$$4(7 - x_2) + 4(12 - 2x_1 - x_2) \geqslant \tfrac{1}{2}$$

$$-x1 - x2 + \frac{19}{2} \geqslant \tfrac{1}{2}$$

หรือ $$x_1 + x_2 \quad 6 \quad 9 \quad : \text{ Gomory Constraint}$$

จากข้างต้นทั้งหมดนี้ ได้แสดงวิธีการหาสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม (Gomory Constraint) ในรูปแบบสำเร็จเพื่อการคำนวณเพิ่มเติม และรูปแบบของสมการเงื่อนไขสามัญของกระบวนการเชิงเส้นไว้แล้ว แต่ว่าเป็นการแสดงโดยตัวอย่างของปัญหา ในขั้นนี้จะสรุปแสดงในรูปมาตรฐานทั่ว ๆ ไปให้เห็นพื้นฐานของหลักการดังต่อไปนี้

สมมุติว่า จากการคำนวณคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม โดยวิธีการของกระบวนการเชิงเส้นธรรมดา ๆ จนได้คำเฉลยแล้ว ปรากฏว่ายังมีตัวแปรคำเฉลยบางตัวได้ค่าเป็นเศษส่วนอยู่ และเมื่อได้เปรียบเทียบค่าคำเฉลยของตัวแปรเหล่านั้นแล้วพบว่า x_i เป็นตัวแปรที่มีค่าคำเฉลยเป็นเศษส่วนสูงที่สุด

นำตัวแปร x_i จากตาราง มาเขียนในรูปสมการดังต่อไปนี้

$$x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

หรือ $$X_1 + \sum_{j=1}^{n} -\hat{a}_{ij} x_j = \hat{b}_i$$

โดยที่ :

x_j คือ ตัวแปรที่ให้ค่าคำเฉลยเป็นศูนย์

$\hat{a}_{ij}$ คือ สัมประสิทธิของ x_j จากตารางคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้น

$\hat{b}_i$ คือ ค่าคงที่ของสมการ

จากนี้แยกสัมประสิทธิและค่าคงที่ของสมการออกเป็นสองส่วน โดยให้ส่วนหนึ่งเป็นจำนวนเต็ม (integer) อีกส่วนหนึ่งเป็นค่าเศษส่วนบวก (nonnegative fraction) ทั้งนี้ ถ้าสมมุติว่า $f(\hat{a}_{ij})$ คือเศษส่วนบวกของสัมประสิทธิ $\hat{a}_{ij}$ และ $f(\hat{b}_i)$ คือเศษส่วนบวกของค่าคงที่ $\hat{b}_i$ แล้ว สมการข้างต้นจะสามารถเขียนได้โดยรูปแบบของการแยกจำนวนเต็มและเศษส่วนบวก ได้ดังต่อไปนี้

$$\sum_{j=1}^{n} f(\hat{a}_{ij})x_j = f(\hat{b}_i) + \text{integer}$$

ดังนั้น อสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ก็จะคือ

$$\sum_{j=1}^{n} f(\hat{a}_{ij})x_{jj} \geqslant f(\hat{b}_i)$$

Gomory-constraint **inequality**

อนึ่ง อสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มข้างต้นนี้ สามารถที่จะแปลงให้อยู่ในรูปของสมการได้ ทั้งนี้จะกระทำได้โดยการเติมตัวแปรเสริมที่เรียกว่า "Gomory slack variable : $\hat{s}$" ในด้านขวามือของอสมการดังกล่าว ซึ่งสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มที่ได้จะเป็นดังนี้

$$\sum_{j=1}^{n} f(\hat{a}_{ij})x_j = f(\hat{b}_i) + \hat{s}$$

$$\hat{s} = -f(\hat{b}_j) + \sum_{j=1}^{n} f(\hat{a}_{ij})x_j$$

: **Gomory-constraint** equality

จากรูปแบบและวิธีการสร้างเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม (Gomory Constraint) ดังที่ได้แสดงมาโดยตลอดแล้วนี้ ความจริงแล้ว การสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มดังกล่าว อาจไม่จำเป็นที่จะต้องคำนวณลำดับขั้นตอนโดยตลอดก็ได้ ทั้งนี้ก็เพราะว่า การสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มดังกล่าว มีหลักพอที่จะสังเกตได้ว่า สมการเงื่อนไขนี้จะประกอบด้วย เศษส่วนบวกของค่าคงที่ของสมการกับเศษส่วนบวกของสัมประสิทธิของตัวแปรที่ให้ค่าคำเฉลยเป็นศูนย์ (zero variable = non basic variables) ดังจะสร้างเป็นข้อสังเกตได้ดังต่อไปนี้

จากตาราง 4-4 ในตัวอย่าง ซึ่งเป็นตารางคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นนำตัวแปรซึ่งจะไปสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มออกมาเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$x_1 = 2\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\, s_2 - \tfrac{1}{2}\, s_3$$

โดยหลักการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม สังเกตได้ว่าสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม จะประกอบด้วย ค่าคงที่ของสมการซึ่งเป็นเศษส่วนบวกกับสัมประสิทธิของตัวแปรซึ่งเป็นเศษส่วนบวกด้วยเช่นกัน ดังรูปลักษณะทั่วไปต่อไปนี้

$$\hat{s} = -f(\hat{b}_{x1}) + f(\hat{a}_{s2})\, s_2 + f(\hat{a}_{s3})\, s_3$$

ทั้งนี้เศษส่วนบวกของค่าคงที่ในสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มดังกล่าว จะหาได้จากค่าเศษส่วนบวกของค่าคงที่ในสมการเดิมนั่นเอง ดังนี้

$$f(\hat{b}_{x1}) = \tfrac{1}{2} \qquad \text{(ค่าจำนวนเต็มไม่เกี่ยวข้อง)}$$

สำหรับค่าเศษส่วนบวกซึ่งจะเป็นสัมประสิทธิของตัวแปร จะหาได้จากการพิจารณาต่อไปนี้

ก) ถ้าสัมประสิทธิของตัวแปรใดในสมการเดิมเป็นบวก "+" ค่าสัมประสิทธิของตัวแปรนี้ ในสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มที่จะหานี้ จะได้จากการนำค่าเศษส่วนของสัมประสิทธิเดิมลบออกจาก "1" ดังนี้.-

$$f(\hat{a}_{s2}) = 1 - \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

หมายเหตุ : ถ้าสัมประสิทธิของตัวแปรในสมการเดิมมีส่วนที่เป็นจำนวนเต็มรวมอยู่ด้วย ส่วนที่เป็นค่าจำนวนเต็มจะไม่นำมาเกี่ยวข้อง

ข) ถ้าสัมประสิทธิของตัวแปรใดในสมการเดิมเป็นลบ "-" ค่าสัมประสิทธิของตัวแปรนั้น ในสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มที่จะหานี้ จะได้จากค่าเศษส่วนของสัมประสิทธิเดิมนั้น ๆ นั่นเอง (เครื่องหมายลบไม่เกี่ยวข้อง) ดังนี้ :

$$f(\hat{a}_{s3}) = \tfrac{1}{2}$$

หมายเหตุ ถ้าสัมประสิทธิของตัวแปรในสมการเดิมมีส่วนที่เป็นจำนวนเต็มรวมอยู่ด้วย ส่วนที่เป็นค่าจำนวนเต็มก็จะไม่นำมาเกี่ยวข้องด้วยเช่นกัน

ดังนั้น สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม จากหลักการสังเกตนี้ ก็คือ

$$\hat{s} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} s_2 + \tfrac{1}{2} s_3$$

อนึ่ง เพื่อให้เกิดความเข้าใจในการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม โดยหลักการสังเกตนี้มากยิ่งขึ้น จะขอยกตัวอย่างสมการในรูปแบบต่าง ๆ ตลอดจนสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มของแต่ละสมการนั้น ๆ ดังต่อไปนี้

1. ถ้าสมการเดิมคือ

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{7} x_2 - \frac{2}{5} s_1$$

สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มจะคือ

$$\hat{s} = -\frac{3}{4} + \frac{4}{7}x_2 + \frac{2}{5}s_1$$

2. ถ้าสมการเดิมคือ

$$x_3 = 2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{7}x_1 - 4\frac{5}{8}s_2$$

สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มจะคือ

$$\hat{s} = -\frac{1}{3} + \frac{5}{7}x_1 + \frac{5}{8}s_2$$

3. ถ้าสมการเดิม คือ

$$x_2 = 2\frac{5}{6}\ \overset{7}{x}_1 - \frac{4}{3}s_2$$

สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มจะคือ

$$\hat{s} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{3}s_2$$

4. ถ้าสมการเดิม คือ

$$s_3 = \frac{2}{3} + \frac{5}{4}s_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{7}{4}s_2 + \frac{2}{3}x_1$$

สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มจะคือ

$$\hat{s} = -\frac{2}{3} + \frac{3}{4}s_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{3}{4}s_2 + \frac{1}{3}x_1$$

ข้อสังเกต : สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มทุก ๆ สมการจะมีรูปแบบมาตรฐานทั่วไป ดังนี้

1. ค่าคงที่ของสมการและสัมประสิทธิของตัวแปรในสมการจะเป็นค่าเศษส่วนเสมอ
2. ค่าคงที่ของสมการจะเป็นค่าเศษส่วนที่ติดลบ "-"
3. สัมประสิทธิของตัวแปรในสมการ จะเป็นค่าเศษส่วนที่เป็นบวก "+" เสมอ

เมื่อได้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มดังข้างต้นนี้แล้ว ก็ให้นำสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มดังกล่าว ลงเขียนต่อท้ายตารางของตารางสุดท้าย ที่ได้จากการคำนวณของกระบวนการเชิงเส้น จากนี้ก็ดำเนินการคำนวณต่อไปโดยวิธีการของกระบวนการเชิงเส้นเช่นเดิม ทั้งนี้การคำนวณในขั้นตอนนี้จะกระทำในลักษณะการหาค่าต่ำสุด และเมื่อดำเนินการคำนวณโดยลักษณะดังกล่าวแล้ว ก็จะได้คำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มที่ต้องการ อนึ่ง หากสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มเพียงสมการเดียว ยังไม่สามารถขจัดค่าเศษส่วนของคำเฉลยที่ต้องการได้ ก็จำเป็นที่จะต้องสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มโดยลักษณะที่ได้กล่าวมาแล้วในเบื้องต้นซ้ำ ๆ กันอีกต่อไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้คำเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มตามที่ต้องการ

จากตัวอย่าง 4-1 เมื่อได้อสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ตามที่ได้แสดงขั้นตอนมาแล้ว คือ

$$\tfrac{1}{2} s_2 + \tfrac{1}{2} s_3 \geq \tfrac{1}{2}$$

แปลงอสมการข้างต้นนี้ ให้อยู่ในรูปของ สมการ โดยการเติมตัวแปรเสริมที่เรียกว่า "**Gomory slack variable** : $\hat{s}$ " ในด้านขวามือ ดังนี้ :

$$\tfrac{1}{2} s_2 + \tfrac{1}{2} s_3 = \tfrac{1}{2} + \hat{s}$$

หรือ

$$\hat{s} = -4 + \tfrac{1}{2} s_2 + 4 s_3$$

จากนี้ก็นำสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มนี้ ลงเขียนต่อท้ายตาราง 4-4 ดังที่ได้แสดงไว้ในตาราง 4-5 และดำเนินการคำนวณต่อไปในลักษณะการหาค่าต่ำสุด ซึ่งเมื่อดำเนินการดังกล่าวนี้แล้ว ก็จะได้ ตาราง 4-6 ซึ่งจะเป็นตารางคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม ดังต่อไปนี้

ตาราง 4-5

	Constants	s_2	s_3
R	86	-2	-6
x_1	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
s_1	$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	7	-1	0
s	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$ // $\frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$

ตาราง 4-6 : ตารางคำเฉลยกระบวนการจำนวนเต็ม (แบบทุกตัวแปร)

	Constants	$\hat{s}$	s_3
R	84	[illegible]	-4
x_1	3	1	-1
s_1	2	-1	1
x_2	6	-2	1
s_2	1	2	-1

จากตาราง 4-6 ซึ่งเป็นตารางคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม ตาราง ดังกล่าวจะให้ค่าคำเฉลย ดังนี้ คือ

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 = 3 & & s_1 = 2 \\ x_2 = 6 & & s_2 = 1 \\ & & s_3 = 0 \\ & & s = 0 \end{array}\right\} \quad R = 84$$

4.2 กระบวนการจำนวนเต็ม กรณีตัวแปรบางตัวเท่านั้นที่ต้องการเป็นจำนวนเต็ม คละกันไป : กระบวนการจำนวนเต็มผสม (Mixed Integer Programming)

จากกระบวนการจำนวนเต็มที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 4.1 ข้างต้นนั้น กระบวนจำนวนเต็มดังกล่าว ต้องการค่าคำเฉลยของทุกตัวแปร ทั้งที่เป็นตัวแปรคำเฉลย (decision variables) และตัวแปรเสริม (slack variables) ให้เป็นจำนวนเต็มทั้งสิ้น อย่างไรก็ตาม ในปัญหาทั่ว ๆ ไปนั้น ตัวแปรซึ่งอยู่ในกระบวนการของปัญหา อาจจะมีทั้งที่ต้องการจำนวนเต็มและไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็มคละกันไป ซึ่งกระบวนการจำนวนเต็มคละกันนี้ เรียกว่า "Mixed Integer Programming" ซึ่งในขั้นนี้จะขอแสดงหลักวิธีการหาค่าเฉลยของกระบวนจำนวนเต็มผสมนี้ต่อไป

โดยทั่วไปแล้ว หลักการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสมจะคล้ายคลึงกับการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มธรรมดา ๆ นั่นเอง กล่าวคือเริ่มดำเนินการหาคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นโดยวิธีคำนวณตาราง (simplex method) เมื่อได้คำเฉลยแล้วก็พิจารณาว่า ค่าตัวแปรซึ่งต้องการเป็นจำนวนเต็มต่าง ๆ ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็มตามที่ต้องการ

แล้วหรือยัง ถ้าตัวแปรที่พิจารณาเป็นจำนวนเต็มตามที่ต้องการแล้ว นั่นย่อมแสดงว่าคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นนั้น ก็คือ คำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสมด้วยเช่นกัน แต่ถ้าหากว่าตัวแปรบางตัวซึ่งต้องการค่าคำเฉลยเป็นจำนวนเต็มแต่ยังไม่ได้ค่าเป็นจำนวนเต็มตามที่กำหนด นั่นย่อมแสดงว่า ยังไม่ได้คำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสม จำต้องมีการคำนวณเพิ่มเติม เพื่อขจัดค่าเศษส่วนให้เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งการขจัดค่าเศษส่วนของตัวแปรดังกล่าว ก็กระทำได้โดยการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มทำนองเดียวกันกับกระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปร หากแต่ว่าสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มกรณีนี้ เป็นสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสม ซึ่งจะสามารถขจัดค่าเศษส่วนของตัวแปรที่ต้องการ แต่อาจจะไม่ขจัดค่าเศษส่วนของตัวแปรที่ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็มก็ได้ ทั้งนี้เพราะสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสมดังกล่าว สร้างมาเพื่อขจัดค่าเศษส่วนเฉพาะตัวแปรที่กำหนดเท่านั้น ดังนั้นวิธีการหาสมการดังกล่าวนี้ก็จะแตกต่างไปจากกรณีที่ต้องการทุกตัวแปรเป็นจำนวนเต็ม กล่าวคือ การสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสมนี้จะแยกพิจารณาตัวแปรเป็นสองกลุ่ม คือ กลุ่มตัวแปรที่ต้องการเป็นจำนวนเต็ม และกลุ่มตัวแปรที่ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม โดยตัวแปรในกลุ่มที่ต้องการเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ที่จะได้รับการพิจารณาขจัดค่าเศษส่วนเหล่านั้น ในขั้นนี้เพื่อให้เกิดความเข้าใจหลักการสร้างเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสมดังกล่าว จึงขอแสดงหลักแนวคิดและวิธีการในรูปมาตรฐานทั่ว ๆ ไป ดังนี้

สมมุติว่า จากการคำนวณหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสม โดยวิธีการของกระบวนการเชิงเส้นจนได้คำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นแล้ว ปรากฏว่า ตัวแปรคำเฉลยบางตัวซึ่งต้องการเป็นจำนวนเต็มยังได้ค่าเป็นเศษส่วนอยู่ และเมื่อเปรียบเทียบค่าคำเฉลยของตัวแปรเหล่านั้นแล้ว (พิจารณาเปรียบเทียบเฉพาะค่าของตัวแปรซึ่งต้องการเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ตัวแปรซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็มไม่เกี่ยวข้อง) พบว่า x_i เป็นตัวแปรที่มีค่าคำเฉลยเป็นเศษส่วนสูงที่สุด นำตัวแปร x_i จากตารางลงเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

หรือ $$x_i + \sum_{j=1}^{n} -\hat{a}_{ij} x_j = \hat{b}_i$$

โดยที่ :

x_j คือ ตัวแปรที่ให้ค่าคำเฉลยเป็นศูนย์ (zero variables = nonbasic)

$\hat{a}_{ij}$ คือ สัมประสิทธิของ x_j จากตารางคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้น

$\hat{b}_i$ คือ ค่าคงที่ของสมการ

จากนี้ ก็แยกสัมประสิทธิของตัวแปรและค่าคงที่ของสมการออกเป็นสองส่วน โดยให้ส่วนหนึ่งเป็นค่าเศษส่วนบวก (nonnegative fraction) และอีกส่วนหนึ่งเป็นจำนวนเต็ม (integer) ดังนี้

$$\hat{a}_{ij} = f(\hat{a}_{ij}) + \text{integer}$$

$$\hat{b}_i = f(\hat{b}_i) + \text{integer}$$

เมื่อจัดรูปสมการใหม่ โดยให้ส่วนที่เป็นจำนวนเต็มรวมอยู่ด้วยกัน จะได้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสม ดังนี้

$$\sum_{j=1}^{n} f'(\hat{a}_{ij}) x_j = f(\hat{b}_i) + \text{integer} \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

เขียนให้อยู่ในรูปอสมการเงื่อนไข เป็น

$$\sum_{j=1}^{n} f'(\hat{a}_{ij})x_j \quad > \quad f(\hat{b}_i)$$

และจะเขียนในรูปสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสม โดยตัวแปรเสริม " $\hat{s}$: Gomory slack variable"

$$\hat{s} \quad = \quad - f(\hat{b}_i) + \sum_{j=1}^{n} f'(\hat{a}_{ij})x_i$$

$$(i = 1,2,\ldots,m)$$

โดยที่ :

$f'(a_{ij})$ คือ ค่าเศษส่วนบวก ซึ่งเป็นสัมประสิทธิของ x_j อันได้จากการคำนวณโดยหลักเกณฑ์ต่อไปนี้ [1]

---

1. แนวคิด หลักการและวิธีการในการหาหลักเกณฑ์นี้ ท่านผู้อ่านที่สนใจสามารถหารายละเอียดได้ใน :

Ralph E.Gomory, "An Algorithm for the Mixed Integer Problem", *Rand Report*,RM - 25797 (july 7, 1960).

1. กรณี ตัวแปร x_j ต้องการเป็นจำนวนเต็ม

ก) ถ้า $f(\hat{a}_{ij}) \leqslant f(\hat{b}_i)$

แล้ว $f'(\hat{a}_{ij}) = f(\hat{a}_{ij})$

ข) ถ้า $f(\hat{a}_{ij}) \geqslant f(\hat{b}_i)$

$$\text{แล้ว} \quad f'(\hat{a}_{ij}) = \frac{f(\hat{b}_i)}{1 - f(\hat{b}_i)} \{1 - f(\hat{a}_{ij})\}$$

2. กรณี ตัวแปร x_j ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม

ก) ถ้า $\hat{a}_{ij} \geqslant 0$

แล้ว $f'(\hat{a}_{ij}) = \hat{a}_{ij}$

ข) ถ้า $\hat{a}_{ij} \leqslant 0$

$$\text{แล้ว} \quad f'(a_{ij}) = \frac{f(\hat{b}_i)}{1 - f(\hat{b}_i)} (- \hat{a}_{ij})$$

เมื่อสามารถหาสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสม ตามหลักเกณฑ์ข้างต้นนี้ได้แล้ว ก็นำสมการเงื่อนไขนี้ ลงเขียนต่อท้ายตารางซึ่งเป็นตารางคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้น จากนี้ก็ดำเนินการคำนวณตารางโดยวิธีคำนวณ (simplex method) ต่อไป ก็จะได้คำเฉลยที่ต้องการ อนึ่ง ถ้าหากว่าสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มเพียงสมการเดียวนี้ ยังไม่สามารถขจัดค่าเศษส่วนของคำเฉลยที่ต้องการได้ ก็ให้สร้างสมการเงื่อนไขตามหลักเกณฑ์ดังกล่าวข้างต้นซ้ำ ๆ กัน อีกต่อไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้คำเฉลยตามที่ต้องการ

ในที่นี้ เพื่อให้เข้าใจปัญหาของกระบวนการจำนวนเต็มแบบผสม ตลอดจนการคำนวณหาสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มและคำเฉลย จึงขอยกตัวอย่างแสดงการพิจารณาปัญหา และการหาคำเฉลยโดยวิธีตาราง ดังต่อไปนี้.-

ตัวอย่าง 4-2 : กระบวนการจำนวนเต็มแบบผสม

Maximize

$$R = 12x_1 t 9x_2$$

Subject to

$$2x_1 + x_2 \leqslant 12$$

$$3x_1 + 5x_2 \leqslant 45$$

$$2x_1 + 5x_2 \leqslant 30$$

and x_2 and s_3 with integer restrictions

x_1, s_1 and s_2 without integer restrictions

หมายเหตุ : s_1, s_2 และ s_3 คือ ตัวแปรเสริมของอสมการเงื่อนไขในแต่ละสมการ

ตามลำดับ

สร้างสมการเงื่อนไขให้อยู่ในรูปของสมการ :

Maximize

$$R = 12x_1 + 9x_2 + OS1 + 0s_2 + 0s_3$$

Subject to

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 12$$

$$3x_1 + 5x_2 + s_2 = 45$$

$$2x_1 + 5x_2 + s_3 = 30$$

and x_2 end s_3 with integer restrictions

x_1, s_1 end s_2 without integer restrictions

หรือ

Maximize

$$R = 12x_1 + 9x_2$$

Subject to

$$s_1 = 12 - 2x_1 - x_2$$

$$s_2 = 45 - 3x_1 - 5x_2$$

$$s_3 = 30 - 2x_1 - 5x_2$$

and x_2 and s_3 with integer restrictions

x_1, s_1 and s_2 without integer restrictions

ตารางคำนวณ :

นำค่าคงที่ และสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในสมการต่าง ๆ ลงเขียนในตารางคำนวณและดำเนินการคำนวณค่าตาราง ตามวิธีการของกระบวนการเชิงเส้น จนกระทั่งได้ค่าคำเฉลย ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4-7 :

	Constants	x_1	x_2	
R	0	12	9	
s_1	12	-2	-1	$\frac{12}{2} = 6$ //
s_2	45	-3	-5	$\frac{45}{3} = 15$
s_3	30	-2	-5	$\frac{30}{2} = 15$

ตาราง 4-8 :

	Constants	s_1	x_2	
R	72	-6		
x_1	6	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$
s_2	27	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{27}{\frac{7}{2}} = 7\frac{5}{7}$
s_3	18	1	-4	$\frac{18}{44} = 4\frac{1}{2}$ //

ตาราง 4-9 : ตารางคำเฉลยกระบวนการเชิงเส้น

	constants	s_1	"3
R	$85\frac{1}{2}$	-- 21 4	-- 4 3
x_1	$3\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
s_2	$11\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$
x_2	$4\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

ตาราง 4-9 นี้คือ ตารางคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้น ซึ่งจะมีค่าคำเฉลยดังนี้

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 = 3\frac{3}{4}, & s_1 = 0 \\ x_2 = 4\frac{1}{2}, & s_2 = 11\frac{1}{4} \\ & s_3 = 0 \end{array}\right\} \quad R = 85\frac{1}{2}$$

จากคำเฉลยข้างต้นนี้ จะเห็นได้ว่าค่าคำเฉลยของ x_2 ซึ่งต้องการเป็นจำนวนเต็ม แต่ยังได้ค่าเป็นเศษส่วนอยู่ ($x_2 = 4\frac{1}{2}$) ดังนั้น จึงจำเป็นต้องสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มเพื่อขจัดค่าเศษส่วนนี้ออกไป ซึ่งการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มดังกล่าวสามารถหาได้จากการพิจารณาสมการของตัวแปร x_2 ที่ได้ตาราง 4-9 ดังนี้ :

$$x_2 = 4\frac{1}{2} + \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_3$$

หรือ

$$x_2 - \frac{1}{4} s_1 + \frac{1}{4} s_3 = 4\frac{1}{2}$$

จากเงื่อนไขของตัวแปรคำเฉลย ตัวแปร s_1 ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นสัมประสิทธิของตัวแปรนี้ จึงหาได้จากหลักเกณฑ์ในกรณีที่ตัวแปรไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม ดังนี้ :

$$f' \ (s_1) = \frac{½}{1-½} \{-(-¼)\}$$

$$= ¼ \qquad (\text{เพราะ} - ¼ < 0)$$

สำหรับตัวแปร s_3 ต้องการเป็นจำนวนเต็ม สัมประสิทธิของตัวแปรนี้จึงหาได้จากหลักเกณฑ์กรณีตัวแปรต้องการเป็นจำนวนเต็ม ดังนี้ :

$$f' \ (s_3) = ¼ \qquad (\text{เพราะ} : ¼ < ½)$$

ดังนั้น อสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ในกรณีนี้ จะคือ :

$$¼ s_1 + ¼ s_3 \geqslant ½$$

และจะสามารถเขียนในรูปสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสม โดยตัวแปรเสริม $\hat{s}$ ดังนี้

$$\hat{s} = -½ + ¼ s_1 + ¼ s_3$$

จากนี้ก็นำสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสมนี้ ลงเขียนต่อท้ายตาราง 4-9 ดังที่ได้แสดงไว้ใน ตาราง 4-10 และดำเนินการคำนวณตารางต่อไปในลักษณะการหาค่าต่ำสุดของกระบวนการเชิงเส้นธรรมดา ซึ่งเมื่อได้ดำเนินการดังกล่าวข้างต้นนี้ ก็จะได้ตารางคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสม ดังตาราง 4-11 ต่อไปนี้

ตาราง 4-10

	Constants	s_1	s_3
R	$85\frac{1}{2}$	$-\frac{21}{4}$	$-\frac{3}{4}$
x_1	$3\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
s_2	$11\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$
x_2	$4\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
s	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
		$\frac{21/4}{1/4}$	$\frac{3/4}{1/4}$

ตาราง 4-11 ตารางคำเฉลยกระบวนการจำนวนเต็มผสม

	constants	s_1	s
R	84	$-\frac{0}{2}$	-3
x_1	4	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
s_2	13	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}$
x_2	4	$\frac{1}{2}$	-1
s_3	2	-1	4

จากตาราง 4-11 ซึ่งเป็นตารางคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสม ตารางดังกล่าวจะให้ค่าคำเฉลย ดังนี้ คือ

$$x_1 = 4 \qquad s_1 = 0$$

$$x_2 = 4 \qquad s_2 = 13$$

$$s_3 = 2 \qquad R = 84$$

$$\hat{s} = 0$$

คำเฉลยข้างต้นนี้ เป็นคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสมที่ถูกต้องตามเงื่อนไขของตัวแปรแล้ว กล่าวคือ x_2 และ s_3 ได้ค่าเป็นจำนวนเต็มตามที่ต้องการ สำหรับ x_1, s_1 และ s_2 นั้นจะเป็นจำนวนเต็มหรือไม่ก็ได้ แต่จากคำเฉลยข้างต้นได้ค่าตัวแปรดังกล่าวเป็นจำนวนเต็มโดยบังเอิญ

อนึ่ง โดยปกติแล้วถ้าคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้น กระบวนการจำนวนเต็มผสม หรือ กระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปร มิได้คำเฉลยอย่างเดียวกัน ค่าคำเฉลยที่ได้จากกระบวนการในแต่ละประเภท จะมีค่าสูงต่ำเป็นลำดับกันไป กล่าวคือ ถ้าเป้าหมายเป็นการหาค่าสูงสุด กระบวนการเชิงเส้นก็จะให้ค่าสูงกว่ากระบวนการจำนวนเต็มผสม และกระบวนการจำนวนเต็มผสมจะให้ค่าสูงกว่ากระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปร ในกรณีตรงกันข้ามถ้าเป้าหมายเป็นการหาค่าต่ำสุด กระบวนการเชิงเส้นก็จะให้ค่าต่ำกว่ากระบวนการจำนวนเต็มผสม และกระบวนการจำนวนเต็มผสมก็จะให้ค่าต่ำกว่ากระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปร เหตุที่เป็นดังนี้ก็เพราะว่า กระบวนการเชิงเส้นมีเงื่อนไขเกี่ยวกับค่าของตัวแปรน้อยที่สุด กล่าวคือ ค่าตัวแปรจะเป็นจำนวนเต็มหรือไม่ก็ได้ สำหรับ กระบวนการจำนวนเต็มผสม กำหนดเงื่อนไขให้บางตัวแปรที่กำหนด จะต้องให้ค่าเป็นจำนวนเต็ม จึงนับว่ามีเงื่อนไขมากกว่ากระบวนการเชิงเส้น แต่กระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปรนั้น กำหนดเงื่อนไขให้ทุกตัวแปรจะต้องได้ค่าเป็นจำนวนเต็มทั้งหมด จึงนับว่ามีเงื่อนไขมากที่สุด ฉะนั้นกระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปรจึงให้ค่าของเป้าหมายที่ด้อยที่สุด ตามลำดับความเข้มของเงื่อนไขของตัวแปรนั่นเอง

5. สรุป

กระบวนการจำนวนเต็ม คือ กระบวนการเชิงเส้นเฉพาะแบบ เพื่อหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของเป้าหมายที่กำหนด ภายใต้เงื่อนไขบางประการ โดยที่ตัวแปรคำเฉลยของกระบวนการ และตัวแปรเสริม จะต้องมีค่าเป็นจำนวนเต็มตามที่กำหนดด้วย ในการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มนั้น กระทำได้โดยดำเนินการตามวิธีการคำนวณ-ตารางเช่นเดียวกับกระบวนการเชิงเส้นปกติ หากแต่ว่าจะต้องมีสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผนวกเพิ่มเติมเข้าไปในกระบวนการนั้น ๆ ด้วย ทั้งนี้ก็เพื่อที่จะให้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มนี้ ทำหน้าที่ในการขจัดและปัดเศษค่าของตัวแปรต่าง ๆ ให้เป็นจำนวนเต็มตามที่กำหนดนั่นเอง

โดยเหตุที่กระบวนการจำนวนเต็มอาจแยกเป็นประเภทใหญ่ ๆ โดยทั่วไปได้สองแบบด้วยกัน คือ กระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปร ซึ่งต้องการค่าตัวแปรทุกตัว ทั้งที่เป็นตัวแปรคำเฉลยและตัวแปรเสริมเป็นจำนวนเต็ม และกระบวนการจำนวนเต็มผสม ซึ่งต้องการค่าตัวแปรคำเฉลยหรือตัวแปรเสริมบางตัวเท่านั้นเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นในการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม จึงมีวิธีการที่แตกต่างกันไปในแต่ละกรณี กล่าวคือ ในการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปร ตัวแปรทุกตัวรวมทั้งตัวแปรเสริมจะได้รับการพิจารณาเพื่อขจัดค่าเศษส่วนในลักษณะเดียวกันทั้งหมด แต่ถ้าเป็นกรณีกระบวนการจำนวนเต็มผสม การพิจารณาขจัดค่าเศษส่วนของตัวแปรก็จะดำเนินการตามลักษณะของแต่ละตัวแปรที่กำหนด ตัวแปรใดต้องการค่าเป็นจำนวนเต็มก็จะได้รับการพิจารณาขจัดค่าเศษส่วน สำหรับตัวแปรซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็มก็จะได้รับการพิจารณาเพียงเพื่อขจัดค่าส่วนเกินของเศษส่วนอย่างต่ำเท่านั้น จะไม่ได้รับการขจัดค่าเศษส่วนเพื่อให้เป็นจำนวนเต็มแต่อย่างใด

จากการที่กระบวนการแต่ละประเภทมีลักษณะการกำหนดค่าของตัวแปรที่แตกต่างกัน ดังนั้น ลำดับความเข้มของเงื่อนไขในแต่ละรูปแบบกระบวนการก็จะแตกต่างกันไปด้วย เช่นนี้แล้ว หากมิใช่การบังเอิญของแต่ละกระบวนการแล้วละก็ แต่ละประเภทของกระบวนการก็จะให้ค่าคำเฉลยและระดับค่าสูงสุดและต่ำสุดของเป้าหมายที่แตกต่างกันด้วย ในที่นี้ กระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปรมีความเข้มของเงื่อนไขมากที่สุดก็จะให้ค่าเป้าหมายที่ด้อยที่สุด กระบวนการเชิงเส้นปกติซึ่งไม่กำหนดค่าจำนวนเต็มของตัวแปรใด ๆ ก็จะมีความเข้มของเงื่อนไขน้อยที่สุด ดังนั้นกระบวนการจำนวนเต็มผสม จะมีความเข้มของเงื่อนไขในระดับกลาง จึงให้ค่าเป้าหมายในระดับกลางตามความเข้มของเงื่อนไขนั้น ๆ อย่างไรก็ตาม ค่าเป้าหมายของแต่ละประเภทของกระบวนการที่ได้เป็นคำเฉลยนั้น จะเป็นค่าเป้าหมายที่ดีที่สุดตามเงื่อนไขและลักษณะของกระบวนการนั้น ๆ ทั้งสิ้น

บรรณานุกรม

Balinski, M.L.and R.E. Quandt. "On an Integer Program for a Delivery Problem." *Operations Research*, 12 (March - April, 1964), 300 - 304.

Balinski, M.L. "Integer Programming : Methods, Uses, Computation." *Management Science*, 12 (November, 1965), 253 - 313.

Baumol, William J. *Economic Theory and Operation Analysis.* 2 nd ed. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice - Hall, Inc, 1965.

Beale, E.M. "Survey of Integer Programming ." *Operations Research Quarterly,* 16 (June 1965), 219 - 228.

Gomory, R.E. "An Algorithm for Integer Solution to Linear Programs," *Recent Advance in Mathematical Programming.* Edited by Robert L. Graves and Philip Wolfe. New York : McGraw - Hill Book Company, 1963.

Gomory, R.E. "An Algorithm for the Mixed Integer Problem. " *Rand Report,* RM - 25797 (July 7, 1960).

Haley, K.Brian. *Mathematical Programming for Business and Industry.* New York : St.Martin's press, Inc., 1967.

Hillier, Frederick S., and Lieberman, Gerald J . *Introduction to Operations Research.* San Francisco : publisher, 1967.

Kwak, N.K. *Mathematical Programming with Business Applications.* New York : McGraw - Hill Book Company, 1973.

Land, A.H. ; and Doig, A.G. "An Automatic Method of Solving. Discrete Programming Problem." *Econometrica,* 28 (July 1960), 497-520.

แบบฝึกหัด

1. ถ้าสมการต่อไปนี้ แสดงถึงค่าของตัวแปรคำเฉลยที่มีเศษส่วนมากที่สุด ซึ่งได้จากการคำนวณตารางของกระบวนการเชิงเส้น

1.1 $X_1 = 4\frac{1}{3} + \frac{2}{5} S_1 - \frac{7}{8} S_2 + \frac{1}{2} X_3$

1.2 $S_2 = 3\frac{3}{4} + \frac{3}{5} S_1 - \frac{2}{3} X_1 + \frac{1}{2} X_3 - \frac{2}{5} S_3$

1.3 $X_3 = \frac{7}{5} - \frac{1}{4} X_1 + \frac{1}{3} S_1 - \frac{4}{3} S_2 - \frac{5}{2} X_2$

1.4 $S_1 = \frac{3}{2} + \frac{7}{5} S_2 - \frac{1}{3} X_1 - \frac{6}{4} X_2 + \frac{9}{8} S_3$

จงหาสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม จากสมการข้างต้น

2. จงหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม จากกระบวนการเชิงเส้นซึ่งได้คำนวณตารางคำเฉลยแล้ว ดังต่อไปนี้

Maximize

$$R = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Subject to

$$3x_1 + x_2 + 2x3 \leq 36$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 < 33$$

$$2x2 + 3x_3 \leq 35$$

and x_1, x_2, x_2 = 0 or 1 or 2 or ... integer

ตารางคำเฉลยกระบวนการเชิงเส้น

	Constants	S_1	S_2	X_3
F	$85\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
X_1	$9\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
X_2	$6\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
S_3	$21\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$

3. จงหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มต่อไปนี้

Maximize

$$R = 12x_1 + 7x_2$$

Subject to

$$x_1 \leq 6$$

$$x_2 \leq 7$$

$$2x_1 + x_2 \leq 14$$

and $x_1, x_2 = 0$ or 1 or2 or . . . ..integer

4. จงหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มต่อไปนี้

Minimize

$$Z = 20X_1 + 30X_2$$

Subject to

$3X_1$ [illegible] X_2 [illegible] 6

$$3x1 + 5X_2 \geq 15$$

$$X_1 + x2 \geq 4$$

and X_1, X_2 = 0 or 1 or 2 or . . . integer

5. จงหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม ต่อไปนี้

Maximize

$$R = 4x1 + 3X_2$$

Subject to

$$2X_1 + X_2 \leq 4$$

$$3x1 + 5x_2 \leq 15$$

$$2X_1 + 5X_2 \leq 10$$

and X_1, X_2 = 0 or 1 or 2 or . . . integer

6. จงหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสม ต่อไปนี้

Maximize

$$R = 4x_1 + 3x_2$$

Subject to

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

and X_2 and S_3 with integer restrictions

X_1, S_1 and S_2 without integer restrictions

7. สมมุติว่า นายเศรษฐ์ เฮ็งปริมาณ ต้องการจะทำไข่เจียวหมูสับไว้รับประทาน ซึ่งในการประกอบอาหารนี้ เขาต้องการให้ไข่เจียวหมูสับมีคุณค่าทางอาหารตามหลักโภชนาการที่เขาเคยได้ยินมา กล่าวคือ จะต้องมีโปรตีนไม่น้อยกว่า 60 กรัม และมีคาร์โบไฮเดรทอย่างน้อย 400 กรัม ซึ่งในการทำไข่เจียวหมูสับนี้ เขาต้องใช้ไข่ไก่และเนื้อหมูประกอบกัน

ถ้าเขาทราบว่า ไข่ไก่แต่ละฟองมีโปรตีน 20 กรัม และมีคาร์โบไฮเดรท 100 กรัม

สำหรับเนื้อหมู แต่ละขีดมีโปรตีน 40 กรัม และมีคาร์โบไฮเดรท 600 กรัม

อยากทราบว่า ถ้าไข่ไก่ราคาฟองละ 1 บาท 80 สตางค์ และเนื้อหมูราคาขีดละ 6 บาท ดังนี้แล้ว นายเศรษฐ์ เฮ็งปริมาณ ควรจะต้องซื้อไข่ไก่และเนื้อหมูอย่างละเท่าไร จึงจะได้คุณค่าทางอาหารตามที่ต้องการ โดยสิ้นเปลืองค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด