บทที่ 4

กระบวนการจำนวนเต็ม

(INTEGER PROGRAMMING)

บทที่ 4

กระบวนการจำนวนเต็ม

(INTEGER PROGRAMMING)

หัวเรื่อง

1. ความหมาย
2. วิวัฒนาการ
3. ลักษณะปัญหา
4. การหาค่าเฉลย
5. สรุป

วัตถุประสงค์

เมื่อนักศึกษาได้ศึกษาบทที่ 4 นี้แล้ว สามารถ

1. อธิบายความหมายของกระบวนการจำนวนเต็มได้
2. อธิบายวิวัฒนาการของกระบวนการจำนวนเต็มได้
3. วิเคราะห์รูปลักษณะของปัญหาของกระบวนการจำนวนเต็ม ในรูปแบบต่างๆ ได้อย่างชัดเจน
4. วิเคราะห์และหาค่าเฉลยปัญหาของกระบวนการจำนวนเต็ม โดยวิธีการที่เหมาะสมของแต่ละรูปแบบได้
5. ประยุกต์ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกระบวนการจำนวนเต็มนี้ เข้ากับเหตุการณ์ปัจจุบันได้อย่างถูกต้อง

บทที่ 4
กระบวนการจำนวนเต็ม
(INTEGER PROGRAMMING)

1. ความหมาย :

กระบวนการจำนวนเต็ม คือ กระบวนวิธีทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดของเป้าหมายที่ตั้งไว้ ภายใต้ภาวะการณ์หรือเงื่อนไขบางประการ ซึ่งเป้าหมายจะต้องอยู่ในรูปของสมการเส้นตรง สำหรับเงื่อนไขนั้นอาจจะอยู่ในรูปของสมการหรืออสมการเส้นตรงก็ได้ และทั้งนี้ตัวแปรซึ่งเป็นคำเฉลยจะต้องอยู่ในรูปของจำนวนเต็ม (integer) ด้วย

จากความหมายของกระบวนการจำนวนเต็มข้างต้น จะเห็นได้ว่าแท้ที่จริงแล้วกระบวนการจำนวนเต็ม ก็คือ กระบวนการเชิงเส้น [1/] (linear programming) ซึ่งต้องการค่าของตัวแปรคำเฉลย (decision variables) เป็นจำนวนเต็มนั่นเอง ดังนั้นการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มนี้ อาจจะถือปฏิบัติเพื่อความสะดวกรวดเร็ว ด้วยการปัดเศษค่าของตัวแปรคำเฉลย ซึ่งได้จากการคำนวณโดยวิธีการของกระบวนการเชิงเส้นเสียเลยก็ได้ แต่อย่างไรก็ตามการปัดเศษค่าตัวแปรคำเฉลยดังกล่าว มักจะประสพปัญหาความยุ่งยากเกี่ยวกับการดำรงคำเฉลยให้เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดอยู่เสมอ ๆ เหตุที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะ

1/ สำหรับท่านผู้อ่านซึ่งไม่เคยศึกษา เรื่องกระบวนการเชิงเส้นมาก่อน สามารถศึกษาเรื่องนี้ได้ใน :

บุญสม ศิริโสภณา, <u>คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์</u> (EC 215), (กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์รามินทร์, 2523), หน้า 228-264.

โดยปกติแล้วคำตอบที่ได้จากวิธีการของกระบวนการเชิงเส้น จะเป็นคำเฉลยที่เป็นไปตามข้อกำหนดของเงื่อนไขแล้ว แต่เมื่อมีการปัดเศษค่าตัวแปรคำเฉลยเหล่านั้นเพื่อให้เป็นค่าจำนวนเต็มตามที่ต้องการ ค่าตัวแปรที่ปัดเศษแล้ว อาจจะทำให้ผลที่ได้ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดอีกต่อไปเลย ด้วยเหตุนี้ จึงได้มีการคิดค้นหาวิธีเฉพาะแบบเพื่อการแก้ปัญหากระบวนการจำนวนเต็มเกิดขึ้น

2. วิวัฒนาการ

วิธีการเฉพาะแบบสำหรับปัญหา กระบวนการจำนวนเต็ม ในปัจจุบันนี้มีอยู่ด้วยกันหลายวิธี ซึ่งวิธีการหนึ่งในหลาย ๆ วิธีที่นับว่าเป็นวิธีการที่ดีนั้น เห็นจะได้แก่วิธีการของ Ralph E. Gomory [1/] ซึ่งวิธีการดังกล่าวนี้สามารถใช้ได้กับ ปัญหากระบวนการจำนวนเต็มกรณีที่ทุก ๆ ตัวแปรคำแปรเฉลยต้องการเป็นจำนวนเต็ม และกรณีที่ตัวแปรคำเฉลยบางตัวเท่านั้นที่ต้องการให้เป็นจำนวนเต็ม ในที่นี้จะได้แสดงให้เห็นวิธีการของ Gomory ในกรณีดังกล่าวในลำดับต่อไป

[1/] Ralph E. Gomory, "Algorithm for Integer Solution to Linear Programming," in *Recent Advances in Mathematical Programming*, ed. by Robert L. Graves and Philip Wolfe (New York : McGraw-Hill Book Company, 1963), pp. 269302.

3. ลักษณะของปัญหา

ลักษณะปัญหากระบวนการจำนวนเต็มโดยทั่ว ๆ ไปแล้ว จะเขียนในรูปแบบกระบวนการทางคณิตศาสตร์เช่นเดียวกับกระบวนการเชิงเส้น กล่าวคือ กระบวนการจะประกอบด้วยองค์ประกอบที่สำคัญ 3 ส่วนด้วยกัน คือ .-

1. ส่วนเป้าหมาย (objective) ซึ่งเขียนในรูปสมการเชิงเส้น

2. ส่วนเงื่อนไข (constraints) ซึ่งเขียนในรูปสมการหรืออสมการเชิงเส้น

และ 3. ส่วนตัวแปรคำเฉลย (decision variables) ซึ่งมีไว้เพื่อกำหนดขอบข่ายค่าของตัวแปร ว่าต้องการตัวแปรใดบ้างเป็นจำนวนเต็ม

ลักษณะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของกระบวนการจำนวนเต็มนี้ อาจจะแสดงได้ในรูปแบบทั่วไป โดยสมมุติว่า มีตัวแปร n ตัว และมี m เงื่อนไข ดังนี้

1) กรณีตัวแปรคำเฉลยทุกตัวแปรต้องการเป็นจำนวนเต็ม

Maximize (minimize) : objective

$$R = P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n$$

Subject to : constraints

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq C_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq C_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq C_m$$

and : decision variables

$$x_1, x_2, \dots, x_n = 0 \text{ or } 1 \text{ or } 2 \text{ or } \dots \text{ integer}$$

2) กรณีตัวแปรคำเฉลยบางตัวแปรเท่านั้น ที่ต้องการเป็นจำนวนเต็ม

ในที่นี้ สมมุติว่า x_h, x_k และ x_l เท่านั้นที่ต้องการเป็นจำนวนเต็ม

Maximize (Minimize) : objective

$$R = P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots P_nx_n$$

Subject of : **constraints**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq C_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq C_2$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq C_m$$

and : **decision** variables

x_h, x_k and xl with integer **values**

หมายเหตุ : ส่วนของเงื่อนไข อาจจะอยู่ในรูปสมการและ/หรืออสมการก็ได้ และถ้าอยู่ในรูปอสมการ ค่าอสมการด้านซ้ายอาจจะมากกว่าด้านขวา หรือ ด้านขวาอาจจะมากกว่าด้านซ้ายก็ได้ (ตามรูปแบบทั่วไปข้างต้น แสดงเฉพาะกรณีอสมการด้านขวามากกว่าด้านซ้าย " < ")

4. การหาคำเฉลย

โดยวิธีการหาคำเฉลยของ Ralph E. Gomory นั้น อาศัยหลักแนวคิดที่ว่า กระบวนการจำนวนเต็ม ก็คือ กระบวนการเชิงเส้นที่ต้องการตัวแปรค่าคำเฉลยเป็นจำนวนเต็ม นั่นเอง ดังนั้น การหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม จึงอาจดำเนินการในรูปแบบเดียวกันกับการหาคำเฉลยของปัญหากระบวนการเชิงเส้น หากแต่ว่าในการหาคำเฉลยปัญหากระบวนการจำนวนเต็มนี้นั้น กระบวนการจะต้องมีเงื่อนไขกำหนดค่าจำนวนเต็มของตัวแปรคำเฉลยรวมอยู่ด้วย ซึ่งในรูปแบบทางคณิตศาสตร์นั้น สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มนี้ สามารถสร้างขึ้นโดยอาศัยสมการเงื่อนไขอื่น ๆ ที่กำหนดไว้แล้วในกระบวนการนั้น ๆ นั่นเอง

โดยหลักการแล้ว สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ก็คือ สมการซึ่งมีหน้าที่ในการปัดเศษของค่าตัวแปรคำเฉลยที่ยังไม่เป็นจำนวนเต็มให้เป็นค่าที่เป็นจำนวนเต็มตามที่ต้องการ ทั้งนี้ การปัดเศษดังกล่าวจะดำรงเงื่อนไขอื่น ๆ ที่มีอยู่แต่เดิมให้คงไว้ด้วย ดังนั้นค่าตัวแปรคำเฉลยอันเป็นผลลัพธ์ ก็จะเป็นค่าตัวแปรคำเฉลยที่เป็นไปตามเป้าหมายและอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดทุกประการ อนึ่งด้วยเหตุที่หลักการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มนี้ เป็นแนวคิดของ Gomory ดังนั้นสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มดังกล่าว จึงได้รับการขนานนามว่า "Gomory Constraint" ด้วย

อย่างไรก็ตาม ด้วยเหตุที่ปัญหาของกระบวนการจำนวนเต็มสามารถแบ่งออกเป็น 2 กรณีด้วยกัน คือ กรณีที่ทุก ๆ ตัวแปรคำเฉลยต้องการเป็นจำนวนเต็ม และกรณีที่ตัวแปรคำเฉลยบางตัวเท่านั้นที่ต้องการให้เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น ในรายละเอียดของสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มของแต่ละกรณีย่อมแตกต่างกันไป ซึ่งในที่นี้จะได้แสดงวิธีการหาสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มและคำเฉลยของปัญหาแต่ละกรณีเป็นลำดับไป

4.1 กระบวนการจำนวนเต็ม กรณีตัวแปรคำเฉลยทุกตัวแปรต้องการเป็นจำนวนเต็ม

เพื่อให้เกิดความเข้าใจในเรื่องเกี่ยวกับการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ตลอดจน

การหาคำเฉลยของปัญหากระบวนการจำนวนเต็ม กรณีตัวแปรคำเฉลยทุกตัวแปรต้องการเป็นจำนวนเต็ม จึงขอยกตัวอย่างเพื่อแสดงวิธีการดังกล่าว โดยจะแสดงในรูปเรขาคณิต เป็นแนวคิดเบื้องต้น และแสดงโดยตารางคำนวณในลำดับถัดไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4-1 : กระบวนการจำนวนเต็ม กรณีทุกตัวแปรต้องการเป็นจำนวนเต็ม

Maximize

$$R = 12x_1 + 8x_2$$

Subject to

$$x_1 \leq 5$$

$$x_2 \leq 7$$

$$2x_1 + x_2 \leq 12$$

and $x_1, x_2 = 0$ or 1 or 2 ... integer

1) การหาคำเฉลยโดยวิธีการของรูปแบบเรขาคณิต

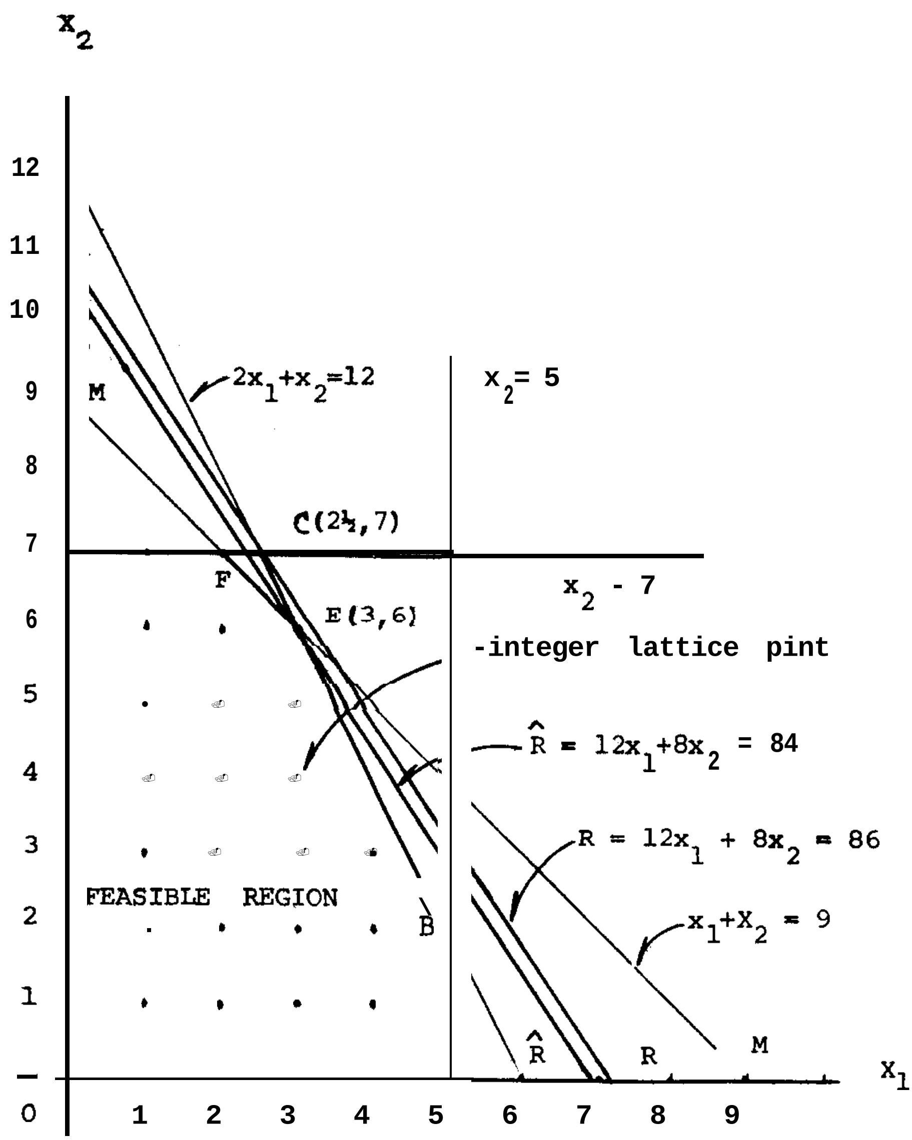
(Graphic Representation)

การหาคำเฉลยโดยวิธีการของรูปแบบเรขาคณิตของปัญหากระบวนการจำนวนเต็มข้างต้นนี้ กระทำได้โดยหลักเดียวกันกับการหาคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นนั่นเอง กล่าวคือ จะต้องนำสมการและอสมการเงื่อนไขทุกสมการเขียนลงในกระดาษตารางระยะ (graph) เพื่อพิจารณาหาบริเวณที่เป็นคำตอบได้ (feasible region) ซึ่งบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้นี้ก็คือพื้นที่อยู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดแล้วนั่นเอง จากนี้จึงนำสมการเป้าหมายมาเขียนลงในรูปเรขาคณิตดังกล่าว เพื่อพิจารณาว่า ตำแหน่งใดในบริเวณที่เป็นคำตอบได้ จะให้ค่าของเป้าหมายเป็นไปตามที่ต้องการ ทั้งนี้ตำแหน่งดังกล่าวจะต้องเป็น "จุดแห่งจำนวนเต็ม" (integer lattice point) ซึ่งให้ค่าคำเฉลยเป็นจำนวนเต็มตามที่กำหนดด้วย

อนึ่ง จากการที่กระบวนการจำนวนเต็มนี้ ต้องการค่าตัวแปรคำเฉลยเป็นจำนวนเต็มทุกตัว ดังนั้นตำแหน่งที่จะเป็นคำเฉลยได้ สิ่งหมายถึงตำแหน่งบางตำแหน่งที่เป็น "จุดแห่งจำนวนเต็ม" ในบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้เท่านั้น (แตกต่างจากกระบวนการเชิงเส้น ซึ่งทุก ๆ ตำแหน่ง ทุก ๆ จุดในบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ จะเป็นตำแหน่งคำเฉลยได้ทั้งสิ้น) เมื่อเป็นเช่นนี้ ในการหาคำเฉลยโดยวิธีเรขาคณิตของปัญหากระบวนการจำนวนเต็ม สิ่งนิยมที่จะกำหนดตำแหน่งที่จะเป็นคำตอบได้ให้เห็นเด่นชัด นั่นคือจะเขียนจุดแห่งจำนวนเต็มไว้ในบริเวณที่เป็นคำตอบได้ไว้ด้วยนั่นเอง

จากปัญหาตัวอย่างกระบวนการจำนวนเต็มข้างต้น สามารถเขียนรูปเรขาคณิตแสดงบริเวณที่เป็นคำตอบได้ พร้อมจุดแห่งจำนวนเต็มและตำแหน่งคำเฉลย ดังต่อไปนี้ :–

รูปเรขาคณิต 4-1 กรณีตัวแปรค่าเฉลยทุกตัวแปรต้องการเป็นจำนวนเต็ม



จากรูปเรขาคณิต 4-1 ข้างต้น จะเห็นได้ว่า เมื่อนำเงื่อนไขทั้งหมดของกระบวนการลงเขียนในกระดาษตารางระยะแล้ว บริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ (feasible region)

ก็จะคือ พื้นที่ห้าเหลี่ยม OABCD นั่นเอง และเมื่อได้นำสมการเป้าหมายลงเขียนในรูปเรขาคณิตเดียวกันนี้ ก็จะได้ตำแหน่งคำเฉลยตามเป้าหมายการหาค่าสูงสุด ณ ตำแหน่ง C(2½,7) โดยที่ตำแหน่ง C นี้ แสดงว่า $x_1 = 2\frac{1}{2}$, $x_2 = 7$ และ $R = 86$ ซึ่งค่าคำเฉลยนี้เป็นคำเฉลยกรณีการหาค่าสูงสุดของกระบวนการเชิงเส้น (linear programming) ธรรมดา ๆ นั่นเอง อย่างไรก็ตาม ในที่นี้ตัวแปรคำเฉลยที่ต้องการจะต้องเป็นจำนวนเต็มทั้งหมด ดังนั้น ตำแหน่งที่จะเป็นคำตอบได้ จึงเป็นเพียงบางตำแหน่งซึ่งเป็นจุดแห่งจำนวนเต็ม (integer lattice points) ภายในบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้เท่านั้น ซึ่งจุดแห่งจำนวนเต็มดังกล่าวได้แสดงไว้แล้วในบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ข้างต้นนั้น

ในทางปฏิบัติ เมื่อได้กำหนดจุดแห่งจำนวนเต็มแล้ว ตำแหน่งคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม ก็จะหาได้จาก การเลื่อนเส้นสมการเป้าหมายจากเส้น RR ลงมาทีละน้อย จนกว่าเส้นสมการเป้าหมายจะผ่านมาถึงจุดแห่งจำนวนเต็มจุดแรกภายในบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้นั้น ในที่นี้จุดแห่งจำนวนเต็มจุดแรก หลังจากที่เลื่อนเส้นสมการเป้าหมายลงมา คือ จุด E และเส้นสมการเป้าหมายที่ผ่านจุด E นี้ ก็คือ เส้น $\hat{R}\hat{R}$ ดังนั้น จุด E (3,6) จึงเป็นตำแหน่งคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มตามเป้าหมายของการหาค่าสูงสุด โดยที่

$x_1 = 3$, $x_2 = 6$ และ $\hat{R} = 84$ นั่นเอง

อนึ่ง โดยหลักการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มโดยแท้จริงแล้ว คำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มนั้น อาจหาได้โดยตรงจากกระบวนการจำนวนเต็มเบ็ดเสร็จ ซึ่งกระบวนการจำนวนเต็มเบ็ดเสร็จนี้ หมายถึง กระบวนการที่ประกอบด้วย สมการหรืออสมการเงื่อนไขที่ได้กำหนดไว้แต่เดิม กับ เงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม (Gomory Constraint) ที่ได้จากการคำนวณเพิ่มเติม โดยอาศัยข้อกำหนดของเงื่อนไขที่มีอยู่แต่เดิมนั้นนั่นเอง ในที่นี้การคำนวณเพิ่มเติม เพื่อให้ได้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มมานั้น ไม่สามารถแสดงได้โดยวิธีเรขาคณิต ในขั้นนี้จึงจะยังไม่แสดงให้เห็น แต่จะแสดงวิธีการดังกล่าวนี้ในลำดับต่อไป เมื่อได้ดำเนินการหาคำเฉลยโดยทางคำนวณตามแบบของ Gomory แล้ว

อย่างไรก็ตาม สำหรับปัญหาตัวอย่าง 4-1 นี้ หากได้ทำการคำนวณเพิ่มเติมแล้ว ก็จะได้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มเป็น : $x_1 + x_2 \leqslant 9$ และเมื่อนำสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มนี้ ลงเขียนในรูปเรขาคณิต ก็จะได้เส้นแสดงเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม MM ดังที่แสดงไว้แล้วในรูปเรขาคณิต 4-1 ข้างต้น ดังนั้นเมื่อนำสมการเงื่อนไข MM ลงเขียนในรูปเรขาคณิต 4-1 ด้วยแล้ว บริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ซึ่งจะให้ค่าคำเฉลยเป็นจำนวนเต็ม ก็จะคือพื้นที่หกเหลี่ยม OABEFD นั่นเอง ฉะนั้นตำแหน่งคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม ซึ่งกระทำโดยลักษณะเช่นนี้ ก็จะเป็นตำแหน่ง ณ จุด E บนเส้นสมการเป้าหมาย $\hat{R}\hat{R}$ เช่นเดียวกันกับการหาคำเฉลย โดยวิธีการเลื่อนเส้นสมการเป้าหมายนั่นเอง

สรุปคำเฉลย

กระบวนการเชิงเส้น

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 24 \\ x_2 &= 7 \end{aligned}\right\} \quad R = 86$$

กระบวนการจำนวนเต็ม

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 6 \end{aligned}\right\} \quad R = 84$$

2) การหาคำเฉลยโดยวิธีการของตารางคำนวณ (Simplex Method)

ด้วยเหตุที่กระบวนการจำนวนเต็ม คือ กระบวนการเชิงเส้นซึ่งต้องการค่าตัวแปรคำเฉลยเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม จึงอาจจะดำเนินการโดยวิธีการของตารางคำนวณ (Simplex Method) เช่นเดียวกันกับกระบวนการเชิงเส้นได้

เพียงแต่ว่าในการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มนั้น จะต้องมีสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มเพิ่มเติมเข้าไปในกระบวนการของปัญหานั้น ๆ ด้วย ทั้งนี้ก็เพื่อจะจำกัดให้ตัวแปรคำเฉลยได้ค่าที่เป็นจำนวนเต็มตามที่ต้องการ

ในการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม โดยวิธีของตารางคำนวณนี้ การคำนวณจะเริ่มต้นจากการหาคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นธรรมดา ๆ กล่าวคือ กระบวนการเชิงเส้นดังกล่าว เป็นกระบวนการดั้งเดิมที่ยังไม่ได้เพิ่มเติมสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มใด ๆ เข้าไปเลย เมื่อได้คำเฉลยตามเป้าหมายของกระบวนการเชิงเส้นแล้ว ก็นำค่าตัวแปรคำเฉลยที่ได้นี้มาพิจารณา ทั้งนี้ถ้าหากว่าค่าตัวแปรคำเฉลยทุกตัวแปรได้ค่าเป็นจำนวนเต็ม คำเฉลยจากกระบวนการเชิงเส้นนี้ ก็จะเป็นคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มนั่นเอง แต่ถ้าหากว่า ค่าคำเฉลยที่ได้นั้นยังปรากฏค่าเศษส่วน (fractional values) ของตัวแปรบางตัวอยู่ ก็แสดงว่าคำเฉลยจากกระบวนการเชิงเส้น ยังไม่เป็นคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม ดังนั้น ถ้าต้องการให้ได้ค่าคำเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มก็จะต้องมีการคำนวณเพิ่มเติมเพื่อขจัดค่าเศษส่วนเหล่านั้นออกไป การคำนวณเพิ่มเติมนี้ ในขั้นแรกก็เพื่อจะให้ได้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนมาดำเนินการต่อไป ซึ่งการคำนวณเพื่อสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มนี้ สามารถดำเนินการตามหลักแนวคิดของ Ralph E. Gomory ที่ได้กล่าวนำไว้ในเบื้องต้นนั่นเอง และเมื่อได้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ซึ่งเรียกกันว่า "Gomory Constraint" แล้ว ก็นำสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มที่ได้นี้ ลงเขียนต่อท้ายตารางของตารางสุดท้ายที่ได้จากการคำนวณของกระบวนการเชิงเส้น จากนี้ก็ดำเนินการคำนวณต่อไปโดยวิธีการของกระบวนการเชิงเส้นเช่นเดิม แต่ว่าการคำนวณครั้งนี้ กระทำในลักษณะการหาค่าต่ำสุด (minimization) เมื่อดำเนินการคำนวณในตารางแล้ว ก็จะได้คำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มที่ต้องการ กล่าวคือ จะได้ค่าตัวแปรคำเฉลยเป็นจำนวนเต็มทุกตัวแปร อนึ่ง ถ้าหากว่าการคำนวณโดยการเพิ่มเติมสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มเพียงครั้งเดียว ยังไม่สามารถขจัดค่าเศษส่วนของตัวแปรได้หมดทุกตัว ก็ให้สร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มขึ้นซ้ำอีก แล้วดำเนินการเหมือนกับการสร้างครั้งแรก ให้กระทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนกว่าค่าตัวแปรทุก ๆ ตัวจะเป็นค่าจำนวนเต็มตามที่ต้องการ

ในที่นี้ เพื่อให้เข้าใจและสามารถสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ตลอดจนการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มนี้ จึงขอยกตัวอย่างแสดงวิธีการคำนวณโดยตารางจากปัญหาตัวอย่าง 4-1 ที่เคยแสดงโดยวิธีการของเรขาคณิตมาแล้ว ซึ่งปัญหามีกระบวนการดังนี้

แบบกระบวนการจำนวนเต็ม :

Maximize

$$R = 12x1 + 8x_2$$

Subject to

$$x_1 \leqslant 5$$

$$x_2 \leqslant 7$$

$$2x_1 + x_2 \leqslant 12$$

and x_{12} x $=$ 0 or 1 or 2 or . . . integer

สร้างอสมการเงื่อนไข ให้อยู่ในรูปของสมการ :

โดยการเติมตัวแปรเสริม (slack variables) เข้าไปในอสมการ จะได้สมการเงื่อนไขและกระบวนการเป็น ดังนี้

Maximize

$$R = 12x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

Subject to

$$x_1 + s_1 = 5$$

$$x_2 + s_2 = 7$$

$$2x_1 + x_2 + s_3 = 12$$

and x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 = 0 or 1 or 2 or . . . integer

หมายเหตุ : 1) s_1, s_2 และ s_3 คือ ตัวแปรเสริม (slack variables) ที่จะทำให้ค่าสมการด้านซ้ายมือเท่ากับทางด้านขวามือ

2) s_1, s_2 และ s_3 ในสมการเป้าหมาย อาจไม่จำเป็นต้องมีไว้ก็ได้ ทั้งนี้เพราะสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเสริมทั้งสามเป็นศูนย์ "0" หมด นั่นคือค่าของตัวแปรเสริมทั้งสามดังกล่าว ไม่มีอิทธิพลใด ๆ ต่อเป้าหมาย "R" ของกระบวนการแต่อย่างใด

หรือ

Maximize

$$R = 12x_1 + 8x_2$$

Subject to

$$s_1 = 5 - x_1$$

$$s_2 = 7 - x_2$$

$$s_3 = 12 - 2x_1 - x_2$$

and x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 = 0 or 1 or 2 or . . . integer

ตารางคำนวณ :

นำค่าคงที่ และสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในสมการต่าง ๆ ลงเขียนในตารางคำนวณ (Simplex Tableau) และดำเนินการคำนวณค่าตาราง ตามวิธีการหาคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้น (linear programming) จนกระทั่งได้ค่าคำเฉลย ดังตารางที่จะแสดงเป็นลำดับดังต่อไปนี้ [1/]

[1/] การคำนวณตารางในที่นี้ ใช้วิธีการคำนวณของ William J. Baumol ซึ่งจะหาดูได้ใน :

- William J.Baumol, *Economic Theory and Operation Analysis* (3 rd ed., Englewood Ciffs, New Jersey : Printice-Hall, Inc., 1972), pp 70-102.

- บุญล้ม ศิริโสภณา, หน้า 228-264.

ตาราง 4-1

	Constants	x_1	x_2	
R	0	12	8	
s_1	5	- 1	0	$\frac{5}{1} = 5$ //
s_2	7	0	- 1	
s_3	12	- 2	- 1	$\frac{12}{2} = 6$

RlCl-4 4-2

	Constants	s_1	x_2	
R	60	- 12	8	
x_1	5	-1	0	
s_2	7	0	- 1	$\frac{7}{1} = 7$
s_3		2	- 1	$\frac{2}{1} = 2$ //

ตาราง 4-3

	Constants	s_1	s_3	
R	76	4	- 8	
x_1	5	- 1	0	$\frac{5}{1} = 5$
s_2	5	- 2	1	$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ //
x_2	2	2	- 1	

ตาราง 4-4 : ตารางคำเฉลยกระบวนการเชิงเส้น

	Constants	s_2	s_3
R	86	- 2	- 6
x_1	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
s_1	$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	7	- 1	0

ตาราง 4-4 ที่ได้ข้างต้นนี้ คือ ตารางแสดงคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นแล้ว ซึ่งค่าคำเฉลยนี้ คือ :

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 = 2\tfrac{1}{2}, & s_1 & = & 24 \\ x_2 = 7, & s_2 & = & 0 \\ & s_3 & = & 0 \end{array}\right\} \quad R = 86$$

อนึ่ง คำเฉลยที่ได้จากการคำนวณโดยตารางนี้ จะเป็นเช่นเดียวกับคำเฉลยที่ได้จากวิธีเรขาคณิต ซึ่งได้คำเฉลย ณ ตำแหน่ง C ตามรูปเรขาคณิต 4-1 นั่นเอง

อย่างไรก็ตาม จากคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นที่ได้นี้ จะเห็นว่าค่าของตัวแปรคำเฉลยบางตัว อันได้แก่ $x_1 = 2\tfrac{1}{2}$ และ $s_1 = 2\tfrac{1}{2}$ ยังไม่เป็นจำนวนเต็มดังที่ต้องการ ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องทำการคำนวณเพิ่มเติม เพื่อสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม (Gomory Constraint) ในอันที่จะขจัดค่าเศษส่วนของตัวแปร x_1 และ s_1 ต่อไป (กระบวนการจำนวนเต็ม ต้องการค่าตัวแปรทุกตัว ทั้งที่เป็นตัวแปรที่แท้ จริง: x_i และตัวแปรเสริม: s_i เป็นจำนวนเต็ม)

ในการคำนวณเพื่อสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มนั้น ขั้นแรกจะต้องพิจารณาก่อนว่า ตัวแปรใดบ้างที่ต้องการให้เป็นจำนวนเต็มแต่ยังได้ค่าไม่เป็นจำนวนเต็ม จากนี้ก็นำตัวแปรเหล่านั้นมาพิจารณาในขั้นที่สอง ซึ่งการพิจารณาในขั้นนี้ เป็นการเลือกตัวแปรที่จะนำไปสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ซึ่งโดยหลักเหตุและผลแล้ว จะต้องเลือกตัวแปรซึ่งมีค่าเศษส่วนสูงที่สุด แต่ถ้าค่าเศษส่วนของตัวแปรเหล่านั้นเท่ากัน ก็ให้เลือกตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งก็ได้จะมีผลเช่นเดียวกัน

จากตัวอย่างที่ได้ดำเนินการมาจนบัดนี้ ได้พบแล้วว่าตัวแปรซึ่งต้องการค่าเป็นจำนวนเต็ม แต่ยังได้ค่าเป็นเศษส่วนอยู่ ก็คือ x_1 และ s_1 แต่เมื่อได้พิจารณาค่าเศษส่วนของตัวแปร

ทั้งสองนี้แล้ว จะพบว่าตัวแปรทั้งสองมีค่าเศษส่วนที่เท่ากัน คือ " ½" (พิจารณาเฉพาะค่าเศษส่วน ค่าจำนวนเต็มไม่พิจารณา) ดังนั้นจะเลือกตัวแปร x_1 หรือ s_1 เพื่อนำมาสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มก็ได้ ในที่นี้ เพื่อให้การเลือกเป็นไปตามลำดับจะขอเลือกตัวแปร x_1

เมื่อเลือกตัวแปร (x_1) ที่จะนำไปสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มได้แล้วก็แยกสมการของตัวแปรดังกล่าวนี้ ออกจากตารางคำนวณสุดท้าย (ตาราง 4-4) ที่ได้จากกระบวนการเชิงเส้น โดยนำมาเขียนไว้ต่างหากจากตารางได้ดังนี้

$$x_1 \quad = \quad 2\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}s_2 - \tfrac{1}{2}s_3$$

หรือ $$x_1 - \tfrac{1}{2}s_2 + \tfrac{1}{2}s_3 \quad = \quad 2\tfrac{1}{2}$$

จากนี้ก็แยกสัมประสิทธิ์และค่าคงที่ของสมการข้างต้นออกเป็นสองส่วน โดยให้ส่วนหนึ่งเป็นจำนวนเต็ม (integer) อีกส่วนหนึ่งเป็นค่าเศษส่วนบวก (nonnegative fraction) ดังนี้

$$(1+0)x_1 + (-1+\tfrac{1}{2})\ s_2 + (0+\tfrac{1}{2})\ s_3 \quad = \quad 2 + \tfrac{1}{2}$$

นำตัวแปรซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มบวก (integer coefficients) ย้ายออกไปทางด้านขวามือ

$$\tfrac{1}{2}\ s_2 + \tfrac{1}{2}\ s_3 \quad = \quad \tfrac{1}{2} + (2 - x_1 + s_2)$$

ด้วยเหตุที่ ค่าตัวแปรในกระบวนการจำนวนเต็ม จะต้องเป็นจำนวนเต็มบวก (**nonnegative integer**) ดังนั้นค่าในวงเล็บก็จะต้องเป็นจำนวนเต็มบวกด้วย และเมื่อจัดให้อยู่ในรูปอสมการแล้ว ก็จะได้อสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ดังนี้ :

$$\tfrac{1}{2} s_2 + 4 s_3 = 4 + \text{integer}$$

หรือ $$\tfrac{1}{2} s_2 + \tfrac{1}{2} s_3 \geq 4 \quad : \text{ Gomory Constraint}$$

อนึ่ง อสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มข้างต้นนี้ สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของอสมการเงื่อนไขสามัญกระบวนการเชิงเส้นทั่ว ๆ ไปได้ ซึ่งรูปแบบดังกล่าวได้แสดงไว้แล้วด้วยเส้น MM ในกรณีการหาคำเฉลยโดยวิธีการเรขาคณิตนั่นเอง ในที่นี้จะแสดงวิธีการแปลงอสมการดังกล่าวต่อไปนี้

จากอสมการเงื่อนไขเดิมของกระบวนการ

$$x_2 \leq 7$$

แปลงให้อยู่ในรูปสมการ โดยการเติมตัวแปรเสริม (s_2)

$$x_2 + s_2 = 7$$

หรือ $$s_2 = 7 - x_2 \qquad //$$

และจากอสมการ

$$2x_1 + x_2 \leq 12$$

แปลงให้อยู่ในรูปสมการ

$$2x_1 + x_2 + s_3 = 12$$

หรือ $$s_3 = 12 - 2x_1 - x_2 \qquad //$$

แทนค่า s_2 และ s_3 ในอสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม