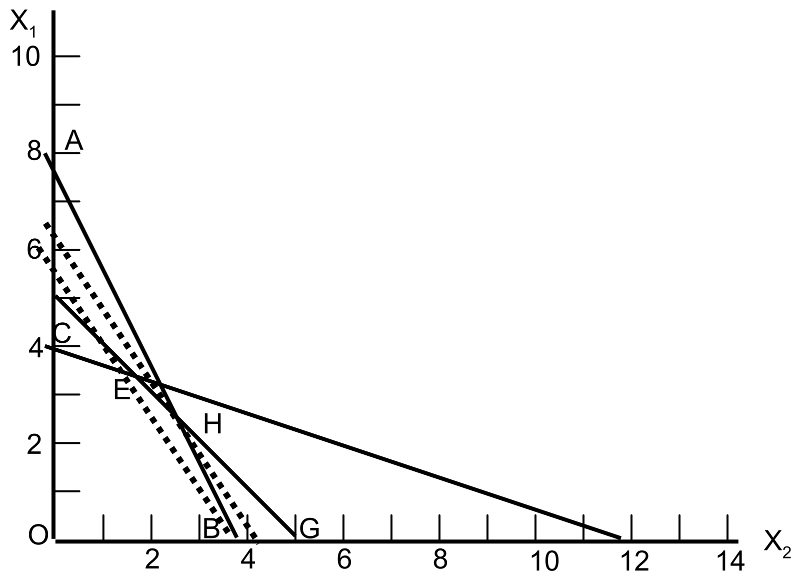


ตัวอย่างการผลิตเพื่อแสวงหากำไรสูงสุด

สมมุติว่าเกษตรกรทำการเพาะปลูกข้าวสาลีและข้าวบาร์เลย์ โดยมีข้อจำกัดว่า มีที่ดินที่ใช้ทำการเพาะปลูกทั้งหมด 8 เอเคอร์ ส่วนแรงงานทำงานได้เต็มที่เพียง 12 ชั่วโมงการทำงาน และมีปุ๋ยทั้งสิ้นจำนวน 5 หน่วย ในการผลิตข้าวสาลีจำนวน 1 ถัง ต้องใช้แรงงานทำงาน 3 ชั่วโมงทำงาน ใช้ที่ดิน 1 เอเคอร์ และใช้ปุ๋ย 1 หน่วย ในการผลิตข้าวบาร์เลย์จำนวน 1 ถัง ต้องใช้แรงงานทำงาน 1 ชั่วโมงการทำงาน ใช้ที่ดิน 2 เอเคอร์ และใช้ปุ๋ย 1 หน่วย เกษตรกรขายข้าวสาลีได้รายได้สุทธิถึงละ 4 บาท และขายข้าวบาร์เลย์ได้รายได้สุทธิถังละ 6 บาท จากตัวอย่างนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบทั่วไปของลิเนียร์โปรแกรมมิ่งได้ดังนี้

สมการเป้าหมาย: (Max)	$4X_1 + 6X_2$	$=$	Z
ขึ้นอยู่กับ:-			
(1) ที่ดิน	$1X_1 + 2X_2$	$\leq$	8
(2) แรงงาน	$3X_1 + 1X_2$	$\leq$	12
(3) ปุ๋ย	$1X_1 + 1X_2$	$\leq$	5
(4) Non-Negativity	X_1,X_2	$\geq$	0

รูป 8.3
บริเวณการผลิตที่เป็นไปได้ (Feasible Region)



เมื่อนำเอาสมการเป้าหมายและข้อกำหนดทั้งสามมาพล็อตกราฟ จะได้เส้นทั้งสามเส้น และเส้นผลตอบแทนเท่ากับ 1 เส้น บริเวณการผลิตที่เป็นไปได้ คือ พื้นที่ OCEHB เส้นผลตอบแทนเท่ากันสัมผัสบริเวณการผลิตที่เป็นไปได้ที่จุด H ดังนั้นจุด H คือ จุดการผลิตที่เหมาะสมซึ่งเกษตรกรได้รับกำไรสูงสุดจากการผลิตข้าวสาลี (X_1) จำนวน 2 ถังและข้าวบาร์เลย์ (X_2) จำนวน 3 ถัง โดยได้กำไรทั้งหมดเท่ากับ 26 บาทต่อถัง

ตัวอย่างการผลิตโดยเสียต้นทุนน้อยที่สุด

โรงงานผลิตอาหารสัตว์สำเร็จรูปแห่งหนึ่ง ใช้ส่วนผสม 2 อย่างในการผลิต คือ ข้าวโพดป่น (X_1) และปลาป่น (X_2) เพื่อผลิตอาหารสัตว์ผสมให้ได้คุณค่าทางอาหารตามที่กระทรวงอุตสาหกรรมกำหนดไว้ว่า ในอาหารสัตว์สำเร็จรูปจำนวน 1 กิโลกรัม ต้องประกอบไปด้วยโปรทีน(Protein) 4 หน่วย ไขมัน(Fat) อย่างน้อย 6 หน่วย และเส้นใย(Fiber) อย่างน้อย 14 หน่วย ในข้าวโพดป่น จำนวน 1 กิโลกรัม ประกอบไปด้วยโปรทีนจำนวน 1 หน่วย ไขมันจำนวน 1 หน่วย และเส้นใย จำนวน 7 หน่วย ส่วนในปลาป่นจำนวน 1 กิโลกรัม ประกอบไปด้วยโปรทีนจำนวน 1 หน่วย และไขมันจำนวน 3 หน่วย ต้นทุนในการซื้อข้าวโพดป่นเท่ากับ 3 บาทต่อกิโลกรัม และปลาป่นเท่ากับ 5 บาทต่อกิโลกรัม ผู้ผลิตควรจะใช้ส่วนผสมแต่ละอย่าง

สมการเป้าหมาย: (Min) $C = 3X_1 + 5X_2$

ขึ้นอยู่กับ :-

(1) โปรทีน	$1X_1 + 1X_2$	$\geq$	4
(2) ไขมัน	$1X_1 + 3X_2$	$\geq$	6
(3) เส้นใย	$7X_1 + 0X_2$	$\geq$	14
(4) Non Negativity	X_1 , X_2	$\geq$	0

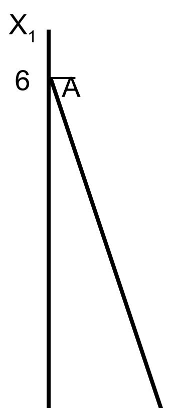
เมื่อนำเอาข้อกำหนดทั้งสามและสมการเป้าหมายไปพล็อตกราฟ (รูป 8.4) ระดับการผลิตที่เป็นไปได้จะอยู่ทางขวามือของเส้น constraint แต่ละเส้น บริเวณการผลิตที่เป็นไปได้ คือ บริเวณตั้งแต่เส้น AEBD ขึ้นไปทางขวามือ ระดับการผสมปัจจัยการผลิตที่เหมาะสมจะอยู่ที่จุดสัมผัสระหว่างเส้นผลตอบแทนเท่ากันกับบริเวณการผลิตที่เป็นไปได้ ซึ่งคือ จุด E ผู้ผลิตต้องใช้ปลาป่นจำนวน 1 หน่วย และข้าวโพดป่นจำนวน 3 หน่วย เพื่อผลิตอาหารสัตว์สำเร็จรูปจำนวน 1 กิโลกรัม ซึ่งให้คุณค่าทางอาหารตามที่กำหนดไว้และเสียต้นทุนในการผลิตน้อยที่สุดเท่ากับ 14 บาทต่อกิโลกรัม

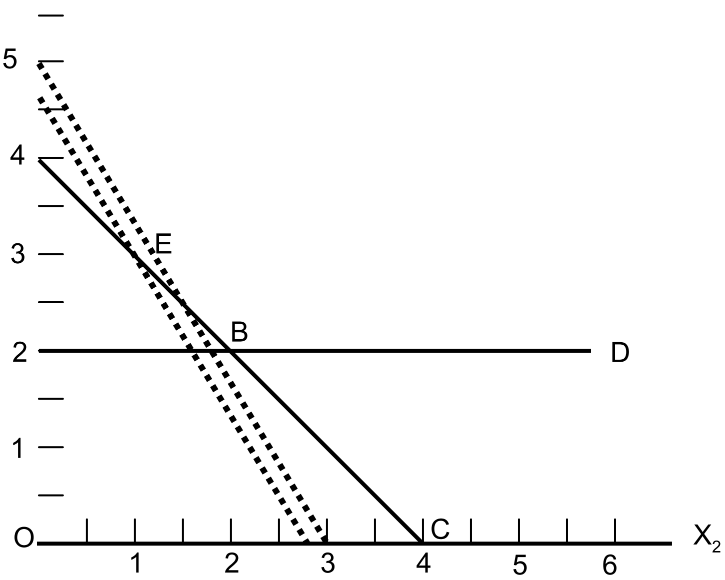
Slack Variables and Surplus Variables

จากตัวอย่างที่แล้ว ที่ดินมีอยู่ทั้งหมด 8 เอเคอร์ ใช้เพราะปลูกข้าวสาลีและข้าวบาร์เลย์ เกษตรกรได้รับกำไรสูงสุดจากการผลิตข้าวสาลี 2 ถัง โดยใช้แรงงานทำงาน 6 ชั่วโมงการทำงานและผลิตข้าวบาร์เลย์ 3 ถัง โดยใช้แรงงานทำงาน 3 ชั่วโมงการทำงาน และเหลือชั่วโมงการทำงาน 3 ชั่วโมง ดังนั้น เพื่อที่จะแสดงจำนวนปัจจัยการผลิตที่เหลือใช้หรือไม่ได้ถูกนำมาใช้ในการผลิต (slack variables) ให้เปลี่ยนข้อกำหนดในรูปอสมการ (Inequality) มาอยู่ในรูปสมการ (Equality) โดยเพิ่ม slack variables เข้าไปในข้อกำหนดนั้น อีกเหตุผลหนึ่งของการเปลี่ยนรูปสมการ เพราะในสมการแก้ปัญหาลิเนียร์โปรแกรมมิ่งจะง่ายขึ้นถ้าหากเรา solve หาค่าตัว unknown จาก simultaneous equations

รูป 8.4

ระดับการผลิตที่เหมาะสมกรณี Minimization





Slack Variables and Surplus Variables

จากตัวอย่างที่แล้ว ที่ดินมีอยู่ทั้งหมด 8 เอเคอร์ ใช้เพราะปลูกข้าวสาลีและข้าวบาร์เลย์ เกษตรกรได้รับกำไรสูงสุดจากการผลิตข้าวสาลี 2 ถัง โดยใช้แรงงานทำงาน 6 ชั่วโมงการทำงานและผลิตข้าวบาร์เลย์ 3 ถัง โดยใช้แรงงานทำงาน 3 ชั่วโมงการทำงาน และเหลือชั่วโมงการทำงาน 3 ชั่วโมง ดังนั้น เพื่อที่จะแสดงจำนวนปัจจัยการผลิตที่เหลือใช้หรือไม่ได้ถูกนำมาใช้ในการผลิต (slack variables) ให้เปลี่ยนข้อกำหนดในรูปอสมการ (Inequality) มาอยู่ในรูปสมการ (Equality) โดยเพิ่ม slack variables เข้าไปในข้อกำหนดนั้น อีกเหตุผลหนึ่งของการเปลี่ยนรูปสมการ เพราะในสมการแก้ปัญหาลิเนียร์โปรแกรมมิ่งจะง่ายขึ้นถ้าหากเรา solve หาค่าตัว unknown จาก simultaneous equations

ถ้าเป็น slack variable ของ constraint ที่ 1 ใช้อักษรย่อว่า S_1 สำหรับ S_2 และ S_3 สำหรับข้อกำหนดที่ 2 และ 3 ตามลำดับ ซึ่งปรากฏ ดังนี้

(1) ที่ดิน $1X_2 + 2X_2 + IS_1 = 8$

(2) แรงงาน $3X_1 + 1X_2 + IS_2 = 12$

(3) ปุ๋ย $1X_1 + 1X_2 + IS_3 = 5$

ค่า slack variable จะมีค่าเป็นบวกเสมอ เพราะถ้าค่าของ slack variable ติดลบ จะทำให้จุดการผลิตอยู่นอกบริเวณการผลิตที่เป็นไปได้ เช่น จากสมการข้อกำหนดที่ 1 ถ้าค่า S_1 เท่ากับ -2 จะทำให้ค่าทางขวามือของสมการเท่ากับ 10 ระดับการผลิต X_1 และ X_2 จะเป็นไปไม่ได้เพราะใช้ที่ดินมากกว่าที่มีอยู่

จากตัวอย่างปัญหาการผลิตที่ทำให้เสียต้นทุนน้อยที่สุด ในการผลิตอาหารสัตว์สำเร็จรูป จำนวนหนึ่ง จะต้องมีไขมันจำนวนไม่น้อยกว่า 6 หน่วย ไขมันที่มีจำนวนมากกว่า 6 หน่วย ถือว่าเป็นส่วนเกินกว่าข้อกำหนดขั้นต่ำ เพราะฉะนั้นเพื่อที่จะทำให้ข้อกำหนดต่างๆ มาอยู่ในรูปสมการจะต้องเพิ่มตัวแปรเข้าไปอีกตัวหนึ่งซึ่งเรียกว่า surplus variables ค่าสัมประสิทธิ์ของ surplus variables จะมีค่าเท่ากับ -1 เพราะต้องหักออกจากจำนวนไขมันที่มีอยู่จริงๆ ในอาหารสัตว์สำเร็จรูปผลิตขึ้นเพื่อที่จะทำให้จำนวนไขมันทั้งหมดที่ได้จากส่วนผสมแต่ละชนิดเท่ากับจำนวนไขมันขั้นต่ำสุดที่กำหนดไว้ เช่น ในการผลิตอาหารสัตว์สำเร็จรูปนี้ ให้ไขมันทั้งหมดเท่ากับ $(1\times5)+(3\times2) = 11$ หน่วย ซึ่งเป็นจำนวนไขมันที่มีมากกว่าจำนวนไขมันขั้นต่ำที่กำหนดไว้อยู่ 6 หน่วย ดังนั้นเพื่อที่จะให้ได้จำนวนไขมันเท่ากับขั้นต่ำสุดที่กำหนดไว้ ก็ต้องหักจำนวนไขมันส่วนที่เกินออกไป สมการข้อกำหนดเกี่ยวกับไขมันจะเป็นดังนี้

$$1X_1 + 3X_2 - IS_1 = 6$$

$-IS_1$ คือ $(-1)\times S_1$ เพราะฉะนั้นค่าของ S_1 ในตัวอย่างนี้จะต้องมีค่าเป็นบวกเสมอเช่นกัน

กิจกรรมที่ 8.2

จากตารางต่อไปนี้ แสดงถึงจำนวนปัจจัยที่มีอยู่ทั้งหมด และการใช้ปัจจัยแต่ละชนิดเพื่อผลิตพืชผล 2 ชนิด คือ ถั่งเขียวและถั่วเหลือง

ท่านจะแนะนำให้เกษตรกรรายนี้ผลิตพืชผลทั้งสองอย่างไรจึงจะได้รับกำไรสูงสุด (ให้หาคำตอบโดยวิธีกราฟ)

ปัจจัย	**จำนวนของปัจจัยที่ต้องใช้ต่อผลผลิต1 หน่วย**		**จำนวนปัจจัยทั้งหมด**
	ถั่วเขียว(X_1)	**ถั่งเหลือง (X_2)**	
ที่ดิน	1	1	12
แรงงาน	1	3	24
เครื่องทุนแรง	2	1	20
น้ำ	4	0	32
	กำไรต่อหน่วยของผลผลิต		
	30	20	

แนวตอบกิจกรรมที่ 8.2

จากรายละเอียดข้างต้น สามารถนำมาเขียนรูปแบบทั่วไปของลิเนียร์โปรแกรมมิ่งได้ดังนี้ เป้าหมาย :- $Z = 30X_1 + 20X_2$

ขึ้นอยู่กับข้อกำหนด :-

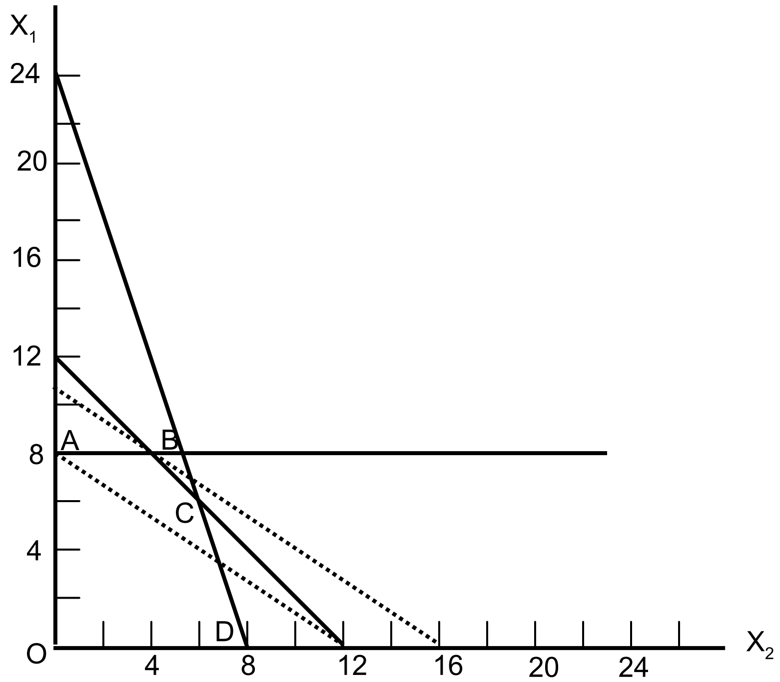
(1) ที่ดิน $1X_1 + 1X_2 \leq 12$

(2) แรงงาน $1X_1 + 1X_2 \leq 24$

(3) เครื่องทุ่นแรง $2X_1 + 1X_2 \leq 20$

(4) น้ำ $4X_1 + 0X_2 \leq 32$

(5) Non-Negativity $X_1, X_2 \geq 0$



คำตอบ คือ บริเวณการผลิตที่เป็นไปได้ คือ พื้นที่ OABCD

ระดับการผลิตที่ให้กำไรสูงสุดคือที่จุด Bโดยผลิตถั่วเขียว (X_1) = 8 หน่วย และผลิตถั่วเหลือง (X_2) = 4 หน่วย ได้กำไรเท่ากับ 320 บาท

8.3 การหาคำตอบที่ดีที่สุดโดยวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex Method)

เนื่องจากในการหาคำตอบที่ดีที่สุดโดยวิธีกราฟนั้นจำกัดอยู่เฉพาะปัญหาที่มีตัวแปรอยู่เพียง 2 หรือ 3 ตัวเท่านั้น ดังนั้นวิธีซิมเพล็กซ์จึงถูกนำมาใช้ในกรณีที่มีตัวแปรหลายตัว

จากตัวอย่างเกี่ยวกับการผลิตข้าวสารและข้าวบาร์เลย์

สมการเป้าหมาย :- $Z = 4X_1 + 6X_2$

ขึ้นอยู่กับ :-

(1) ที่ดิน $1X_1 + 2X_2 \leq 8$

(2) แรงงาน $3X_1 + 1X_2 \leq 12$

(3)	ปุ๋ย	$1X_1 + 1X_2$	$\leq$	5
(4)	Non Negativity	X_1, X_2	$\geq$	0

ก่อนอื่นเราต้องเปลี่ยนข้อกำหนดในรูปอสมการให้เป็นสมการก่อนโดยการเพิ่ม slack variables ในทุกข้อกำหนด และเพื่อความสะดวกง่ายในการหาคำตอบ ให้ย้ายตัวแปรทุกตัวมาอยู่ทางขวามือของสมการยกเว้น slack variables

สมการเป้าหมาย:- (MAX) $Z = 4X_1 + 6X_2$

ขึ้นอยู่กับ:-

(1)	ที่ดิน	S_1	=	$8 - 1X_1 - 2X_2$
(2)	แรงงาน	S_2	=	$12 - 3X_1 - 1X_2$
(3)	ปุ๋ย	S_3	=	$5 - 1X_1 - 1X_2$

(4) Non-Negativity $X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 = 0$

จากสมการข้างต้นนี้ จะเห็นว่ามีตัว unknowns มากกว่าจำนวนสมการ ซึ่งเราจะหาคำตอบจากการ solve จาก simultaneous equations ไม่ได้ ดังนั้น จึงต้องใช้วิธีซิมเพล็กซ์แทน ตามหลักพีชคณิต ถ้าตัว unknowns มีจำนวนมากกว่าจำนวนสมการ จะทำให้ได้ค่าหลายค่า แต่ถ้าตัว unknowns มีจำนวนเท่ากับสมการ จะได้ค่าเพียงค่าเดียวเท่านั้น เพราะฉะนั้นในกรณีที่จำนวนตัว unknowns มีมากกว่าจำนวนสมการ และต้องการหาค่าของตัว unknowns แต่ละตัว ก็สามารถทำได้โดยการลดจำนวนตัว unknowns ให้เท่ากับจำนวนสมการ เช่น จากสมการต่อไปนี้ $3A + 1C + 0D - 4E + 0F = 8$ ตัว C ,ค่าสัมประสิทธิ์เท่ากับ 1 lส่วน D และ F มีค่าสัมประสิทธิ์เท่ากับ 0 ถ้ากำหนดให้ A และ E มีค่าเท่ากับ 0 เราจะได้ค่า C เท่ากับ 8 ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่าง เกี่ยวกับการเพาะปลูกข้าวสาลีและข้าวบาร์เลย์ซึ่งมีตัว unknowns อยู่ 5 ตัว คือ $X_1, X_2, S_1, S_2,$ และ S_3 และมีเพียง 3 สมการ เราสามารถหาค่าของ S_1, S_2, S_3, S_4 ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์เท่ากับ 1 ในแต่ละสมการได้โดยกำหนดให้ X_1 และ X_2 ในแต่ละสมการมีค่าเท่ากับ 0 จะได้ค่า $S_1 = 8$, $S_2 = 12$ และ $S_3 = 5$ หรืออ่านค่าได้โดยตรงจากค่าทางขวามือของสมการ

จากสมการเป้าหมายและข้อกำหนดที่จัดรูปใหม่ข้างต้นนี้ เราสามารถหาคำตอบที่ดีที่สุดได้โดยวิธีซิมเพล็กซ์ ดังนี้

ขั้นที่ 1 นำค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรจากสมการที่จัดรูปใหม่มาสร้างเป็นตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1 ซึ่ง initial basic solution จะเป็นคำตอบที่กำหนดให้กิจกรรมที่แท้จริงเท่ากับศูนย์ คือ $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ ดังนั้นรายได้สุทธิจึงเท่ากับ 0

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1

	b	X_1	X_2	R
Z	0	4	6	
S_1	8	-1	(-2)	8×2 = 4
S_2	12	-3	-1	12/1 = 12
S_3	5	-1	-1	5/1 = 5

ขั้นที่ 2 การพัฒนาแผนการผลิตให้บรรลุเป้าหมาย มีขั้นตอนในการคำนวณดังต่อไปนี้

(2.1) เลือกกิจกรรมที่จะนำมาใช้ในการพัฒนาแผนการผลิต โดยดูว่าค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวใด(หรือของผลผลิตชนิดใด)ในแถว Z ที่ให้ค่าบวกมากที่สุด(largest positive value) จากตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1 ผลผลิตที่ให้รายได้สุทธิสูงสุดต่อหน่วยสูงสุด คือ X_2 (= 6) ดังนั้นการผลิตนี้จะถูกนำไปเป็นจุดเริ่มต้นของการพัฒนาแผนการผลิตต่อไป ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์นี้อยู่ในคอลัมน์ X_2 เพราะฉะนั้นเราจึงเรียกคอลัมน์นี้ว่า **Pivot Column**

(2.2) สร้างคอลัมน์ใหม่เรียกว่า R Column เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์เริ่มต้นในการพัฒนาแผนการผลิตโดยเอาค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรใน Pivot Column <u>เฉพาะที่มีค่าติดลบ</u> ไปหารค่าคงที่ในคอลัมน์ b ค่าสัมประสิทธิ์ในคอลัมน์ R ที่ให้ค่า absolute Value น้อยที่สุด คือ 4 จะถูกเลือกเพื่อนำไปพัฒนาแผนการผลิตต่อไปซึ่งค่าสัมประสิทธิ์นี้อยู่ในแถว S_1 ฉะนั้นจึงเรียกแถวนี้ว่า **Pivot Row**

สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ร่วมระหว่าง pivot row กับ pivot column คือ (-2) เราเรียกว่า **Pivot element** ซึ่งจะเป็นค่าเริ่มต้นในการพัฒนาแผนการผลิตขั้นต่อไป

ขั้นที่ 3 ในการหาตารางซิมเพล็กซ์ตารางต่อไป ก่อนอื่นให้สลับชื่อระหว่าง pivot column กับ pivot row ส่วนแถวและคอลัมน์อื่นให้คงอยู่ ณ ที่เดิม

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2

	b	X_1	S_1	R
Z	24	1	-3	
X_2	4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4×221 = 8
S_2	8	$-2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	8×2/5 = 3.2

S_3	1	$\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$1\times2/1 = 2$

ขั้นที่ 4 ณ ตำแหน่ง pivot element ในตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1 เอาส่วนกลับของ pivot element ไปใส่ในตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2 (จาก -2 เป็น $-\frac{1}{2}$)

ขั้นที่ 5 เอา pivot element ไปหารค่าสัมประสิทธิ์ทุกตัวใน pivot column ของตารางก่อน (ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1) ยกเว้นตัว pivot element แล้วนำไปใส่ในตารางต่อไป (ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2 ณ ตำแหน่งที่สอดคล้องกัน (คิดเครื่องหมายด้วย) เอา pivot element ที่มีเครื่องหมายตรงกันข้ามกับตัวของมันเอง (คือ 2) ไปหารค่าสัมประสิทธิ์ทุกๆ ตัวใน pivot row ของตารางก่อน (ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1) ยกเว้น pivot element แล้วนำไปใส่ในตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2 ณ ตำแหน่งที่สอดคล้องกัน

ขั้นที่ 6 สำหรับค่าสัมประสิทธิ์อื่นๆ ที่ไม่อยู่ใน pivot row หรือ pivot column สามารถหาได้จากการสร้างสี่เหลี่ยมในตารางแล้วโดยยึดเอาค่าสัมประสิทธิ์ ณ ตำแหน่งที่ต้องการจะหาและตำแหน่งของ pivot element เป็นหลัก (คือ เป็นจุดทแยงมุมคู่หนึ่งของสี่เหลี่ยมนั้น) ค่าสัมประสิทธิ์อื่นๆ จะหาได้จากสูตรต่อไปนี้[1]

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{ค่าสัมประสิทธิ์ ณ}\\ \text{ตำแหน่งที่ต้องการ}\\ \text{จะหาในตาราง}\\ \text{ต่อไป}\end{array}} = \left[\begin{array}{l}\text{ค่าสัมประสิทธิ์}\\ \text{ในตารางก่อน ณ}\\ \text{ตำแหน่งต้องการหา}\end{array}\right] - \frac{\textit{(ผลคูณค่าทแยงมุมอีกคู่หนึ่ง}}{\left(\textit{pivot element ในตารางก่อน}\right)}$$

ตัวอย่างเช่น ต้องการทราบค่าสัมประสิทธิ์ใหม่ในตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2 ณ ตำแหน่งคอลัมน์ X_1 ตัดกับแถว Z ได้ดังนี้

$$= 4 - \frac{(-1)(1)}{-2}$$

$$= 4 - \frac{(-6)}{(-2)} = -1$$

ขั้นที่ 7 หลังจากได้ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2 แล้ว เราสามารถหาตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3 ได้โดยดำเนินขั้นตอนเหมือนกัน และให้สังเกตค่าสัมประสิทธิ์ของสมการเป้าหมายว่า มีค่าเป็นลบทั้งหมดหรือยัง? ถ้ายังมีค่าบวกอยู่ ต้องดำเนินการหาตารางต่อไปอีก แต่ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ใน

---

[1] William L. Baumol. *Economic Theory and Operation Research.* 2nd ed., (New Delhi: Prentice-Hall of India Private Limited. 1970). p. 102

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3

	b	S_3	S_1
Z	26	-2	-2
X_2	3	1	-1
S_2	3	5	-2
X_1	2	-2	1

จากตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3 ให้คำตอบที่ดีที่สุด ดังนี้ เกษตรกรควรผลิตข้าวสาลี (X_1) จำนวน 2 ถัง และข้าวบาร์เลย์ (X_2) จำนวน 3 ถัง จึงจะทำให้ได้รับกำไรสูงสุดเท่ากับ 26 บาทต่อถัง ปัจจัยการผลิตที่ถูกนำไปใช้ทำการผลิตอย่างเต็มที่ คือ ที่ดิน และ ปุ๋ย ส่วนปัจจัยการผลิตที่มิได้ถูกนำไปใช้ทำการผลิตทั้งหมด คือ แรงงาน ซึ่งเหลือเวลาทำงานอยู่ 3 ชั่วโมงการทำงาน (คือ $S_2 = 3$)

8.4 การหาคำตอบสำหรับปัญหาการผลิตที่ทำให้เสียต้นทุนน้อยที่สุดโดยวิธีซิมเพล็กซ์

จากตัวอย่างเกี่ยวกับการผลิตอาหารสัตว์สำเร็จรูปจำนวนหนึ่ง ซึ่งใช้ส่วนผสม 2 ชนิด คือ ข้าวโพดป่น (X_1) และปลาป่น (X_2) ทำการผลิตโดยให้คุณค่าทางอาหารตามที่กำหนดไว้ เราเริ่มด้วยการเปลี่ยนข้อกำหนดต่างๆ ให้อยู่ในรูปสมการทั้งหมดโดยเพิ่ม surplus variable ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์เท่ากับ -1 เข้าไปในทุกสมการ และให้ย้ายตัวแปรทุกตัวมาอยู่ทางด้านขวามือของสมการยกเว้น surplus variable ดังนี้

สมการเป้าหมาย : $C = 3X_1 + 5 X_2$

ขึ้นอยู่กับ :-

(1) โปรทีน $S_1 = -4 + 1X_1 + 1X_2$

(2) ไขมัน $S_2 = -6 + 1X_2 + 3X_2$

(3) เส้นใย $S_3 = -14 + 7X_1 + 0X_2$

(4) Non-Negativity $X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 = 0$

จากสมการทั้งหมดข้างต้นนี้ นำมาสร้างตารางซิมเพล็กซ์ และดำเนินขั้นตอนต่าง ๆ เพื่อหาระดับการใช้ปัจจัยที่เหมาะสม ดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้างตารางซิมเพล็กซ์ โดยนำค่าสัมประสิทธิ์จากสมการข้างบนไปใส่ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1

	R	3/7 = 4	5/0 = ∞
	b	**X_1**	**X_2**
C	0	3	5
S_1	-4	1	1
S_2	-6	1	3
S_3	-14	(7)	0

Initial basic solution จะเป็นคำตอบที่กำหนดให้กิจกรรมที่แท้จริงเท่ากับศูนย์ นั่นคือ $X_1 = 0, X_2 = 0$ ดังนั้น ต้นทุนการผลิตจึงเท่ากับศูนย์ด้วย

ขั้นที่ 2 การพัฒนาแผนการใช้ปัจจัยการผลิตให้บรรลุเป้าหมายมีขั้นตอนในการคำนวณ ดังต่อไปนี้

(2.1) เลือกกิจกรรมที่จะนำมาใช้ในการพัฒนาแผนการใช้ปัจจัยการผลิต โดยดูค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งในคอลัมน์ b ที่ให้ค่าติดลบมากที่สุด (largest negative value) จากตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1 ซึ่งปรากฏว่า (-14) เป็นค่าติดลบมากที่สุดและอยู่ในแถว S_3 เพราะฉะนั้นจึงเรียกแถวนี้ว่า **Pivot Row**

(2.2) สร้างแถว R ขึ้นมาใหม่ เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์เริ่มต้นในการพัฒนาแผนการใช้ปัจจัยการผลิตโดยเอาค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรใน pivot row ไปหารค่าสัมประสิทธิ์ในแถว C ค่าสัมประสิทธิ์ในแถว R ที่ให้ค่าน้อยที่สุด คือ (0.4) จะถูกเลือกนำไปพัฒนาแผนการใช้ปัจจัยการผลิตต่อไป ซึ่งเป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่อยู่ในคอลัมน์ X_1 ฉะนั้นจึงเรียกคอลัมน์นี้ว่า **pivot Column**

สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ร่วมระหว่าง pivot row และ pivot column หรือที่เรียกกันว่า **pivot element** คือ 7 ซึ่งจะเป็นค่าเริ่มต้นในการพัฒนาแผนการใช้ปัจจัยการผลิตต่อไป

ขั้นที่ 3 ในการหาตารางซิมเพล็กซ์ต่อไป ให้ดำเนินวิธีการเหมือนกับกรณี maximization นั่นคือ ให้ย้ายชื่อตัวแปรของ pivot column ไปอยู่ทางด้านซ้ายมือของตาราง โดยไปแทนที่ชื่อตัวแปรของ pivot row และให้ย้ายชื่อตัวแปรของ pivot row ไปแทนที่ชื่อตัวแปรของ pivot element ส่วนชื่อตัวแปรของแถวและคอลัมน์อื่นๆ ให้คงอยู่ ณ ตำแหน่งเดิม

ขั้นที่ 4 ณ ตำแหน่งของ Pivot element ในตารางก่อน เอาส่วนกลับของ pivot element ไปใส่ในตารางต่อไป (จาก 7 เป็น 1/7) คือ ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2

R		$3/7 \times 7/1 = 3$	5/3 = 1.6
	b	$\mathbf{S_3}$	$\mathbf{X_2}$
C	6	3/7	5
$\mathbf{S_1}$	-2	1/7	1
$\mathbf{S_2}$	-4	1/7	(3)
$\mathbf{X_1}$	2	1/7	0

ขั้นที่ 5 เอา pivot element ไปหารค่าสัมประสิทธิ์ทุกตัวใน pivot column ของตารางก่อน (ยกเว้น pivot element) แล้วนำไปใส่ในตารางต่อไป ณ ตำแหน่งที่สอดคล้องกัน (คิดเครื่องหมายด้วย) เอา pivot element ที่มีเครื่องหมายตรงกันข้ามกับตัวของมันเอง (คือ -7) ไปหารค่าสัมประสิทธิ์ทุกตัวใน pivot row ของตารางก่อน (ยกเว้น pivot element) แล้วนำไปใส่ในตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2 ณ ตำแหน่งที่สอดคล้องกัน

ขั้นที่ 6 สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่อยู่ใน pivot row หรือ pivot column สามารถหาได้จากการสร้างสี่เหลี่ยมในตารางก่อนโดยยึดเอาค่าสัมประสิทธิ์ ณ ตำแหน่งที่ต้องการจะหาและตำแหน่งของ pivot element เป็นหลัก (คือ เป็นจุดทแยงมุมคู่หนึ่งของสี่เหลี่ยมนั้น) ค่าสัมประสิทธิ์อื่นๆ จะหาได้จากสูตรในหน้าที่ 190

ขั้นที่ 7 หลังจากได้ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2 แล้ว เราสามารถหาตารางต่อไปได้เรื่อยๆ โดยดำเนินขั้นตอนเหมือนกัน จนกระทั่งค่าคงที่ในคอลัมน์ b มีค่าเป็นบวกหมด แสดงว่าถ้าหากยังคงใช้ปัจจัยการผลิตทำการผลิตต่อไปอีก จะทำให้เสียต้นทุนต่อหน่วยเพิ่มขึ้น ดังนั้น จึงถือได้ว่าได้มาถึงเป้าหมายแล้ว แต่เนื่องจากในตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3 ค่าสัมประสิทธิ์ในคอลัมน์ b ยังมีค่าติดลบอยู่จึงต้องหาตารางซิมเพล็กซ์ที่ 4 ต่อไป

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 3

R 4/21x21/2= 2 5/3x3/1 = 5

	b	S_3	S_2
C	38/1	4/21	5/3
S_1	-2/3	(2/21)	1/3
X_2	4/3	-1/21	1/3
X_1	2	1/7	0

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 4

	b	S_1	S_2
C	14	2	1
S_3	7	21/2	-1/2
X_2	1	-1/2	1/2
X_1	3	3/2	-1/2

จากตารางซิมเพล็กซ์ที่ 4 ค่าคงที่ในคอลัมน์ b มีค่าเป็นบวกหมด แสดงว่า ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 4 เป็นตารางสุดท้ายและให้คำตอบที่ดีที่สุด ดังนี้ ผู้ผลิตอาหารสัตว์สำเร็จรูปควรใช้ข้าวโพดป่น (X_1) จำนวน 3 หน่วย และปลาป่น (X_2) จำนวน 1 หน่วย ทำการผลิตจึงจะทำให้เสียต้นทุนน้อยที่สุดเท่ากับ 14 บาทต่อหน่วย โดยให้คุณค่าทางอาหารตรงตามที่กำหนด แต่ในการผลิตอาหารสำเร็จรูปนี้ ให้คุณค่าทางอาหารประเภทเสนใยเป็นจำนวนมากกว่าข้อกำหนดขั้นต่ำสุดเป็นจำนวน 7 หน่วย (คือ $S_3 = 7$)

กิจกรรมที่ 8.3

นายสา มีที่ดินแปลงหนึ่งจำนวน 240 เอเคอร์ ซึ่งเขาอาจใช้เพาะปลูกข้าวโพดหรือข้าวฟ่างอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือทั้งสองอย่างก็ได้ รายได้สุทธิต่อเอเคอร์ในการเพาะปลูกข้าวโพดเท่ากับ 100 บาท และต้นทุนในการเพาะปลูกข้าวโพดต่อที่ดิน 1 เอเคอร์ เท่ากับ 60 บาท และ 30 บาท นายสามีแรงงานช่วยทำการเพาะปลูกในระยะเวลาอันจำกัด และความสามารถในการเก็บเกี่ยวพืชผลแต่ละชนิดก็จำกัดเช่นกัน ในระหว่างฤดูการผลิต ชั่วโมงการทำงานของแรงงานทั้งหมดมีเพียง 320 ชั่วโมง ในการเก็บเกี่ยวข้าวโพดสามารถเก็บเกี่ยวได้สูงสุดเพียง 150 เอเคอร์ ในการเก็บเกี่ยวข้าวฟ่างสามารถเก็บเกี่ยวได้สูงสุดเพียง 200 เอเคอร์ ในการเพาะปลูกในที่ดินแต่ละเอเคอร์ต้องการใช้แรงงานทำงาน 2 ชั่วโมง ในการปลูกข้าว และ 1 ชั่วโมง ในการปลูกข้าวฟ่าง นายสาต้องการจัดสรรที่ดินที่มีอยู่ไปทำการเพาะปลูก

แนวตอบกิจกรรมที่ 8.3

ให้นักศึกษาทำตามขั้นตอนดังที่กล่าวไว้แล้วในบทที่ 8 ซึ่งจะได้ตารางซิมเพล็กซ์ตาราง 1 ดังนี้

	b	X_1	X_2
Z	0	400	300
S_1	240	-1	-1
S_2	320	-2	-1
S_3	150	-1	0
S_4	200	0	-1

จากนั้นให้หาตารางซิมเพล็กซ์ตารางต่อไป จะได้ตารางซิมเพล็กซ์ตารางสุดท้ายดังนี้

	b	S_1	S_2
Z	80.000	-200	-100
S_3	70	-1	1
X_2	160	-2	1
X_1	80	1	-1
S_4	40	2	-1

คำตอบ คือ นายสา ควรแบ่งที่ดินจำนวน 80 เอเคอร์เพื่อเพาะปลูกข้าวโพด และ 160 เอเคอร์เพื่อเพาะปลูกข้าวฟ่าง ซึ่งจะทำให้นายสาได้รับกำไรสูงสุดจำนวน 80,000 บาท

บทสรุป

ลิเนียร์โปรแกรมมิ่งเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่ถูกนำมาใช้ในการวางแผนการผลิตทางเกษตร โดยเฉพาะในกรณีที่มีข้อจำกัดในเรื่องของจำนวนปัจจัยในการผลิต เช่น ที่ดิน แรงงาน เครื่องจักรกล เป็นต้น ซึ่งสิ่งต่างๆ เหล่านี้จะถูกนำเข้ามาพิจารณาด้วยในการวางแผน เพื่อหาวิธีการผลิตที่เหมาะสมที่จะให้กำไรสูงสุดแก่เกษตรกร หรือทำให้เกษตรกรสามารถทำการผลิตได้โดยเสียต้นทุนน้อยที่สุด เมื่อเป็นเช่นนี้จึงเป็นผลให้วิธีลิเนียร์โปรแกรมมิ่งถูกนำมาใช้ในการวางแผนการผลิตทางเกษตรอย่างแพร่หลาย นอกจากนี้แล้ว