

การขนส่งดังกล่าวได้ 20 หน่วยสินค้าเท่า ๆ กันอีก เช่นนี้แล้วย่อมหมายความว่าในการปรับปรุง
 โยกย้ายการขนส่งในขั้นต่อไปนั้น จะให้ขบวนการขนส่ง A-III หรือ A-IV เกิดการขนส่งขึ้น
 ก็ได้ เพราะจะทำให้ต้นทุน ขนส่งรวมลดลง $20 \times 3 = 60$ หน่วยเงินตราเท่า ๆ กัน
 ในที่นี้จะโยกย้ายการขนส่ง การขนส่งเกิดขึ้นในช่อง A I ทั้งนี้เพื่อให้การเปลี่ยนแปลง
 นี้ดำเนินไปตามลำดับขั้น แ มื่อโยกย้ายการขนส่งดังกล่าวแล้วจะได้แบบการขนส่งใหม่ดังตาราง
 3 - 6 ต่อไปนี้

ตาราง 3 - 6 : ตารางแบบค่าเฉลยการขนส่งที่เป็นจริงได้ลำดับที่สาม

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5 3	8 40	12 20	6 0	60
B	5 5	9 3	10 30	4 50	80
C	3 40	M *	13 -3	7 0	60
ความต้องการ	40	40	50	70	200

จากตาราง 3 - 6 ถ้าแบบการขนส่งที่เป็นจริงได้ลำดับที่สามนี้เป็นแบบการขนส่ง
 ที่สมบูรณ์ หรือเป็นแบบการขนส่งที่นำไปใช้ในการคัดสรรการขนส่งแล้ว ต้นทุนการขนส่งรวมก็จะ
 เป็น $1380 - 60 = 1320$ หน่วยเงินตรา อย่างไรก็ตามเมื่อได้ทดสอบความสมบูรณ์

โดยวิธีกัวฮัมแล้ว จะพบว่า แบบการขนส่งที่เป็นจริงได้สามนี้ยังไม่ใช่แบบการขนส่งที่สมบูรณ์ที่สุด โดยยังไม่ใช่แบบการขนส่งที่จะก่อให้เกิดต้นทุนการขนส่งรวมต่ำที่สุดแต่อย่างใด ทั้งนี้เพราะจากการประเมินช่องการขนส่งดังกล่าว พบว่า ช่องการขนส่ง C-II มีค่าประเมินเป็น $u - 3$ ซึ่งแสดงว่าหากเกิดการขนส่งในช่อง C-II แล้ว จะทำให้ต้นทุนการขนส่งลดลง 3 หน่วยเงินตราต่อหนึ่งหน่วยสินค้าที่มีการขนส่งนั้น ๆ เช่นนี้แล้วควรมีการโยกย้ายการขนส่งให้ช่องการขนส่ง C-II มีการขนส่งเกิดขึ้น ซึ่งจำนวนสินค้าที่จะส่งให้แก่อช่องการขนส่ง C-II นั้น จะมีได้มากที่สุดเป็นจำนวน 20 หน่วยสินค้า และการโยกย้ายนี้จะทำให้ต้นทุนการขนส่งรวมลดลง $20 \times 3 = 60$ หน่วยเงินตรา ซึ่งการปรับปรุงโยกย้ายการขนส่งนี้ จะแสดงได้ดังตาราง 3 - 7 ต่อไปนี้

ตาราง 3 - 7 : ตารางแบบค่าเฉลี่ยที่เป็นจริงได้ลำดับที่สี่

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5 *	8 20	12 (40)	6 0	60
B	5 2	9 3	10 (10)	4 (70)	80
C	3 (40)	6 20	13 3	7 3	60
ความต้องการ	40	40	50	70	200

ตาราง 3 - 7 แสดงแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้ลำดับที่สี่ ซึ่งถ้านำแบบการขนส่ง
นี้ไปใช้ในการจัดสรรการขนส่งแล้ว ก็จะทำให้เกิดต้นทุนการขนส่งรวมเป็น $1320 - 60 = 1260$
หน่วยเงินตรา

ในที่นี้เมื่อได้ทำการทดสอบความสมบูรณ์ของค่าเฉลยโดยวิธีกัวฮัมแล้ว จะพบว่า
ไม่มีค่าประเมินของช่องการขนส่งช่องใดเป็นลบ (-) อยู่เลย ซึ่งค่าประเมินดังกล่าวได้แสดง
ไว้แล้วทางด้านล่างมุมขวาของช่องการขนส่งที่ว่างอยู่ (water cell) เหล่านั้น เช่นนี้แล้ว
ย่อมแสดงว่าแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้ลำดับที่สี่ข้างต้นเป็นแบบการขนส่งที่สมบูรณ์ที่สุด เสียต้นทุน
การขนส่งรวมต่ำที่สุดแล้ว และจะไม่มีแบบการขนส่งใด ๆ ที่จะเสียต้นทุนการขนส่งรวมต่ำกว่านี้ได้
อีก ^{1/}

แบบการขนส่งที่สมบูรณ์ที่สุดข้างต้น สามารถพิจารณาการจัดสรรจำนวนการขนส่ง
ได้จากตัวเลขแสดงจำนวนสินค้าที่จะขนส่งซึ่งมีวงกลมล้อมรอบอยู่นั้นเอง ซึ่งแบบการจัดสรรการ
ขนส่งตลอดจนค่าใช้จ่ายรวมในการขนส่งดังกล่าว อาจแสดงให้เห็นชัดได้ดังนี้

1/

อาจจะมีแบบค่าเฉลยการขนส่งแบบอื่น ๆ อีกที่เสียต้นทุนการขนส่งรวมเท่ากันได้
ซึ่งก็หมายความว่า การขนส่งนี้มีได้หลายค่าเฉลย (multiple solutions) แต่ทุก ๆ ค่าเฉลย
จะเสียต้นทุนการขนส่งรวมเท่ากันหมด จะเสียต้นทุนน้อยกว่าหรือต่ำกว่านี้ไม่มีอีกแล้ว

การขนส่ง	จำนวนการขนส่ง	ค่าขนส่งต่อหน่วย	ค่าใช้จ่ายรวม
A - II	20	8	160
A - III	40	12	480
B - III	10	10	100
B - IV	70	4	280
C - I	40	3	120
C - II	20	6	120
ต้นทุนค่าใช้จ่ายรวม			1,260 หน่วยเงินตรา

จากที่ได้แสดงวิธีการทดสอบความสมบูรณ์ของแบบค่าเฉลยการขนส่ง โดยวิธีก้าวย้ำมา โดยตลอดจนกระทั่งปรับปรุง โยกย้ายการขนส่งให้ได้แบบการขนส่งที่ดีที่สุดข้างต้นแล้วนั้น ในที่นี้อาจจะสามารถสรุปวิธีดำเนินการทดสอบและการปรับปรุงดังกล่าวตามลำดับขั้นตอนได้ดังต่อไปนี้

1. จากแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้ (feasible solution) ใด ๆ เมื่อต้องการประเมินช่องการขนส่งที่ว่างอยู่ (water cell) ช่องใด ก็ให้สร้างวงจรปิด (closed path) ของช่องการขนส่งนั้นไว้ ทั้งนี้วงจรปิดดังกล่าวจะต้องเริ่มจากช่องการขนส่งที่ว่างอยู่นั้น และเลื่อนไปตามแนวอนหรือแนวตั้งตามช่องการขนส่งที่มีการขนส่งอยู่แต่เดิม (stone cell) จนกระทั่งเป็นวงจรปิดไปสู่ช่องการขนส่งที่ว่างอยู่อันเป็นช่องที่ต้องการจะประเมินค่า สำหรับทิศทางของวงจรปิดนั้นจะเลื่อนไปในทิศทางใดก็จะเป็นไม่ก่อให้เกิดความแตกต่างในการประเมินค่าแต่อย่างใด ดังนั้นวงจรปิดจะเลื่อนไปในทิศทางใดก็ได้ทั้งสิ้น เพราะทิศทางไม่มีความหมายใด ๆ

2. กำหนดเครื่องหมายบวก (+) และเครื่องหมายลบ (-) แก่ช่องการขนส่งซึ่งอยู่ในวงจรปิดนั้นสลับกันไป ทั้งนี้ให้เริ่มต้นด้วย เครื่องหมายบวกแก่ช่องการขนส่งที่ว่างอยู่ อันเป็นช่องที่ต้องการจะประเมินค่าขนส่งก่อนและสลับกันไปตามช่องที่มีการขนส่งอยู่แต่เดิม ในวงจรปิดนั้นจนครบวงจร

3. นำต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยซึ่งมีเครื่องหมายที่ได้กำหนดไว้แล้ว (ตามขั้นตอนที่ 2) ของช่องที่อยู่ในวงจรมารวมกัน จะได้ค่าประเมินต้นทุนการขนส่งสุทธิต่อหน่วยของช่อง การขนส่งที่ว่างอยู่นั้น ๆ

4. ทำการประเมินต้นทุนการขนส่งสุทธิ ของช่องการขนส่งที่ว่างอยู่ให้ครบทุก ๆ ช่อง

5. สืบราคาประเมินต้นทุนการขนส่ง ของช่องการขนส่งที่ว่างอยู่ทั้งหมด ทั้งนี้ถ้า ค่าประเมินของช่องการขนส่งใดได้เครื่องหมายบวก จะหมายความว่าหากช่องการขนส่งดังกล่าว มีการขนส่งเกิดขึ้น จะทำให้ต้นทุนการขนส่งรวมเพิ่มขึ้น แต่ถ้าค่าประเมินได้เครื่องหมายลบจะหมายความว่า หากช่องการขนส่งดังกล่าวมีการขนส่งเกิดขึ้น จะทำให้ต้นทุนการขนส่งรวมลดลง

6. ถ้าค่าประเมินต้นทุนการขนส่งสุทธิของช่องการขนส่งที่ว่างอยู่ทุก ๆ ช่องเป็น บวกหมด แสดงว่าแบบการขนส่งที่เป็นจริงได้นี้ แท้ที่จริงก็คือ แบบการขนส่งที่สมบูรณ์ที่สุดนั่นเอง แต่ถ้าค่าประเมินของช่องการขนส่งที่ว่างอยู่ในบางช่องมี เครื่องหมายลบอยู่ นั้นย่อมแสดงว่าแบบการขนส่งที่เป็นจริงได้ดังกล่าว ยังไม่ใช่แบบการขนส่งที่สมบูรณ์ที่สุด จะต้องมีการโยกย้ายการขนส่ง ต่อไป ซึ่งในการโยกย้ายการขนส่งนี้ก็ต้องโยกย้ายในวงจรของช่องซึ่งมีค่าประเมินติดลบมากที่สุด ให้มีการขนส่งเกิดขึ้นในจำนวนที่มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ และเมื่อโยกย้ายการขนส่งดังกล่าวแล้วก็จะ ได้แบบค่าเฉลี่ยการขนส่งที่เป็นจริงได้แบบใหม่ต่อไป จากนั้นก็ย้อนกลับไปที่เริ่มต้นตามขั้นตอนแรกอีก จนกระทั่งค่าประเมินของช่องการขนส่งที่ว่างอยู่ทุก ๆ ช่องมีเครื่องหมายเป็นบวกหมดก็จะได้แบบ ค่าเฉลี่ยที่สมบูรณ์ที่สุดตามต้องการ

อนึ่ง จากการทดสอบความสมบูรณ์ของแบบค่าเฉลี่ยที่เป็นจริงได้ตลอดจนการปรับปรุงโยกย้ายการขนส่งจนได้แบบค่าเฉลี่ยการขนส่งที่สมบูรณ์ที่สุด ดังที่ได้แสดงแล้วในตาราง 3 - 7 ข้างต้น จะเห็นได้ว่าตาราง 3 - 7 เป็นตารางแบบค่าเฉลี่ยที่สมบูรณ์ที่สุด ก็ด้วยเหตุ ว่าค่าประเมินต้นทุนการขนส่งสุทธิของช่องการขนส่งที่ว่างอยู่นั้น ไม่มีช่องใดเลยที่มีค่าประเมินเป็น ลบ นั่นคือจะไม่มีวิธีการใด ๆ เลยที่จะทำให้ต้นทุนการขนส่งรวมลดต่ำกว่า 1,260 หน่วยเงินตรา อย่างไรก็ตาม ถ้าหากพิจารณาให้รอบคอบแล้วจะพบว่า ในช่องการขนส่งที่ว่างอยู่บางช่อง A - I และ A-IV มีค่าประเมินต้นทุนการขนส่งสุทธิเป็นศูนย์ "0" ซึ่งค่าประเมินดังกล่าวแสดงว่า

หากจะมีการโยกย้ายการขนส่งให้้องการขนส่งที่ว่างอยู่นั้นมีการขนส่งเกิดขึ้นเท่าใดก็ตาม ก็จะไม่ส่งผลให้ต้นทุนการขนส่งรวมเปลี่ยนแปลงไปแต่อย่างใด แต่ที่แน่นอนที่สุดก็คือ การโยกย้ายนี้จะทำให้ได้รูปแบบการขนส่งแบบใหม่ขึ้นอีก นั่นคือจะได้อาเฉลยหลายรูปแบบ (multiple solutions) ซึ่งทุกรูปอาเฉลยดังกล่าวจะเป็นแบบอาเฉลยที่สมบูรณ์ดีที่สุดเท่าเทียมกัน

ในการหารูปแบบอาเฉลยของการขนส่งที่สมบูรณ์ดีที่สุด ซึ่งแตกต่างไปจากอาเฉลยในตาราง 3 - 7 นั้น อาจกระทำได้โดยโยกย้ายการขนส่งให้้องการขนส่ง A - I มีการขนส่งเกิดขึ้นในจำนวนมากที่สุดเท่าที่จะทำได้^{1/} โดยการโยกย้ายนี้ก็จะกระทำในวงจรปิดของ้องการขนส่ง A - I นั้นเอง ซึ่งวงจรปิดดังกล่าวได้แสดงไว้แล้วในตาราง 3 - 7 และเมื่อเกิดการโยกย้ายการขนส่งแล้วจะได้รูปแบบอาเฉลยใหม่เป็น :-

1/ ความจริงแล้วการโยกย้ายจำนวนขนส่งนี้ จะกระทำคราวละทีหนึ่งก็ทำได้ แต่ต้องไม่เกินจำนวนสูงสุดเท่าที่จะทำได้ของวงจรนั้น ๆ สำหรับต้นทุนรวมของการขนส่งจะเท่ากันทุก ๆ กรณีไป ในที่นี้ให้มีการโยกย้ายเต็มจำนวนสูงสุดเพื่อให้เห็นชัดเจนและเข้าใจง่ายขึ้นเท่านั้น

ตาราง 3 - 8 ตารางแบบค่าเฉลี่ยที่สมบูรณ์ที่สุดแบบที่สี่

โรงงาน \ ตลาด	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5 20	8 0	12 40	6 *	60
B	5 2	9 3	10 10	4 70	80
C	3 20	6 40	13 3	7 3	60
ความต้องการ	40	40	50	70	200

จากตาราง 3 - 8 จะเห็นว่าช่องการขนส่งที่ว่างอยู่ A - II และ A - IV มีค่าประเมินเป็นศูนย์ ดังนั้นหากมีการโยกย้ายการขนส่งในช่องดังกล่าวก็จะได้แบบค่าเฉลี่ยการขนส่งรูปใหม่ขึ้นอีก อย่างไรก็ตามถ้าโยกย้ายการขนส่งในวงจรของช่อง A - I แล้วแบบการขนส่งก็จะย้อนกลับไปเหมือนกับตาราง 3 - 7 แต่ถ้าโยกย้ายการขนส่งในวงจรของช่อง A - IV จะได้รูปแบบค่าเฉลี่ยการขนส่งที่แตกต่างออกไป ซึ่งการโยกย้ายการขนส่งในวงจรของช่อง A - IV เป็นดังนี้

ตาราง 3 - 9 ตารางแบบค่าเฉลี่ยที่สมบูรณ์ที่สุดแบบที่สาม

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5 20	8 0 *	12 0	6 40	60
B	5 2	9 3	10 50	4 3	80
C	3 20	6 40	13 3	7 3	60
ความต้องการ	40	40	50	70	200

พิจารณาตาราง 3 - 9 ก็จะได้พบว่าการขนส่งที่วางอยู่ A - II และ A - III มีค่าประเมินเป็นศูนย์ ดังนั้นหากมีการโยกย้ายการขนส่งในวงจรของช่องดังกล่าวก็อาจได้แบบค่าเฉลี่ยการขนส่งในรูปแบบใหม่ขึ้นอีกเช่นกัน อย่างไรก็ตามการโยกย้ายการขนส่งในวงจรของช่อง A - III จะทำให้ได้รูปแบบการขนส่งเช่นเดียวกับ ตาราง 3 - 8 ซึ่งไม่เกิดแบบค่าเฉลี่ยใหม่แต่อย่างใด แต่ถ้าหากการโยกย้ายการขนส่งในวงจรของการขนส่ง A - I ก็จะได้แบบการขนส่งที่แตกต่างออกไปจากที่มีอยู่เดิมได้ ซึ่งเมื่อโยกย้ายการขนส่งในวงจรของช่อง A - I แล้วจะได้แบบค่าเฉลี่ยการขนส่งดังต่อไปนี้

ตาราง 3 - 10 ตารางแบบค่าเฉลี่ยที่สมบูรณ์ที่สุดแบบที่สี่

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5 0	8 20	12 0	6 40	60
B	5 2	9 3	10 50	4 30	80
C	3 40	6 20	13 3	7 3	60
ความต้องการ	40	40	50	10	200

จากการพิจารณา ตาราง 3 - 10 จะพบว่า ถึงแม้ต้องการขนส่งที่วางอยู่ A - I และ A - III จะมีค่าประเมินต้นทุนการขนส่งสุทธิเป็นศูนย์ก็ตามแต่การโยกย้ายการขนส่งในวงจรของช่องทั้งสองจะไม่ก่อให้เกิดแบบค่าเฉลี่ยการขนส่งที่แตกต่างไปจากแบบการขนส่งที่มีอยู่แล้วก่อนหน้านี้แต่อย่างใด กล่าวคือ ถ้าโยกย้ายการขนส่งในวงจรของช่อง A - I แบบการขนส่งก็จะย้อนกลับไปที่เหมือนกับแบบการขนส่งในตาราง 3 - 9 และถ้าโยกย้ายการขนส่งในวงจรของช่อง A - III แบบการขนส่งที่ได้ก็จะไปเหมือนกับแบบค่าเฉลี่ยในตาราง 3 - 7 นั้นเอง ดังนั้นแล้วการโยกย้ายการขนส่งในช่องการขนส่งที่วางอยู่ดังกล่าวทั้งสองนั้นจะไม่ก่อให้เกิดประโยชน์ใด ๆ ขึ้นเลย นั้นย่อหมายความว่า แบบค่าเฉลี่ยการขนส่งที่สมบูรณ์ที่สุดใน

ในกรณีนี้จะมีเพียง 4 รูปแบบดังที่ได้แสดงมาแล้วเท่านั้น ^{1/}

4.2 วิธีการหาค่าเฉลยโดยวิธีลัด (The Shortcut Method)

การหาค่าเฉลยของปัญหาการขนส่งโดยวิธีพิจารณามุมตะวันตกเฉียงเหนือซึ่งอาศัยหลักของตำแหน่งดังที่ได้แสดงมาในหัวข้อ 4.1 แล้วนั้น เป็นวิธีการที่ประหยัดเวลาดำเนินการมากทั้งนี้เพราะวิธีการดังกล่าวมิได้ตำหนึ่ว่าเป้าหมายการลดสรรทรัพยากรขนส่งนั้นคืออะไร ต้องการค่าสูงสุดของประโยชน์ที่จะได้รับ หรือต้องการค่าต่ำสุดของสิ่งที่จะต้องสูญเสีย เช่นนี้แล้วการลดสรรจึงกระทำตามลำดับตำแหน่งของช่องการขนส่งเท่านั้น การลดสรรให้ลักษณะข้างต้นจึงทำให้การดำเนินการประหยัดและเสียเวลามากทำให้ไม่นิยมที่จะใช้กันในทางปฏิบัติกัน ดังนั้นจึงได้มีวิธีการที่จะหาค่าเฉลยปัญหาการขนส่งนี้ โดยยึดหลักการพิจารณาเป้าหมายของปัญหามาเกี่ยวข้องกับวิธีการดังกล่าวจะดำเนินการลดสรรการขนส่งให้แก่ช่องการขนส่งซึ่งมีคุณสมบัติสอดคล้องที่จะนำไปสู่เป้าหมายที่ต้องการโดยตรงมากที่สุด กล่าวคือ ถ้าเป้าหมายต้องการค่าสูงสุดของประโยชน์ที่จะได้รับ การลดสรรก็จะดำเนินการโดยเลือกจัดสรรให้มีการขนส่งแก่ช่องการขนส่งที่จะให้ผลประโยชน์ต่อหน่วยสูงที่สุดก่อนและลดหลั่นกันตามลำดับไป และถ้าเป้าหมายต้องการค่าต่ำสุดของสิ่งที่จะต้องสูญเสียอันเกิดจากการขนส่ง การลดสรรก็จะกระทำโดยเลือก

^{1/} ถ้าการโยกย้ายจำนวนการขนส่งในแต่ละวงจรกระทำไม่ได้มีจำนวนสูงสุดของจำนวนที่จะโยกย้ายได้ของวงจรนั้น ๆ แบบค่าเฉลยปัญหาการขนส่งนี้ก็จะมีความยาว (20 x 40 x 20 ค่าเฉลย) แต่ถึงอย่างไรก็ตามรูปแบบลักษณะค่าเฉลยโดยทั่วไปก็จะมีเพียง 4 รูปแบบเท่านั้น หากแต่ว่าต่างกันที่จำนวนการขนส่งที่ไม่ได้มีจำนวนนั้นนั่นเอง

คัดสรรให้แก่ป้องกันสิ่งที่ไม่ก่อให้เกิดความเสียหายนั้น ๆ น้อยที่สุดก่อนแล้วจึง เรือนลำดับไปยัง
 ป้องกันสิ่งที่ไม่ก่อให้เกิดความเสียหายที่สูงกว่าต่อไป วิธีการดังกล่าวนี้ทำให้การดำเนินการหาค่า
 เฉลยทำได้รวดเร็วและตรงตามเป้าหมายมากขึ้น ดังนั้นจึงได้เรียกวิธีการนี้ว่า "วิธีลัด"^{1/}
 (the shortcut method)

วิธีลัด ซึ่งอาศัยการพิจารณาเป้าหมายดังได้กล่าวแล้วข้างต้น กระทำได้รวดเร็ว
 และสิ้นเปลืองทรัพยากรที่ใช้ในการดำเนินการน้อยมาก ในที่นี้จะขอยกตัวอย่างแสดงวิธีการดำเนินการ
 การคัดสรรดังกล่าว โดยอาศัยปัญหา โจทย์การขนส่ง เช่นเดียวกันกับที่ได้แสดงให้เห็นแล้วโดย
 วิเคราะห์ตามตารางต้นทุนเพียงหนึ่ง นั่นคือ ปัญหาโจทย์ในตาราง 3 - 2 ซึ่งเป็นปัญหาการขนส่ง
 กรณีที่ต้องการให้การคัดสรรนั้นมีต้นทุนการขนส่งรวมต่ำที่สุด ตารางปัญหาดังกล่าวอาจแสดงให้เห็น
 เห็นชัดเจนอีกครั้งหนึ่ง โดยตารางต่อไปนี้

^{1/} ตำราบางเล่ม เรียกวิธีนี้ว่า "วิธีตรวจสอบ" (the inspection method)
 หรืออาจเรียกเป็นชื่ออื่น ๆ อีกก็ได้

ตาราง 3 - 11 ตารางต้นทุนการขนส่ง

<div style="text-align: center;"> ตลาค โรงงาน </div>	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5	8 (20)	12 (40)	6	60
B	5	9	10 (10)	4 (70)	80
C	3 (40)	6 (20)	13	7	60
ความต้องการ	40	40	50	70	200

การคัดสรรการขนส่งโดยวิธีนี้ ดำเนินการโดยพิจารณาว่าในช่องการขนส่งทั้งหมด นั้น ช่องการขนส่งใดทำให้เสียต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยต่ำที่สุดก็ให้คัดสรรการขนส่งลงในช่องการขนส่งนั้นเสียก่อน ทั้งนี้ให้ช่องการขนส่งดังกล่าวมีจำนวนการขนส่งมากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ตามกำลังผลิตของโรงงานและความต้องการของตลาดนั้น ๆ จากนั้นจึงพิจารณาคัดสรรการขนส่งไปยังช่องการขนส่งที่ทำได้เสียต้นทุนการขนส่งที่ต่ำที่สุดในลำดับถัดมา ในที่นี้เมื่อพิจารณาตาราง 3 - 11 แล้วจะพบว่า ช่องการขนส่ง C - I เป็นช่องการขนส่งที่เสียต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยต่ำที่สุด (3 หน่วยเงินตรา) ในบรรดาช่องการขนส่งที่มีอยู่ทั้งหมด เช่นนี้แล้วจึงควรคัดสรรให้ช่อง C - I มีการขนส่งในจำนวนที่มากที่สุด คือ ให้มีการขนส่ง 40 หน่วยสินค้า ตามที่ตลาด — ต้องการ จากนี้จึงพิจารณาต่อไปว่าช่องการขนส่งใดที่จะเสียต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยต่ำที่สุดในลำดับถัดมา จากการพิจารณาจะพบว่าช่องการขนส่ง B - IV เป็นช่องการขนส่งที่เสียต้นทุนต่อหน่วย (4 หน่วย

เงินตรา) ที่ต่ำที่สุดในลำดับต่อมา ดังนั้นจึงจัดสรรให้โครงการขนส่ง B - IV มีการขนส่งมากที่สุดเท่าที่จะทำได้นั่นคือ ให้มีการขนส่ง 70 หน่วยสินค้า ตามความต้องการของตลาด IV จากนั้นก็จะพบว่าโครงการขนส่ง A - I และ B - I เป็นโครงการขนส่งที่เสียต้นทุนการขนส่ง (5 หน่วยเงินตรา) เท่ากัน และเป็นระดับต้นทุนที่ต่ำที่สุดในลำดับต่อมา จึงควรจัดสรรให้มีการขนส่งต่อไป อย่างไรก็ตามเมื่อสำรวจความต้องการของตลาด I แล้วจะพบตลาด I ได้รับสินค้าครบจำนวนตามความต้องการแล้วจึงไม่มีความจำเป็นใด ๆ ที่จะต้องจัดสรรการขนส่งให้ตลาด I อีกต่อไป เช่นนี้แล้วจึงพิจารณาข้ามไปยังโครงการขนส่งที่มีต้นทุนการขนส่งต่อหน่วยที่ต่ำที่สุดในลำดับต่อไปอีก ซึ่งโครงการขนส่งดังกล่าวคือ A - IV และ C - II มีต้นทุนการขนส่ง (6 หน่วยเงินตรา) เท่ากัน ในที่นี้จะพบว่าโครงการขนส่ง A - IV นั้นไม่จำเป็นจะต้องจัดสรรการขนส่งใด ๆ ต่อไปแล้วเพราะว่าตลาด IV ได้รับสินค้าจากโรงงาน B จำนวน 70 หน่วยสินค้าครบตามความต้องการแล้ว สำหรับโครงการขนส่ง C - II นั้นสามารถจัดสรรการขนส่งได้เพียง 20 หน่วยสินค้าเท่านั้น ทั้งนี้เพราะโรงงาน C มีผลผลิตเหลือจากการขนส่งไปสู่ตลาด I เพียง 20 หน่วยสินค้า ดังนั้นจึงจัดสรรให้โครงการขนส่ง C - II มีการขนส่ง 20 หน่วยสินค้าตามที่เหลืออยู่ และเมื่อจัดสรรให้โครงการขนส่ง C - II ก็จะพบว่า โครงการขนส่ง C - IV เป็นโครงการขนส่งที่มีต้นทุนการขนส่งต่ำที่สุดในลำดับต่อมา แต่อย่างไรก็ตามโรงงาน C ไม่มีสินค้าที่จะจัดสรรต่อไปแล้ว ดังนั้น การขนส่งในช่อง C - IV จึงไม่สามารถที่จะทำได้เช่นนี้แล้วการพิจารณาจึงต้องเลื่อนข้ามไปสู่โครงการขนส่ง A - II ซึ่งเป็นโครงการขนส่งที่มีต้นทุนการขนส่งต่อหน่วย (8 หน่วยเงินตรา) ต่ำที่สุดต่อไป ในการจัดสรรการขนส่งในช่อง A - II นี้ สามารถที่จะจัดสรรให้มีการขนส่งได้ 20 หน่วยสินค้าอันเป็นไปตามความต้องการรวมของตลาด II ซึ่งมีความต้องการสินค้าทั้งสิ้น 40 หน่วย แต่ได้รับสินค้าจากโรงงาน C อยู่แล้ว 20 หน่วย จากนั้นก็จะพิจารณาเห็นได้ว่าโครงการขนส่ง B - II มีต้นทุนการขนส่งต่อหน่วย (9 หน่วยเงินตรา) ในลำดับที่ต่ำที่สุดต่อมา แต่ตลาด II ได้รับสินค้าครบตามความต้องการแล้ว ดังนั้นจึงข้ามไปจัดสรรโครงการขนส่ง B - III ต่อไป ซึ่งการขนส่งดังกล่าวในช่อง B - III นี้สามารถกำหนดให้มีขึ้นได้เพียง 10 หน่วยสินค้าเท่านั้น ทั้งนี้เพราะโรงงาน B มีสินค้าซึ่งเหลืออยู่หลังการจัดสรรให้ตลาด IV เพียง 10 หน่วย ซึ่งเมื่อจัดสรรให้แก่โครงการขนส่ง B - III

แล้ว จะพบว่าข้อการขนส่ง A - III เป็นข้อการขนส่งที่เสียต้นทุนการขนส่ง (12 หน่วยเงินตรา) ต่ำที่สุดในลำดับต่อมา จึงจัดสรรให้ข้อการขนส่ง A - III มีสินค้ามากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ซึ่งสินค้าจำนวนนั้นคือ 40 หน่วย อันเป็นไปตามความต้องการที่ขาดอยู่ของตลาด III และผลผลิตที่เหลือของโรงงาน A เมื่อจัดสรรการขนส่งดังที่ได้แสดงมา โดยตลอดแล้วก็จะพบว่าการจัดสรรได้ครบถ้วนสมบูรณ์ตามกำลังผลิตของแต่ละโรงงานและเป็นไปตามความต้องการของตลาดต่าง ๆ แล้ว ซึ่งการจัดสรรการขนส่งดังกล่าวนี้สามารถเห็นได้ชัดเจนในตารางการขนส่งต่อไปนี้

ตาราง 3 - 12 ตารางแสดงแบบค่าเฉลยการขนส่งที่เป็นจริงได้เบื้องต้นโดยวิธีสด

โรงงาน \ ตลาด	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5 0	8 20	12 40	6 0	60
B	5 2	9 3	10 10	4 70	80
C	3 40	6 20	13 3	7 3	60
ความต้องการ	40	40	50	70	200

เมื่อจัดสรรการขนส่งได้ครบตามความต้องการของตลาดและเป็นไปตามกำลังผลิตของโรงงานต่าง ๆ แล้ว ก็จะได้แบบการขนส่งที่เป็นจริงได้เบื้องต้น ดังที่ปรากฏในตาราง 3-12 จากนี้ก็ดำเนินการทดสอบความสมบูรณ์ของค่าเฉลยโดยวิธีกัว ข้าม ซึ่งค่าประเมินการขนส่งของช่องการขนส่งที่ว่างอยู่ได้แสดงไว้พร้อมแล้วในตาราง 3-12 ข้างต้นนั้น

จากการพิจารณาค่าประเมินการขนส่งของช่องการขนส่งที่ว่างอยู่ จะพบว่าแบบค่าเฉลยการขนส่งที่เป็นจริงได้ ตามตาราง 3-12 นั้น เป็นแบบการขนส่งที่สมบูรณ์ที่สุดแล้ว และเป็นแบบการขนส่งซึ่งมีรูปแบบเช่นเดียวกับกับแบบค่าเฉลยการขนส่งโดยวิธีตะวันตกเฉียงเหนือในตาราง 3-7 นั้นเอง ดังนั้นรูปแบบค่าเฉลยในกรณีนี้ก็จะมีรูป 4 รูป แบบเช่นเดียวกัน

4.3 วิธีประมาณการแบบรัสเซลล์ (Russell's Approximation Method)

การหาค่าเฉลยโดยวิธีประมาณการแบบรัสเซลล์^{1/} เป็นวิธีการเพื่อหาแบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้เบื้องต้นที่มีประสิทธิภาพในการหาค่าเฉลยค่อนข้างสูงเช่นเดียวกับวิธีสัด เพราะวิธีการนี้จะให้แบบค่าเฉลยที่เป็นจริงได้เบื้องต้นซึ่งเป็นแบบค่าเฉลยที่สมบูรณ์ที่สุดในทันทีหรือใกล้เคียงกัน

ในที่นี้ ขอยกตัวอย่างปัญหาการขนส่ง กรณีเดียวกันกับที่ได้แสดงไว้แล้วโดยสองวิธีแรก คือ ปัญหาโจทย์ในตาราง 3 - 2 นั้นเอง

1/

Edward J. Russell, "Extension of Dantzig's Algorithm to Finding an Initial Near - optimal Basis for the Transportation Problem", Operations Research, 17 (January - February, 1969), 187 - 191.

ตาราง 3 • 13 ตารางต้นทุนการขนส่ง

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5	8	12	6	60
B	5	9	10	4	80
C	3	6	13	7	60
ความต้องการ	40	40	50	70	200

วิธีการประมาณการแบบรัลเซลล์ สามารถแสดงขั้นตอนการดำเนินการได้ ดังนี้

1. พิจารณาค่าต้นทุนการขนส่งที่สูงที่สุด ของแต่ละแถวอนและแต่ละแถวตั้ง (row maximum and column maximum)
2. สร้างตารางแสดงต้นทุนใหม่ ซึ่งต้นทุนใหม่นี้เป็นต้นทุนการขนส่ง ที่เกิดจากการนำต้นทุนการขนส่งเดิมหักออกจากผลรวมของค่าต้นทุนที่สูงที่สุดของแถวอนและแถวตั้ง
3. คัดสรรการขนส่งในจำนวนที่มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ลงในช่องการขนส่งซึ่งมีค่าขนส่งสูงที่สุดในตารางต้นทุนใหม่นี้
4. คิดคำนวณและแสดงความต้องการในสินค้า และผลผลิตของแต่ละโรงงาน ให้ตรงกับความต้องการและผลผลิตที่ยังคงเหลืออยู่ หลังจากที่ได้คัดสรรการขนส่งนี้แล้ว จากนั้นก็สร้างตารางแสดงต้นทุนใหม่ ตามวิธีการเดิมในขั้นตอนที่ 1 และ 2 ข้างต้น

5. ดำเนินการตามขั้นตอนที่ 3 และ 4 ซ้ำอีก

6. เมื่อผลผลิตของทุก ๆ โรงงานได้รับการจัดสรรการขนส่งจนครบตามความต้องการของแต่ละตลาดแล้ว ก็จะได้แบบการขนส่งที่เป็นจริงได้เบื้องต้น ต่อจากนี้ก็คือดำเนินการทดสอบความสำเร็จของแบบค่าเฉลยการขนส่งนี้ต่อไป

ในที่นี้ จะแสดงตารางจัดสรรการขนส่งโดยวิธีการประมาณการแบบรัลเซลล์ตามขั้นตอนข้างต้นดังต่อไปนี้

ตาราง 3 - 14 ตารางการจัดสรรการขนส่งครั้งแรก

ตลาด \ โรงงาน	ตลาด				ผลผลิต	ต้นทุนสูงสุด แกว่นอน
	I	II	III	IV		
A	12	13	13	13	60	12
B	10	10	13	13	80	10
C	15	16 (40)	13	13	60	13
ความต้องการ	40	40	50	70	200	

ต้นทุนสูงสุด

5 9 13 7

แกว่นอง

ตาราง 3 - 15 ตารางการคัดเลือกการขนส่งครั้งที่สอง

ตลาด โรงงาน	I	III	IV	ผลผลิต	ต้นทุนสูงสุด แถวอน
A	12	13	13	60	12
B	10	13	13	80	10
c	15 20	13	13	20 //	13
ความต้องการ	40	50	70	160 //	
ต้นทุนสูงสุด แถวตั้ง	5	13	7		

ตารางที่ 3 • 16 ตารางการคัดเลือกการขนส่งครั้งที่สาม

ตลาด โรงงาน	I	III	IV	ผลผลิต	ต้นทุนสูงสุด แถวอน
A	12 20	12 40	12	60	12
B	10	12 10	12 70	80	10
ความต้องการ	20 //	50	70	140 //	
ต้นทุนสูงสุด แถวตั้ง	5	12	6		

เมื่อดำเนินการจัดสรรการขนส่งได้ครบตามความต้องการและผลผลิตแล้ว ก็จะได้แบบการขนส่งที่เป็นจริงได้เบื้องต้น ดังนี้

ตาราง 3 - 17 ตารางแบบค่าเฉลยการขนส่งที่เป็นจริงได้เบื้องต้น โดยวิธีประมาณการแบบรัสเซลล์

ตลาด โรงงาน	I	II	III	IV	ผลผลิต
A	5 20 20	8 0	12 40	6 0	60
B	5 2	9 3	10 10	4 70 70	80
C	3 20	6 40	13 3	7 3	60
ความต้องการ	40	40	50	70	200

จากตาราง 3 - 17 อันเป็นตารางแบบค่าเฉลยการขนส่งที่เป็นจริงได้เบื้องต้น เมื่อทำการทดสอบความสมบูรณ์ โดยวิธีกัวฮัม ก็พบว่าช่องการขนส่งซึ่งว่างอยู่ทุกช่องจะมีค่าประเมินเป็น "บวก" ทั้งสิ้น (ดังที่แสดงไว้พร้อมแล้วในตาราง 3 - 17) ดังนั้นย่อมแสดงว่าแบบการขนส่งในตาราง 3 - 17 นี้ เป็นแบบการขนส่งที่สมบูรณ์ที่สุดแล้ว และเป็นแบบการขนส่งซึ่งมีรูปแบบเช่นเดียวกับแบบค่าเฉลยการขนส่งโดยวิธีตะวันตกเฉียงเหนือ ในตาราง 3 - 8 นั้นเอง ดังนั้นรูปแบบค่าเฉลยในกรณีนี้ ก็จะมี 4 รูปแบบเช่นเดียวกัน

4.4 วิธีประมาณการแบบโวเกิล (Vogel's Approximation Method)

การหาค่าเฉลยที่เป็นจริงได้เบื้องต้น โดยวิธีประมาณการแบบโวเกิลนั้น เป็นวิธีประมาณการเพื่อหาค่าเฉลยที่มีประสิทธิภาพค่อนข้างสูง เช่นเดียวกับกับ วิธีสี่ดและวิธีประมาณการแบบรัลเซลล์ กล่าวคือ ค่าเฉลยที่เป็นจริงได้เบื้องต้นซึ่งได้จากการประมาณการแบบโวเกิลนี้ จะเป็นแบบค่าเฉลยที่ใกล้เคียงหรือเป็นค่าเฉลยที่สมบูรณ์ที่สุด (optimal) นั้นเอง นอกจากนี้วิธีประมาณการแบบโวเกิลนี้ ยังเป็นวิธีการที่ทำได้ง่ายด้วย

วิธีประมาณการแบบโวเกิล เป็นวิธีการดำเนินการโดยอาศัยหลักการพิจารณาความเสี่ยง หรือ ความเสียหาย หลักการก็คือ หลีกเลี่ยงหรือลดความเสียหายอันเกิดจากความเสียหายให้ได้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ซึ่งความเสี่ยงหรือความเสียหายดังกล่าว สามารถพิจารณาได้จากแนวคิดพื้นฐานที่ว่าในการจัดสรรใด ๆ ควรจะต้องจัดสรรการขนส่งลงในช่องการขนส่งซึ่งมีประสิทธิภาพมากที่สุดในการนำไปสู่เป้าหมายก่อน แต่ถ้าไม่ดำเนินการจัดสรรลงในช่องการขนส่งลักษณะดังกล่าว ก็จะต้องจัดสรรลงในช่องการขนส่งที่มีคุณสมบัตินี้จะนำไปสู่เป้าหมายในลำดับรองลงไป ซึ่งการจัดสรรลักษณะนี้จะก่อให้เกิดความแตกต่างของประสิทธิภาพการนำไปสู่เป้าหมาย ความแตกต่างของประสิทธิภาพดังกล่าว ก็คือความเสี่ยง หรือความเสียหาย หรืออาจจะเรียกอีกนัยหนึ่งว่า จำนวนการถูกลงโทษ นั้นเอง ดังนั้นในการดำเนินการจัดสรรการขนส่ง โดยวิธีประมาณการแบบโวเกิล จึงเป็นการดำเนินการจัดสรรเพื่อหลีกเลี่ยงความเสี่ยง หรือหลีกเลี่ยงการถูกลงโทษอันเกิดจากการไม่เลือกจัดสรรการขนส่งลงในช่องการขนส่งซึ่งมีประสิทธิภาพในการนำไปสู่เป้าหมายดังกล่าว วิธีดำเนินการก็คือ จัดสรรให้ช่องการขนส่งซึ่งมีความเสี่ยงสูงที่สุด หรือมีจำนวนการถูกลงโทษมากที่สุดเสียก่อน และลดหลั่นกันลงไป อนึ่ง ด้วยเหตุที่วิธีการประมาณการแบบโวเกิล เป็นวิธีการจัดสรรการขนส่งโดยการพิจารณาสถานการณ์การถูกลงโทษ ดังนั้น วิธีการดังกล่าวนี้ จึงได้รับการเรียกขานตามลักษณะการพิจารณา ในอีกชื่อหนึ่งว่า วิธีการพิจารณาการถูกลงโทษ (the penalty method) ^{1/}

^{1/}
Richmond, *Op.cit.*, p.294.

เพื่อให้เกิดความเข้าใจขั้นตอนการดำเนินงาน โดยวิธีประมาณการแบบไวเกล

ซึ่งขอยกตัวอย่างปัญหาการขนส่ง ซึ่งได้เคยแสดงไว้ในตาราง 3 - 2 ดังต่อไปนี้

ตาราง 3 - 18 ตารางต้นทุนการขนส่ง

ตลาด โรงงาน	ความเสี่ยง				ผลผลิต	ความเสี่ยง (จำนวนลงโทษ)
	I	II	III	IV		
A	5	8	12	6	60	1
B	5	9	10	4	80	1
C	3	6	13	7	60	3
ความต้องการ	40	40	50	70	200	
ความเสี่ยง (จำนวนลงโทษ)	2	2	2	2		

วิธีประมาณการแบบไวเกล สามารถแสดงขั้นตอนดำเนินงานได้ดังนี้

- พิจารณาหาค่าความเสี่ยง หรือส่วนงานที่จะถูกลงโทษ อันเกิดจากการไม่เลือกจัดสรรการขนส่ง ของแต่ละแถวนอน (row) และแต่ละแถวตั้ง (column) ซึ่งค่าความเสี่ยงของแต่ละแถวหาได้จากผลต่างของต้นทุนที่ต่ำที่สุดกับต้นทุนที่ต่ำที่สุดรองลงมาในลำดับถัดไป