

2. นำค่าความเสี่ยงของแต่ละแถว ลงเขียนกำกับไว้ท้ายแถวของแต่ละแถวนั้น ๆ
3. พิจารณาสัดส่วนการขนส่งให้แก่แถวซึ่งมีความเสี่ยงสูงที่สุด โดยสัดส่วนจำนวนการขนส่งที่มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ลงในช่องการขนส่งซึ่งเสียต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยต่ำที่สุดของแถวนั้น ๆ
4. พิจารณาผลผลิตและความต้องการของแถวซึ่งได้ดำเนินการสัดส่วนแล้วตามข้อ 3 ว่า ผลผลิตและ/หรือความต้องการในแถวเหล่านั้น ได้ถูกนำไปใช้หรือได้รับผลผลิตครบถ้วนตามความต้องการแล้วหรือไม่ ถ้าหากแถวใดครบแล้ว ให้ขีดคร่อมแถวนั้น เสีย ทั้งนี้ เพื่อเป็นที่สังเกตและลดความสับสน พร้อมทั้ง เป็นการชี้ชัดด้วยว่าแถวดังกล่าวได้สัดส่วนครบถ้วนแล้ว ไม่จำเป็นต้องพิจารณาอีกต่อไป
5. ตรวจสอบค่าความเสี่ยงของแถวที่ยังมีการขนส่งว่างเหลืออยู่ เพื่อให้ทราบว่าค่าความเสี่ยงเหล่านั้นมีการเปลี่ยนแปลงหรือไม่ (ค่าความเสี่ยงของแถวต่าง ๆ อาจเปลี่ยนแปลงไป เมื่อเกิดการสัดส่วนตามข้อ 4 แล้ว ทั้งนี้ด้วยเหตุที่ว่า เมื่อเกิดการสัดส่วนนี้ขึ้นนั้นบางแถวอาจจะได้รับการสัดส่วนจนครบถ้วน และไม่จำเป็นต้องนำมาพิจารณาต่อไปอีก ซึ่งผลดังกล่าวนี้อาจจะทำให้ ช่องการขนส่งซึ่งเสียต้นทุนต่ำที่สุดหรือต่ำที่สุดรองลงมาถูกยกเลิกจากการพิจารณาไปด้วย)
 - ก. ถ้าค่าความเสี่ยงของแถวต่าง ๆ ซึ่งยังเหลืออยู่นั้น ไม่มีการเปลี่ยนแปลงใด ๆ ก็ให้ดำเนินการสัดส่วนต่อไป โดยย้อนกลับไปที่ดำเนินการตามขั้นตอนที่ 3 ข้างต้น
 - ข. ถ้าค่าความเสี่ยงของแถวบางแถวได้เปลี่ยนแปลงไป ให้พิจารณาหาค่าความเสี่ยงของแถวดังกล่าว ตามข้อเท็จจริงใหม่นี้ (ตามขั้นตอนที่ 1) และนำค่าความเสี่ยงที่ได้ใหม่ ลงเขียนกำกับต่อท้ายค่าความเสี่ยง เดิมในแถวนั้น ๆ จากนั้นก็ย้อนกลับไปที่ดำเนินการ ตามขั้นตอนที่ 3 ข้างต้น
6. เมื่อแถวทุกแถวหรือผลผลิตจากโรงงานต่าง ๆ และความต้องการของตลาดที่มีอยู่ทั้งหมด ได้รับการสัดส่วนการขนส่งจนครบถ้วนตามที่กำหนดแล้ว ก็จะได้รับแบบจำลองการขนส่งที่เป็นจริงได้เบื้องต้นดังต้องการ

จากตัวอย่าง ตาราง 3 - 18 เมื่อดำเนินการจัดสรรการผลิต โดยวิธีประมาณการแบบไวเกิล ตามขั้นตอนข้างต้นแล้ว จะได้แบบค่าเฉลยการผลิตที่เป็นจริงได้เบื้องต้น ดังนี้

ตาราง 3 - 19 ตารางแบบค่าเฉลยการผลิตที่เป็นจริงได้เบื้องต้น โดยวิธีประมาณการแบบไวเกิล

ตลาด โรงงาน	โรงงาน				ผลผลิต	ความเสี่ยง (จำนวนลงโทษ)	
	I	II	III	IV			
A	5 0	8 (20)	12 (40)	6 -	0	60	1 2 4 0
B	5 2	9 3	10 (10)	4 (70)		80	1 5 1 0
C	3 (40)	6 (20)	13 3	7 3		60	3 1 7
ความต้องการ	40	40	50	70		200	
ความเสี่ยง (จำนวนลงโทษ)	2	2	2	2			

จากตาราง 3 - 19 เมื่อทำการทดสอบความสมบูรณ์ของแบบค่าเฉลย โดยวิธีก้าวข้ามแล้ว จะพบว่า ค่าประเมินการผลิตของช่วงการผลิตซึ่งว่างอยู่นั้น ทุกช่องมีค่าประเมินเป็น "บวก"หมด ไม่มีช่องใดเป็น "ลบ" ที่จะแสดงว่า สามารถโยกย้ายเปลี่ยนแปลงการผลิตใด ๆ เพื่อลดต้นทุนการผลิตรวมได้เลย (ดังที่ได้แสดงไว้พร้อมแล้วในตาราง 3 - 19) ดังนั้นจะแสดงว่าแบบการผลิตในตาราง 3 - 19 นี้ เป็นแบบการผลิตที่สมบูรณ์ที่สุดแล้ว และเป็นแบบการผลิตซึ่งมีรูปแบบเช่นเดียวกับแบบค่าเฉลยการผลิตโดยวิธีตะวันตกเฉียงเหนือในตาราง 3 - 7 นั้นเอง ดังนั้นรูปแบบค่าเฉลย ก็จะมี 4 รูปแบบเช่นเดียวกัน

4.5 การหาค่าเฉลี่ย กรณีปัญหาต้องการค่าสูงสุด (A Maximization Problem)

การหาค่าเฉลี่ยที่ได้แสดงมาโดยลำดับของแต่ละวิธีการที่ได้กล่าวมาข้างต้นนั้น เป็นการหาค่าเฉลี่ยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น กรณีปัญหาต้องการค่าต่ำสุดทั้งสิ้น อย่างไรก็ตาม ในความเป็นจริงแล้วปัญหาการขนส่ง กรณีต้องการค่าสูงสุดก็ยังคงมีอยู่ แต่เป็นกรณีที่ยากและฝืนน้อย เพราะว่าโดยปกติแล้วกำไรหรือผลประโยชน์ต่อหน่วย อันเกิดจากการขนส่งไปสู่จุดหมายต่าง ๆ มักไม่ค่อยแตกต่างกัน นอกจากนี้ การหากำไรหรือผลประโยชน์ ยังหาได้ ยากกว่าการหาต้นทุนการขนส่งเสียอีก ถึงกระนั้นก็ตามในที่นี้เพื่อให้ได้เข้าใจปัญหาการขนส่งทั้งกรณีต้องการค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด จึงขอกล่าวถึงกรณีการหาค่าสูงสุดไว้ด้วย

โดยเหตุที่การหาค่าสูงสุดและการหาค่าต่ำสุด เป็นสิ่งที่ตรงกันข้ามผกผันกัน ดังนั้นในการหาค่าเฉลี่ยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น ของปัญหาการขนส่ง กรณีต้องการค่าสูงสุด ก็ย่อมจะต้องตรงกันข้ามและผกผันกับการหาค่าเฉลี่ย โดยวิธีต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วในกรณีการหาค่าต่ำสุดนั่นเอง กล่าวคือ กรณีต้องการหาค่าต่ำสุดได้ยึดเป้าหมายและดำเนินการจัดสรรการขนส่ง โดยพิจารณาของภาระขนส่งที่จะก่อให้เกิดต้นทุนการขนส่งต่ำที่สุดเป็นหลักสำหรับการหาค่าสูงสุดก็จะดำเนินการโดยนัยเดียวกัน แต่ตรงกันข้ามกัน คือ ยึดเป้าหมายและดำเนินการจัดสรรการขนส่งโดยพิจารณาของภาระขนส่งที่จะก่อให้เกิดกำไร หรือผลประโยชน์สูงสุดเป็นหลัก สำหรับการทดสอบความสมบูรณ์ของค่าเฉลี่ยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น ทั้งสองกรณีดำเนินการเช่นเดียวกันทุกประการ หากแต่ว่าค่าประเมินการขนส่งในกรณีต้องการค่าสูงสุดจะต้องเป็นลบ " - " หมดทุกช่องเสียก่อน จึงจะได้ค่าเฉลี่ยที่สมบูรณ์ที่สุด แต่ถ้ายังปรากฏว่าค่าประเมินของของภาระขนส่งที่วางอยู่ช่องใดเป็นบวกอยู่แสดงว่ายังสามารถเพิ่มกำไรหรือผลประโยชน์ได้อีก ซึ่งจะต้องมีการโยกย้ายการขนส่งต่อไป จนกว่าค่าประเมินของทุกช่องเป็นลบหมดดังกล่าว

ในที่นี้เพื่อให้เกิดความเข้าใจในการจัดสรรการขนส่งดังกล่าวข้างต้น จึงยกตัวอย่างปัญหาการขนส่งกรณีต้องการค่าสูงสุด โดยตัวเลขซึ่งปรากฏอยู่ในกรอบมุมบนด้านซ้ายของแต่ละช่องการขนส่ง แสดงกำไรต่อหน่วยอันเกิดจากการขนส่งนั้น ๆ ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 3 - 20 ตารางกำไรการขนส่ง

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	8	7	8	10	75
B	7	11	9	8	60
C	9	6	7	8	90
ความต้องการ	60	45	75	45	225

ตาราง 3 - 20 แสดงกำไรต่อหน่วย อันเกิดจากการจัดสรรผลผลิตของโรงงานต่าง ๆ ไปสู่ตลาด ตามกำลังผลิตและความต้องการที่กำหนด ในนี้เพื่อให้เข้าใจหลักการและสามารถดำเนินการได้รวดเร็ว จึงขอแสดงวิธีดำเนินการหาค่าเฉลี่ยที่เป็นจริงได้เบื้องต้นโดยวิธี สัด ดังนี้

โดยวิธี สัด การดำเนินการจัดสรรการขนส่ง ก็พิจารณาจัดสรรให้แก่ข่องการขนส่งที่จะก่อให้เกิดกำไรต่อหน่วยสูงที่สุดก่อน ในจำนวนการขนส่งที่มากที่สุดเท่าที่จะทำการได้ และลดหลั่นกันลงไป ซึ่งเมื่อจัดสรรแล้วจะได้แบบค่าเฉลี่ยที่เป็นจริงได้ดังนี้

ตาราง 3 - 21 ตารางแบบค่าเฉลี่ยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น โดยวิธีสัด กรณีต้องการค่าสูงสุด

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	8 -2	7 -3	8 (30)	10 (45)	75
B	7 -4	11 (45)	9 (15)	8 -3	60
C	9 (60)	6 -3	7 (30)	8 -1	90
ความต้องการ	60	45	75	45	225

จากตาราง 3 - 21 แสดงการสัดสรรการผลิตโดยวิธีสัด ซึ่งเมื่อทำการทดสอบความสมบูรณ์โดยวิธีกัวยามแล้ว จะพบว่าค่าประเมินการผลิตของช่องการผลิตที่ว่างอยู่ทุกช่องเป็นลบหมด แสดงว่าแบบค่าเฉลี่ยข้างต้น คือแบบค่าเฉลี่ยที่สมบูรณ์ดีที่สุดในเอง และแบบการผลิตนี้จะก่อให้เกิดกำไรรวมอันเกิดจากการผลิตทั้งสิ้น 2,070 หน่วยเงินตรา

อนึ่ง ในการหาแบบค่าเฉลี่ยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น กรณีต้องการค่าสูงสุดนี้โดยกลวิธีแล้ว อาจจะดำเนินการเช่นเดียวกับกรณีต้องการค่าต่ำสุดทุกขั้นตอนก็ได้ ทั้งนี้ โดยหลักการเหตุผลที่ว่ากรณีต้องการค่าต่ำสุดจะต้องพิจารณาสัดสรรให้ช่องการผลิต ซึ่งเสียต้นทุนการผลิตต่ำที่สุดก่อน สำหรับกรณีต้องการค่าสูงสุด กระทำตรงกันข้าม คือ สัดสรรให้ช่องการผลิตซึ่งทำให้เกิดกำไรมากที่สุดก่อน ดังนั้น หากกำไรต่อหน่วยของปัญหาการผลิตที่ต้องการค่าสูงสุด ได้รับการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายให้เป็นไปในทางตรงกันข้าม (เปลี่ยนจาก เครื่องหมาย "บวก" เป็น "ลบ") การดำเนินการสัดสรรก็จะกระทำเช่นเดียวกับกรณีต้องการค่าต่ำสุดได้ทุกขั้นตอน ทั้งนี้เพราะว่า เมื่อกำไรต่อหน่วยได้รับการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายเป็นตรงกันข้ามหรือเปลี่ยนไปเป็น เครื่องหมายลบแล้ว การพิจารณาตาม

วิธีการหาค่าต่ำสุดก็จะจัดการขนส่งลงในช่องการขนส่งที่มีค่าขนส่งน้อยที่สุด หรือ ค่าที่ติดลบมากที่สุด ซึ่งค่าดังกล่าวความจริงแล้วก็คือค่าที่มากที่สุดเมื่อมีเครื่องหมายเป็นบวกนั่นเอง ดังนั้นในการดำเนินการจัดการจัดสรร จึงเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายถ้าไรต่อหน่วยของช่องการขนส่งทุกช่องให้เป็นเครื่องหมายลบ แล้วดำเนินการจัดสรรตลอดจนทดสอบ หรือเปลี่ยนแปลงโยกย้ายการขนส่ง เพื่อให้ได้แบบการขนส่งที่สมบูรณ์ที่สุด ในรูปแบบของกรณีต้องการค่าต่ำสุดได้ทุกขั้นตอน

ในที่นี้ ขอแสดงวิธีการจัดสรรปัญหาการขนส่งกรณีต้องการค่าสูงที่สุด โดยดำเนินการขั้นตอนในรูปแบบของกรณีต้องการค่าต่ำสุด จากโจทย์ตัวอย่างในตาราง 3-20 เมื่อเปลี่ยนเครื่องหมายถ้าไรต่อหน่วยในตารางดังกล่าวให้เป็นเครื่องหมายลบ และดำเนินการจัดสรรการขนส่งโดยวิธีดังกล่าว จะได้รูปแบบการขนส่งดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 3 - 22 ตารางแบบค่า ฉลยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น กรณีดำเนินการจัดสรรโดยวิธีการหาค่าต่ำสุด เพื่อให้ได้ค่าสูงที่สุด

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	-8 2	-7 2	-8 30	-10 45	75
B	-7 4	-11 45	-9 15	-8 3	60
C	-9 60	-6 3	-7 30	-8 1	90
ความต้องการ	60	45	75	45	225

จากตาราง 3 - 22 การหาค่าเฉลี่ยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น โดยวิธีการหาค่าต่ำสุด เพื่อให้ได้ค่าสูงสุด จะพบว่า เมื่อทำการทดสอบความสมบูรณ์ โดยวิธีก้าวข้ามแล้ว จะได้ค่าประเมิน เป็นบวกหมด แสดงว่าแบบค่าเฉลี่ยนี้ เป็นแบบค่าเฉลี่ย ที่สมบูรณ์ที่สุดแล้ว ทั้งนี้ เป็นไปตามหลักการและเหตุผลของวิธีการหาค่าต่ำสุด และเมื่อเปลี่ยนเครื่องหมายกำไรต่อ หน่วยกลับไปเป็น "บวก" ดังเดิม กำไรรวมของแบบการขนส่งนี้ก็จะ เป็น 2,070 หน่วยเงินตรา เช่นเดียวกัน

5. ลักษณะปัญหาการขนส่ง ในรูปแบบต่าง ๆ

ปัญหาการขนส่งซึ่งได้แสดงมาโดยลำดับข้างต้นแล้วนั้น เป็นปัญหาการขนส่งในรูปแบบ ลักษณะปัญหาพื้นฐานอันเป็นมาตรฐานทั่วไป แต่โดยความเป็นจริงแล้วปัญหาการขนส่งมีได้หลายรูป ลักษณะแตกต่างกันไปตามสภาพการณ์ ตัวอย่างเช่น บางครั้งเมื่อหาค่าเฉลี่ยซึ่งเป็นจริงได้เบื้องต้นแล้ว แต่ก็ไม่สามารถทดสอบความสมบูรณ์ของแบบค่าเฉลี่ยนั้น ๆ ได้ว่า ได้รูปแบบการขนส่งที่สมบูรณ์ที่สุดแล้วหรือยัง หรือบางกรณี ทรัพยากรที่มีอยู่เพื่อการขนส่งก็ไม่สอดคล้องกับความต้องการของจุดหมายที่กำหนด ยิ่งในบางครั้งช่องการขนส่งบางช่องก็ไม่อาจที่จะจัดสรรให้มีการขนส่งเกิดขึ้นได้ก็ มีปัญหาต่าง ๆ เหล่านี้ย่อมต้องการการแก้ไข มิฉะนั้นการหารูปแบบการขนส่งที่สมบูรณ์ที่สุดก็จะกระทำไม่ได้

การแก้ไขปัญหาการขนส่งข้างต้น อาจจะทำได้โดยการปรับปรุงรูปแบบลักษณะให้เป็นไปตามรูปแบบมาตรฐานทั่วไป หรือมิฉะนั้นก็อาจจะใช้กลวิธีการคำนวณเข้าช่วยดัดแปลงปรุงแต่ง ให้สามารถดำเนินการจนบรรลุเป้าหมายการขนส่งนั้น ๆ ได้ซึ่งวิธีการแก้ไขที่มีอยู่ในแต่ละลักษณะ ก็เหมาะสมกับรูปแบบปัญหาแต่ละแบบแต่อย่างแตกต่างกันไป ในขั้นนี้จะได้พิจารณาถึงรูปแบบและวิธีการแก้ไข ปัญหาการขนส่งที่มีอยู่เหล่านั้นเป็นลำดับไป

5.1 ปัญหาการขนส่ง กรณีไม่ครบวงจร (Degeneracy Problem)

ปัญหาการขนส่ง กรณีไม่ครบวงจร หมายถึง ปัญหาการขนส่ง ที่เกิดขึ้น อันเนื่องมาจาก การไม่สามารถสร้างวงจรปิดเพื่อประเมินค่าขนส่งของช่องการขนส่งที่ว่างอยู่

ซึ่งมีผลทำให้การทดสอบความสมบูรณ์ของแบบค่าเฉลี่ยที่เป็นจริงได้ไม่ล้มการกระทำได้ ทั้งนี้ เหตุที่ไม่ล้มการตั้งวางจริงจะปิดให้แก่ข้อการขนส่งที่ว่างอยู่ได้นั้น ก็เพราะจำนวนข้อการขนส่งที่ได้รับจัดสรรให้มีการขนส่ง มีน้อยกว่าที่ค่าเป็น ซึ่งในปกติแล้ว จำนวนการขนส่งที่มีการขนส่งอยู่ จะต้องมีความเท่ากับ $(m + n - 1)$ ข้อ ซึ่งจะกระทำได้ (m คือ จำนวนแหล่งทรัพยากรหรือแถวอนและ n คือ จำนวนจุดหมายหรือแถวตั้ง) ดังนั้น เมื่อใดก็ตาม ถ้าจำนวนข้อการขนส่งที่ได้รับการจัดสรรแล้ว มีความน้อยกว่า $(m + n - 1)$ ข้อการทดสอบความสมบูรณ์ของแบบค่าเฉลี่ยก็จะกระทำไม่ได้ อนึ่งในการทดสอบความสมบูรณ์ของแบบค่าเฉลี่ย ต้องการข้อการขนส่งที่ได้รับการจัดสรรแล้วจำนวนเท่ากับ $(m + n - 1)$ ข้อนั้น อาจอธิบายโดยนัยของระบบสมการได้ว่าจำนวน $(m + n - 1)$ คือ จำนวนของสมการอิสระที่มีอยู่ในปัญหาการขนส่งนั้น และจำนวนข้อการขนส่งที่ได้รับการจัดสรรแล้ว แท้ที่จริงก็คือ จำนวนตัวแปรที่มีอยู่ในระบบสมการ $(m + n - 1)$ สมการนั้นนั่นเอง ซึ่งโดยระบบสมการแล้ว การที่จะถอดหาค่าตัวแปรของสมการหลายขึ้นเพื่อให้ได้ค่าตัวแปรที่แน่นอนตายตัวเฉพาะตัว (Unique) แล้วละก็ จำนวนตัวแปรที่มีอยู่จะต้องมีเท่ากับจำนวนสมการอิสระพอดี ๆ ซึ่งจะกระทำได้ ดังนั้นการทดสอบความสมบูรณ์ของแบบค่าเฉลี่ยการขนส่งจะเป็นไปได้ ก็ต่อเมื่อแบบค่าเฉลี่ยที่เป็นจริงได้นั้น จะต้องมีความจำนวนข้อการขนส่งที่ได้จัดสรรแล้วเท่ากับ $(m + n - 1)$ ข้อพอดีเช่นกัน

การดำเนินการแก้ไขเพื่อให้ล้มการตั้งวางจริงปิดในการประเมินค่าขนส่งของข้อการขนส่งที่ว่างอยู่ อาจจะทำได้โดยการแก้ไขจากปัญหาต้นเหตุ กล่าวคือ จะต้องพยายามทำให้จำนวนข้อการขนส่งที่ได้รับการจัดสรรแล้ว มีความให้เท่ากับ $(m + n - 1)$ ข้อพอดี ๆ ดังนั้น เมื่อใดก็ตาม ถ้าจำนวนข้อการขนส่งที่ได้จัดสรรแล้ว มีน้อยกว่า $(m + n - 1)$ อยู่เป็นจำนวนเท่าไร ก็ให้เพิ่มจำนวนข้อการขนส่งที่ได้จัดสรรแล้วดังกล่าวขึ้นอีกจนกว่าจะครบตามจำนวนที่ขาดไป

ในการเพิ่มจำนวนข้อการขนส่งที่ได้จัดสรรแล้วนี้ ความจริงแล้วเป็นเพียงกลวิธี เพื่อช่วยให้การตั้งวางจริงเกิดขึ้นได้เท่านั้น นั่นคือจะไม่มีการเพิ่มจำนวนการขนส่งที่แท้จริงแต่อย่างใด เหตุที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะว่าถ้าหากมีการเพิ่มจำนวนการขนส่งที่แท้จริง ก็จะมีผลทำให้การขนส่งมีเกิน

กว่าทรัพยากร และความต้องการที่กำหนดอยู่แต่เดิม ดังนั้น ในทางปฏิบัติ เมื่อจำเป็นจะต้อง
 เพิ่มจำนวนช่องทางการขนส่งให้มีการขนส่งเกิดขึ้น ก็จะทำโดยให้ช่องทางการขนส่งดังกล่าว ได้
 จัดสรรจำนวนการขนส่งเท่ากับ "ε" หน่วย ซึ่ง ε (epsilon) มีค่าน้อยมากจนเกือบเท่า
 กับศูนย์ และในการคิดคำนวณการขนส่งให้ถือว่าเป็นศูนย์ สำหรับตำแหน่งช่องทางการขนส่งที่เพิ่มขึ้น
 โดยมีจำนวนการขนส่งเป็น ε หน่วยนั้น ให้ดำเนินการลงในช่องทางการขนส่ง ตำแหน่งอิสระ
 (independent position) ซึ่งหมายถึง ช่องทางการขนส่งที่ไม่สามารถสร้างวงจรปิดให้แก่
 ตัวเองได้ และเป็นช่องทางการขนส่งที่มีลักษณะที่จะนำไปสู่เป้าหมาย นั่นคือ ถ้าเป้าหมายต้องการ
 ค่าต่ำสุด ก็เพิ่มลงในช่องทางการขนส่งที่ว่างอยู่ ซึ่งมีต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยต่ำที่สุด แต่ถ้าเป้าหมาย
 ต้องการค่าสูงสุด ก็เพิ่มลงในช่องทางการขนส่งที่ว่างอยู่ ซึ่งมีกำไรหรือผลประโยชน์ที่จะได้รับต่อหน่วย
 สูงที่สุด

ในที่นี้เพื่อให้เห็นปัญหาและการแก้ไขดังกล่าว จึงขอยกตัวอย่างปัญหาการขนส่ง
 การที่ต้องการค่าต่ำสุดของต้นทุนการขนส่ง ดังต่อไปนี้

ตาราง 3 - 23 ตารางต้นทุนการขนส่ง กรณีไม่ครบวงจร

ตาราง โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5	10	13	8	15
B	11	13	5	8	15
C	13	3	18	9	24
ความต้องการ	12	15	15	12	54

จากการตัดสรรการขนส่ง โดยวิธีสัด จะได้แบบค่าเฉลยการขนส่งที่เป็นจริงได้
เบื้องต้น ดังนี้

ตาราง 3 - 24 ตารางแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น โดยวิธีสัด

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5 12	10	13	8 3	15
B	11	13	5 15	8 *	15
C	13	3 15	18	9 9	24
ความต้องการ	12	15	15	12	54

จากตาราง 3 - 24 จะเห็นว่ากรขนส่งได้รับการตัดสรรครบถ้วน ตามกำลัง
ผลิต และความต้องการแล้ว ดังนั้นแบบการขนส่งนี้ จึงเป็นแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น
จากนี้ก็จะดำเนินการทดสอบความสมบูรณ์ของค่าเฉลยโดยวิธีกัวฮัม อย่างไรก็ตาม จากการ
พยายามสร้างวงจรปิด เพื่อหาค่าประเมินการขนส่งของช่องการขนส่งที่ว่างอยู่ จะพบว่าช่องการ
ขนส่งที่ว่างอยู่บางช่อง ฮันได้แก่ช่อง A - III, B - I, B - II, B - IV และ C - III
นั้น ไม่สามารถ จะสร้างวงจรปิดให้ได้ เหตุที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะ จำนวนช่องการขนส่งที่ได้รับ
การตัดสรรแล้วมีเพียง 5 ช่องเท่านั้น แต่จำนวนช่องการขนส่งที่ต้องการ จะต้องมั้งถึง
 $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ ช่องด้วยกัน ดังนั้น จึงเกิดปัญหากรณีไม่ครบวงจร
(degeneracy) ขึ้น ซึ่งจะต้องแก้ไขโดยการเพิ่มจำนวนการขนส่ง " e " ลงในช่องการ

การขนส่งที่ไม่มีวงจรปิดอย่างตัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งตรงเพิ่มในช่องที่เสียต้นทุนต่อหน่วยต่ำที่สุด
ในนี้ได้แก่ช่องการขนส่ง B - IV ซึ่งเมื่อเพิ่มการขนส่งนี้แล้ว จะทำให้ช่องการขนส่งที่ได้รับ
การคัดสรรแล้วมีจำนวนทั้งสิ้น 6 ช่อง ซึ่งเท่ากับ $(m + n - 1)$ พอดี ๆ ดังนั้น การทดสอบ
ความสมบูรณ์ของแบบค่าเฉลยโดยวิธีกัวฮัม จึงกระทำต่อไปได้ และได้ค่าประเมินการขนส่ง
ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 3 - 25 ตารางการเติม " ϵ " และการทดสอบความสมบูรณ์

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5 (14)	10 8	13 8	8 (3)	15
B	11 6	13 11	5 15	8 0 ϵ	15
C	13 7	3 (15)	18 12	9 (9)	24
ความต้องการ	12	15	15	12	54

จากตาราง 3 - 25 จะพบว่าค่าประเมินการขนส่งของช่องการขนส่งที่ว่างอยู่ทุก
ช่องเป็น "บวก" ทั้งหมด แสดงว่าแบบค่าเฉลยดังกล่าว เป็นแบบค่าเฉลยที่สมบูรณ์ดีที่สุดใน
และการคัดสรรการขนส่งนี้จะทำให้เกิดต้นทุนการขนส่งรวมทั้งสิ้น $(5 \times 12) + (8 \times 3) +$
 $(5 \times 15) + (8 \times \epsilon)^* + (3 \times 15) + (9 \times 9) = 60 + 24 + 75 + 0^* + 45 +$
 $81 = 285$ หน่วยเงินตรา (ϵ มีค่าน้อยมาก ถือว่าเท่ากับศูนย์ : $\epsilon = 0$)

5.2 ปัญหาการขนส่ง กรณีการขนส่งไม่สมดุลย์

(Unbalanced Transportation Problems)

ปัญหาการขนส่ง กรณีการขนส่งไม่สมดุลย์ หมายถึง ปัญหาการขนส่งที่เกิดขึ้นอันเนื่องมาจาก ผลรวมของทรัพยากรอันได้มาจากแหล่งทรัพยากรต่าง ๆ กับ ความต้องการรวมของจุดหมายต่าง ๆ ในทรัพยากรนั้น มีจำนวนแตกต่างกัน หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ก็คือ ผลผลิตรวม (supply) กับความต้องการรวม (demand) ไม่เท่ากันนั่นเอง การไม่เท่ากันของผลผลิตกับความต้องการนั้น อาจเกิดมาจากผลผลิตมีมากกว่าความต้องการทำให้สินค้าล้นตลาด (surplus : overproduction) หรืออาจเกิดจากการที่ ผลผลิตมีน้อยกว่าความต้องการทำให้สินค้าขาดตลาด (shortage) ก็ได้

ในทางการคำนวณเพื่อหาแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น ค่าเป็นที่จะต้องปรับปรุงหรือดัดแปลง ให้ผลผลิตมีจำนวนเท่ากับความต้องการเสียก่อนจึงจะกระทำได้ ในการปรับปรุงนี้กระทำโดยง่าย กล่าวคือถ้าหากผลผลิตมีมากกว่าความต้องการ ก็ให้สร้างตลาดจำลอง (dummy column) เพื่อรองรับผลผลิตส่วนเกินนั้นไว้ และถ้าผลผลิตมีน้อยกว่าความต้องการ ก็ให้สร้างโรงงานจำลอง (dummy row) เพื่อสนองผลผลิตต่อความต้องการนั้น ๆ อย่างไรก็ตาม การสร้างตลาดจำลองดังกล่าวนี้ แท้ก็จริงแล้วตลาดจำลองเป็นเพียงกลวิธีเพื่อจะแสดงว่ามีผลผลิตส่วนเกินเกิดขึ้นเท่านั้น หากได้มีความต้องการที่แท้จริงแต่อย่างใด ดังนั้นต้นทุนการขนส่ง ในช่องการขนส่งของตลาดจำลองก็จะมีหรือเป็นศูนย์ เท่านั้นเองเดียวกัน การสร้างโรงงานจำลอง ก็เพื่อที่จะทำให้ผลผลิตเท่ากับความต้องการ เพื่อผลในการคำนวณหาค่าการขนส่งเท่านั้น แท้ก็จริงแล้วโรงงานจำลองไม่มีผลผลิตใดๆที่จะสนองความต้องการที่ขาดหายไปนั้นเลย ดังนั้นต้นทุนการขนส่ง ในช่องการขนส่งของโรงงานจำลองก็จะมีหรือเป็นศูนย์เช่นเดียวกัน

ในที่นี่ เพื่อให้เข้าใจปัญหาในแต่ละรูปแบบ จึงขอกล่าวเป็นกรณี ๆ ไป ดังต่อไปนี้

5.2.1 กรณีผลผลิตมากกว่าความต้องการ

ในกรณีผลผลิตรวมของแหล่งทรัพยากรหรือโรงงานต่าง ๆ มีมากกว่าความต้องการรวมของจุดหมายหรือตลาด ในทางปฏิบัติจำเป็นต้องสร้างจุดหมายหรือตลาดจำลองขึ้นเพื่อรองรับผลผลิตส่วนเกินนั้นไว้ ทั้งนี้ความต้องการอื่นเป็นความต้องการจำลองนั้น จะมีจำนวนเท่ากับผลผลิตส่วนเกินนั้น ๆ พอดี อย่างไรก็ตามความต้องการจำลองดังกล่าว มิได้เป็นความต้องการในตัวสินค้าที่แท้จริงแต่ประการใด การกระทำดังกล่าวเป็นเพียงกลวิธีเพื่อให้การคำนวณสัดส่วนการขนส่งเป็นไปได้เท่านั้น ดังนั้น ต้นทุนการขนส่งสำหรับข้อยกการขนส่งในส่วนของตลาดจำลองจึงไม่มีหรือเป็นศูนย์^{1/}

ตัวอย่างปัญหาการขนส่งได้แสดงไว้แล้วดังตารางต่อไปนี้ :-

^{1/} โดยรูปแบบทั่วไป จำนวนความต้องการจำลอง (d_{n+1}) จะเท่ากับ

ผลต่างของผลผลิตรวม ($\sum_{i=1}^m s_i$) กับความต้องการรวม ($\sum_{j=1}^n d_j$)

นั่นคือ $\sum_{i=1}^m s_i - \sum_{j=1}^n d_j = d_{n+1}$ และต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยจะไม่มี

หรือ $c_{i,n+1} = 0$

ตาราง 3 - 26 ตารางต้นทุนการขนส่ง กรณีผลผลิตมากกว่าความต้องการ

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5	8	12	6	60
B	5	9	10	4	80
C	3	6	13	7	60
ความต้องการ	40	40	50	60	

จากการพิจารณา ปัญหาการขนส่งในตาราง 3 - 26 จะพบว่าจำนวนผลผลิตรวมของโรงงานต่าง ๆ เป็น 200 หน่วยสินค้า แต่ความต้องการของตลาดต่าง ๆ รวมกันมีเพียง 190 หน่วยสินค้า เพราะฉะนั้นจะมีสินค้าเกินความต้องการอยู่ $200 - 190 = 10$ หน่วยสินค้านั้นเพื่อให้สินค้า 10 หน่วยที่เกินมามีสภาพเสมือนหนึ่งว่าได้สนองความต้องการไป จึงสร้างตลาดค่าแฉงขึ้นเพื่อรองรับสินค้าส่วนเกินนั้นไป การกระทำดังกล่าวนี้มีผลทำให้ผลผลิตและความต้องการสมดุลกัน และสามารถดำเนินการหาแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้ ซึ่งการดำเนินการข้างต้นนี้ได้แสดงไว้แล้วดังตาราง 3 - 27 นี้

ตาราง 3 - 27 ตารางแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้ โดยวิธีสัด

โรงงาน \ ตลาด	ตลาด				ตลาด จำแลง	ผลผลิต
	I	II	III	IV		
A	5 0	8 (20)	12 (30)	6 0	0 (10)	60
B	5 2	9 3	10 (20)	4 (60)	0 2	80
C	3 (40)	6 (20)	13 3	7 3	0 2	60
ความต้องการ	40	40	50	60	10	200

ตาราง 3 - 27 นี้ ได้แสดงแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้เบื้องต้นโดยวิธีสัดไว้แล้ว ^{1/}

และเมื่อทดสอบความสมบูรณ์ของแบบค่าเฉลย โดยวิธีกัวซ์าม ก็จะพบว่าแบบค่าเฉลยข้างต้น เป็นแบบค่าเฉลยที่สมบูรณ์ที่สุดแล้ว ทั้งนี้ การขนส่งดังกล่าวจะทำให้เกิดต้นทุนการขนส่งรวมทั้งสิ้น 1,200 หน่วยเงินตรา อนึ่งจากแบบค่าเฉลยนี้ จะเห็นได้ว่า โรงงาน A ควรจะลดการผลิตให้ เหลือเพียง 50 หน่วยสินค้า ก็เป็นพอเพียงแล้ว นอกจากนี้การขนส่งดังกล่าวก็มิได้หลายรูปแบบด้วย กัน (ค่าประเมินการขนส่งบางช่องเป็นศูนย์)

1/ การดำเนินการจัดสรรการขนส่งโดยวิธีสัด สำหรับปัญหาการขนส่งไม่ สมบูรณ์ จะพิจารณาจัดสรรให้ตลาดจำแลงหรือโรงงานจำแลงมีการขนส่งเกิดขึ้น ก็ต่อเมื่อได้จัดสรร การขนส่งให้กับตลาดและโรงงานที่แท้จริงครบถ้วนแล้วเท่านั้น ทั้งนี้ด้วยเหตุที่ว่า การจำแลงเป็น เพียงส่วนเกินหรือส่วนที่ขาดไป ซึ่งต้องพิจารณาภายหลัง

5.2.2 กรณีผลผลิตน้อยกว่าความต้องการ

กรณีผลผลิตรวมน้อยกว่าความต้องการ ในทางปฏิบัติเพื่อให้การตัดสินใจง่ายขึ้น เป็นได้ จึงจำเป็นต้องสร้างโรงงานจำแลงขึ้น เพื่อให้ผลผลิตและความต้องการสมดุลกัน ในการสร้างโรงงานจำแลงเพิ่มเข้าไปในตารางปัญหาการขนส่งนี้ แต่ที่จริงโรงงานดังกล่าวไม่มีผลผลิตอะไรออกสู่ตลาดเลย ความหมายในการสร้างโรงงานจำแลง เป็นเพียงเพื่อจะแสดงให้เห็นชัดเจนว่า ตลาดใดบ้างที่จะได้รับสินค้าไปไม่ครบตามความต้องการและจำนวนที่ขาดหายไปนั้นเป็นทำไรเท่านั้น เช่นนี้แล้วต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยของยังการขนส่งในโรงงานจำแลงจึงไม่มีหรือเป็นศูนย์

ในที่นี้ จะขอยกตัวอย่างปัญหาการขนส่ง กรณีผลผลิตน้อยกว่าความต้องการ ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 3 - 28 ตารางต้นทุนการขนส่ง กรณีผลผลิตน้อยกว่าความต้องการ

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5	8	10	6	60
B	5	9	10	4	80
C	3	6	13	7	60
ความต้องการ	40	40	40	70	

พิจารณาจาก ตาราง 3 - 28 จะพบว่า จำนวนผลผลิตรวมของโรงงานต่าง ๆ เป็น 200 หน่วยสินค้า แต่ความต้องการรวมของตลาดต่าง ๆ เป็น 210 หน่วยสินค้า ฉะนั้น ผลผลิตจะมีน้อยกว่าความต้องการ ทั้งสิ้น $210 - 200 = 10$ หน่วยสินค้า ดังนั้น จึงสร้าง โรงงานค่าแฉง ซึ่งมีผลผลิต 10 หน่วยสินค้า และเมื่อดำเนินการดังกล่าวแล้วจะสามารถหาแบบ ค่าเฉลยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น โดยวิธีที่ได้ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 3 - 29 ตารางแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้ โดยวิธี

โรงงาน \ ตลาด	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5 0	8 20	12 40	6 0	60
B	5 2	9 3	10 10	4 70	80
C	3 40	6 20	13 3	7 3	60
โรงงานค่าแฉง	0 7	0 4	// 10	0 6	10
ความต้องการ	40	40	60 I	70	210

จากตาราง 3 - 29 เป็นการหาแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น โดยวิธี ซึ่งเมื่อทดสอบความสมบูรณ์ของแบบค่าเฉลย โดยวิธี - ก้าวข้ามแล้ว จะพบว่าแบบค่าเฉลยดังกล่าว เป็นแบบค่าเฉลยที่สมบูรณ์ที่สุดแล้ว ทั้งนี้การขนส่งดังกล่าวจะทำให้เกิดต้นทุนการขนส่งรวม ทั้งสิ้น 1,260 หน่วยเงินตรา อนึ่งจากแบบค่าเฉลยข้างต้นนี้ จะเห็นได้ว่า ตลาด III จะได้

รับสินค้าน้อยกว่าความต้องการอยู่ 10 หน่วยสินค้า กล่าวคือ จะได้รับสินค้าจริง ๆ เพียง 50 หน่วยสินค้าเท่านั้น^{1/}

5.3 ปัญหาการขนส่ง กรณีเส้นทางขนส่งต้องห้าม (Prohibited Routes Problem)

ปัญหาการขนส่ง กรณีเส้นทางขนส่งต้องห้าม หมายถึงปัญหาการขนส่ง กรณีที่เส้นทางของช่องทางการขนส่งบางช่องไม่สามารถจัดสรรให้มีการขนส่งเกิดขึ้นได้ ทั้งนี้อาจจะด้วยเหตุที่ระเบียบหรือข้อกำหนดการจราจรห้ามไว้ หรือเกิดจากสภาพจราจรที่ติดขัด หรือเกิดจากสภาพผิวจราจร ซึ่งอยู่ระหว่างการก่อสร้าง หรืออาจจะเกิดจากสภาพการตีเวดล้อมไม่อำนวยและภัยธรรมชาติ เช่น เกิดน้ำท่วมเส้นทาง และอื่น ๆ ซึ่งเหตุต่าง ๆ จะมีผลทำให้ช่องทางการขนส่งดังกล่าวไม่สามารถดำเนินการได้ หรือถ้าจะดำเนินการขนส่งก็จะทำให้เกิดต้นทุนมากมายมหาศาล ในทางภาคีความจึงถือว่าเป็นช่องทางต้องห้าม และช่องทางต้องห้ามดังกล่าว มักจะแสดงค่าต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยด้วยสัญลักษณ์ " M " หรือ " ∞ " หรือ ถ้าไม่แสดงค่าต้นทุนต่อหน่วย ก็อาจจะกากบาทขีดคร่อมช่องทางการขนส่งนั้น ๆ ออกไป และจะไม่นำมาพิจารณาจัดสรรการสิ่งใด ๆ อีกเลย

^{1/} ในทางปฏิบัติคำนวณความต้องการที่เกินกว่ากำลังการผลิตปกตินั้น อาจสามารถแก้ไขได้โดยการเพิ่มการผลิตในลักษณะการทำงานล่วงเวลา ซึ่งถ้าหากว่าได้ดำเนินการผลิตโดยการทำงานล่วงเวลา แต่ละโรงงานก็จะมีผลผลิตแยกเป็นสองส่วน คือ ผลผลิตในการทำงานปกติ และผลผลิตในการทำงานล่วงเวลา ซึ่งการผลิตดังกล่าวนี้อาจทำให้เกิดผลแตกต่างของต้นทุนการผลิต ดังนั้นจึงต้องนำต้นทุนการผลิตมาคิดคำนวณด้วย สำหรับการหาแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น ก็ดำเนินการเช่นเดียวกับ-การจัดสรรการขนส่งปกติทั่วไป เพียงแต่ว่า แต่ละโรงงานจะถูกแบ่งแยกเป็นสองโรงงานย่อย ซึ่งมีผลผลิตจากการทำงานปกติและผลผลิตจากการทำงานล่วงเวลา

ในที่นี้ ขอยกตัวอย่างปัญหาการขนส่ง กรณีต้องการค่าต่ำสุด ดังข้อมูลตาราง
ต่อไปนี้

ตาราง 3 - 30 ตารางต้นทุนการขนส่ง กรณีปลายทางขนส่งต้องห้าม

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	7	12	15	M	10
B	13	M	10	7	12
C	M	5	9	11	14
ความต้องการ	8	10	10	8	36

เมื่อดำเนินการจัดสรรการขนส่งโดยวิธีสิด จะได้แบบค่าเฉลยการขนส่งที่เป็นจริง
ได้ เบื้องต้น และเมื่อทดสอบความสมบูรณ์ของค่าเฉลย โดยวิธีกัวฮัมแล้ว จะพบว่าแบบค่าเฉลย
ดังกล่าวเป็นแบบค่าเฉลยที่สมบูรณ์ที่สุด ทั้งนี้เพราะว่าจากการประเมินช่องกรขนส่งที่ว่างอยู่
พบว่าค่าประเมินการขนส่งเหล่านั้น เป็นบวกหมด แม้แต่ช่องการขนส่งต้องห้ามก็จะมีค่าประเมิน
เป็นบวกด้วยเช่นกัน (M มีค่าใหญ่มาก) ซึ่งการดำเนินการจัดสรรการขนส่งและการทดสอบความ
สมบูรณ์ ได้แสดงไว้แล้วดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 3 - 81 ตารางค่าเฉลี่ยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น โดยวิธีตัด

ตลาค โรงงาน	I	II	III	Iv	ผลผลิต
A	7 8	12 1	15 2	M M-12	10
B	13 11	M M-6	10 4	7 8	12
C	M M-1	5 10	9 4	11 5	14
ความต้องการ	8	10	10	8	36

อนึ่ง หากปัญหาการขนส่งนี้ กระทำโดยการขีดคร่อมข้อต้องการขนส่งต้องห้ามแล้ว ในการดำเนินการคัดสรรการขนส่ง ก็จะได้เสมือนหนึ่งว่า ข้อต้องการขนส่งดังกล่าว ไม่มีปรากฏอยู่ในตารางการขนส่งนี้เลย นั่นคือ ข้อต้องการขนส่งต้องห้าม จะไม่ได้รับการพิจารณาใด ๆ เลยนั่นเอง

จากปัญหาการขนส่งในตาราง 3 - 30 ถ้าดำเนินการคัดสรรการขนส่ง โดยการขีดคร่อมข้อต้องการขนส่งต้องห้าม แบบค่าเฉลยการขนส่งที่สมบูรณ์ที่สุดจะเป็นดังนี้

ตาราง 3 - 32 ตารางค่าเฉลี่ยแสดงโดยกระเป๋าคือคร่อม

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	7 8	12 1	15 2	 	10
B	13 11	 	10 4	7 8	12
C	 	5 10	9 4	11 5	14
ความต้องการ	8	10	10	8	36

ตาราง 3 - 32. ข้างต้นนี้ ให้แบบการขนส่งที่สมบูรณ์ที่สุด ในลักษณะเดียวกับ
ผลที่ได้ในตาราง 3 - 31 เอง

6. สรุป

การวิเคราะห์การขนส่ง เป็นการวิเคราะห์ปัญหากระบวนการเชิงเส้นในรูปแบบลักษณะเฉพาะแบบอย่างหนึ่ง ทำนองเดียวกันกับการวิเคราะห์การคัดสรร หากแต่ว่าในเรื่องของการขนส่งนี้ เป็นการวิเคราะห์เพื่อหาวิธีการแจกแจงทรัพยากรที่มีประสิทธิภาพต่าง ๆ กัน ไปสู่จุดหมายที่ได้กำหนดไว้แล้ว โดยที่จำนวนแหล่งทรัพยากรไม่จำเป็นที่จะต้องมีจำนวนเท่ากับจุดหมายและทรัพยากรจากแต่ละแหล่งก็อาจจะได้รับบริการขนส่งแจกแจงไปสู่จุดหมายใดก็ได้ หลายจุดหมายก็ได้ จุดหมายใด ๆ ก็ได้ตามแต่ความต้องการและทรัพยากรที่มีอยู่นั้น ๆ อย่างไรก็ตาม โดยแท้จริงแล้ว วิธีการแก้ปัญหาคือการขนส่งนี้ สามารถจะนำไปใช้กับปัญหาใด ๆ ก็ได้ที่มีลักษณะเป็นกระบวนการเชิงเส้น และมีเงื่อนไขตามรูปแบบของการขนส่งที่ได้กล่าวข้างต้นนี้

การหาแบบค่าเฉลยการขนส่ง มีวิธีเฉพาะเพื่อหาแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้เบื้องต้นอยู่หลายวิธีด้วยกัน ซึ่งวิธีการเฉพาะแบบที่ยอมรับกันโดยทั่วไป เห็นจะได้แก่ วิธีการหาคู่สมมติวันตงเฉียงเหนือ วิธีสี่ด วิธีประมาณการแบบรัลเซลล์ และวิธีประมาณการแบบไวเกล

ในการหาแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้นี้ เป็นเพียงแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้เบื้องต้นเท่านั้น จำเป็นที่จะต้องมีการประเมินค่าขนส่งของช่องการขนส่งที่ว่างอยู่ทุกครั้งที่ไป ซึ่งถ้าหากผลการประเมินช่องการขนส่ง ชัดได้ว่า ไม่สามารถที่จะโยกย้ายการขนส่ง เพื่อจะให้ค่าเฉลยที่ดีกว่าก็แสดงว่าแบบค่าเฉลยที่กำลังทดสอบอยู่นั้นเป็นแบบค่าเฉลยที่สมบูรณ์ที่สุดแล้ว อนึ่งในบางกรณีการประเมินค่าขนส่งของช่องการขนส่งบางช่องไม่สามารถกระทำได้ ทั้งนี้เพราะเกิดปัญหาการขนส่งไม่ครบวงจร กล่าวคือ ช่องการขนส่งที่มี การขนส่งอยู่แต่เต็มหรือช่องที่ได้รับการคัดสรรให้มีการขนส่ง มีจำนวนช่องน้อยกว่า $(m + n - 1)$ ช่อง (m คือ จำนวนแหล่งทรัพยากรหรือแถวนอน และ n คือ จำนวนจุดหมายหรือแถวตั้ง) ดังนี้ การที่จะสามารถประเมินช่องการขนส่งให้ได้ครบทุกอย่างจำเป็นที่จะต้องเพิ่มช่องการขนส่งที่ได้รับการคัดสรรแล้วขึ้นอีกจนกว่าจะมีจำนวนเท่ากับ $(m + n - 1)$ ช่องพอดี ๆ

ในการเพิ่มช่องการขนส่งดังกล่าวนี้ แท้ที่จริงเป็นเพียงกลวิธีให้การประเมินค่าขนส่งสามารถกระทำได้เท่านั้น ไม่ได้มีจำนวนการขนส่งใด ๆ เพิ่มขึ้นเลย การดำเนินการดังกล่าวกระทำได้โดยการตัดให้ช่องการขนส่งซึ่งไม่มีวงจรปิดมาสู่ตัวเอง ได้รับคัดสรรให้มีการขนส่งเกิดขึ้น ϵ หน่วย

โดยที่ ๔ มีค่าน้อยมากจนเกือบเท่ากับศูนย์นั่นเอง เมื่อกระทำดังนี้ก็จะทำให้การประเมินค่าขนส่งของช่องทางการขนส่งที่ว่างอยู่ สามารถดำเนินไปได้

อนึ่ง รูปแบบลักษณะปัญหาการขนส่งที่เกิดขึ้นจริงในปัจจุันมีรูปแบบลักษณะหลายหลากที่แตกต่างไปจากรูปแบบมาตรฐานทั่วไป รูปแบบดังกล่าวมีทั้ง กรณีไม่ครบวงจร กรณีการขนส่งไม่สมบูรณ์ กรณีสายทางขนส่งต้องห้าม และอื่น ๆ ซึ่งการดำเนินการจัดสรรการขนส่งดังกล่าวสามารถดำเนินการแก้ไขได้ด้วยการปรับปรุงและดัดแปลงรูปแบบอันเป็นปัญหาให้มีความเหมาะสมตามมาตรฐานทั่วไป ทั้งนี้การปรับปรุงใด ๆ ดังกล่าวจะยังคงดำรงข้อมูลและความหมายเดิมของปัญหาไว้-ครบถ้วนสมบูรณ์ จากนี้ก็ยังสามารถดำเนินการหารูปแบบค่าเฉลยการขนส่ง โดยวิธีการมาตรฐานที่มีอยู่ได้โดยตลอด

บรรณานุกรม

ภาษาไทย :

วิจิตร ตันตลุ่มภ์ ; วัลย์ ชัย วิชาวนิช และ ศิริสัมพันธ์ ทองประเสริฐ.

การวิจัยดำเนินงาน เล่ม 1 ภาค Deterministic. พิมพ์ครั้งที่ 1.

กรุงเทพมหานคร : เกษมการพิมพ์, 2522.

วิชัย ธรรมาสกุล. การวิเคราะห์เชิงปริมาณสำหรับการตัดสินใจทางธุรกิจ.

กรุงเทพมหานคร : ห้างหุ้นส่วนจำกัด โรงพิมพ์อักษรไทย, 2524.

ภาษาอังกฤษ :

Dantzig, George B. "Application of the Simplex Method to a
Transportation Problem," in Activity Analysis of Production
and Allocation, ed. by T.C. Koopmans. New York : John
Wiley & Sons, Inc., 1951.

Fabrycky, W.J. and Paul E. Torgersen. Operations Economy : Industrial
Applications of Operations Research. New York : Prentice -
Hall, Inc., 1966.

Haley, K. Brian. Mathematical Programming for Business and Industry.
New York : St. Martin's Press, Inc., 1961.

Hitchcock, F.L. "Distribution of a Product from Several Sources to
Numerous Localities," The Journal of Mathematics and
Physic, 20 '(August, 1941), 224 - 230.

Koopmans, T.C. "Optimum Utilization of the Transportation System,"
Econometrica, 17 (July, 1949), 136 - 146.

Kwak, N.K. Mathematical Programming with Business Applications.
New York : McGraw - Hill Book Company, 1972.

Manne, Alan S. Economic Analysis for Business Decisions. New York :
McGraw - Hill Book Company, 1961.

Metzger, Robert W. Elementary Mathematical Programming. New York :
John Wiley & Sons, Inc., 1958.

Richmond, Samuel B. Operations Research for Management Decisions.
New York : The Ronald Press Company, 1968.

Teichroew, Daniel . An Introduction to Management Science.
New York : John Wiley & Sons, Inc., 1966.

Wager, Harvey M. Principles of Operations Research. New Jersey :
Prentice - Hall. Inc., 1969.

แบบฝึกหัด

1. จงหาคูขยภพของการขนส่ง (optimal solution of the Transpartation Problem) ซึ่งมี ค่ำขนส่งและการเสนอซื้อ (demand) การสนองขาย (Supply) ดังต่อไปนี้

From \ To	I	II	III	IV	Supply
A	10	14	8	15	25
B	12	11	15	9	30
C	13	10	12	14	35
Demand	I 15 I	30	I 20	25	90

- ก) โดยวิธี Northwest - corner Method
 ข) โดยวิธี Short - Cut Method
 ค) โดยวิธี Russell's Approximation Method
 ง) โดยวิธี Penalty Method (Vogel's Approximation Method)
2. ถ้าใจทย์ตามข้อหนึ่ง แสดงถึงกำไร (profits) และการเสนอซื้อ (demand) การสนองขาย (Supply) จงหาคูขยภพของการขนส่ง (optimal of the Transpartation)

- a. จงหา Optimal transportation ของปัญหาซึ่งแสดงใน Matrix โดยมี demand และ supply ดังต่อไปนี้

From	To				Supply
	I	II	III	IV	
A	55	70	65	50	30
B	40	60	75	60	40
C	60	55	50	70	50
D	65	50	60	75	50
Demand	30	30	40	50	

- ก) ถ้าแต่ละ element แสดงต้นทุนการขนส่ง (cost of transportation) หน่วย
- ข) ถ้าแต่ละ element แสดงกำไรจากการขนส่ง (profit of transportation) หน่วย

4. บริษัท ไทยสถาปัตย์ก่อสร้าง วางแผนจะก่อสร้างโรงภาพยนตร์, ศูนย์การค้า, อาคารที่อยู่อาศัยและโรงงานอุตสาหกรรม บริษัททราบว่าจะต้องใช้เงินทุนในการก่อสร้าง และผลประโยชน์ตอบแทนต่อการลงทุนนั้น เป็น

แผนงาน	งบประมาณเงินทุน	ผลประโยชน์ต่อปี (ร้อยละ)
โรงภาพยนตร์	100,000	12
ศูนย์การค้า	150,000	15
อาคารที่อยู่อาศัย	160,000	16
โรงงานอุตสาหกรรม	200,000	14

ในการลงทุนนี้บริษัทจำเป็นต้องเสาะหาเงินทุนจากแหล่งต่าง ๆ จากตลาดเงินทุน ซึ่งปรากฏว่า บริษัทพิจารณาแล้วมีแหล่งเงินทุนต่าง ๆ ให้เงินทุนในปริมาณจำกัดของแต่ละแหล่ง และอัตราดอกเบี้ย ดังนี้.-

แหล่งเงินทุน	จำนวนให้กู้	อัตราดอกเบี้ย
พันธบัตรเงินกู้	60,000	6
หุ้นกู้	200,000	9
ธนาคาร	220,000	7
สถาบันการเงินอื่น	150,000	6

ถ้าสมมุติว่า บริษัท ฯ จะกู้เงินจากแหล่งเงินทุนต่าง ๆ รวมกันไม่เกินกว่าจำนวนเงินทุนที่ต้องการกู้ทั้งหมด อยากรทราบว่า บริษัทไทยสถาปัตย์การก่อสร้าง ควรจะกู้จากแหล่งเงินทุนใดบ้าง และแหล่งละเท่าไร จึงจะอยู่ในสถานะที่ดีที่สุด