บทที่ 2

ปัญหาการจัดสรร

(THE ASSIGNMENT PROBLEM)

บทที่ 2
ปัญหาการจัดสรร
(THE ASSIGNMENT PROBLEM)

หัวเรื่อง:

1. ความหมาย
2. วิวัฒนาการ
3. รูปลักษณะของปัญหาการจัดสรร
4. การหาคำเฉลยของปัญหาการจัดสรร
5. ลักษณะปัญหาการจัดสรรในรูปแบบต่างๆ
6. สรุป

วัตถุประสงค์:

เมื่อนักศึกษาได้ศึกษาบทที่ 2 นี้แล้ว สามารถ:

1. อธิบายความหมายของวิธีการที่เรียกว่า "การจัดสรร" ได้
2. อธิบายวิวัฒนาการของปัญหาการจัดสรรได้
3. วิเคราะห์รูปลักษณะของปัญหาการจัดสรรในรูปแบบต่างๆ ได้อย่างชัดเจน
4. วางแผนการจัดสรร โดยวิธีการที่เหมาะสมกับลักษณะปัญหาการจัดสรรแต่ละรูปแบบได้
5. ประยุกต์ความรู้ความเข้าใจ ในการวางแบบการจัดสรรให้เข้ากับปัญหาปัจจุบันได้อย่างถูกต้อง

บทที่ 2
ปัญหาการจัดสรร
(THE ASSIGNMENT PROBLEM)

1. ความหมาย :

ปัญหาการจัดสรร หมายถึง ปัญหาอันเกี่ยวกับการแจกแจงทรัพยากรต่าง ๆ (productive resources or facilities) ที่มีประสิทธิภาพต่าง ๆ กันไปสู่จุดหมาย (tasks) ต่าง ๆ ที่ได้กำหนดไว้แล้วให้ได้อย่างมีประสิทธิภาพสูงที่สุด

ในการจัดสรรนี้ปกติแล้วจะต้องแจกแจงให้แต่ละแหล่งทรัพยากรได้รับการจัดสรรไปสู่จุดหมายใดจุดหมายหนึ่งเท่านั้น และจุดหมายแต่ละจุดหมายจะต้องได้รับทรัพยากรจากแหล่งทรัพยากรแหล่งใดแหล่งเดียวเท่านั้นเช่นกัน ซึ่งเงื่อนไขที่กล่าวมานี้ ย่อมหมายความว่าในกระบวนการจัดสรรนี้จะต้องมีจำนวน (แหล่ง) ทรัพยากร เท่ากับจำนวนจุดหมายพอดี [1/] ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการจัดสรรคนทำงาน 4 คน เพื่อไปทำงานให้แล้วเสร็จโดยให้การทำงานนั้นสิ้นเปลืองค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ในการนี้งานที่จะจัดสรรให้คนงานไปทำนั้น ก็จะต้องมี 4 งานด้วย และคนงานแต่ละคนจะต้องทำงานอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงงานเดียวเท่านั้น และงานใดงานหนึ่งก็จะต้องจัดสรรให้คนงานคนใดคนหนึ่งเพียงคนเดียวเป็นผู้ทำงานนั้นจนกว่าจะแล้วเสร็จ จะแบ่งงานกันทำนั้นไม่ได้

[1/] ในบางรูปแบบจำนวนทรัพยากรอาจจะไม่เท่ากับจำนวนจุดหมายก็ได้ หากแต่ว่าเป็นกรณีพิเศษ ซึ่งมีเงื่อนไขและวิธีการแตกต่างกันออกไป

2. วิวัฒนาการ :

ปัญหาการจัดสรรได้รับการศึกษาค้นคว้ากันมาในอดีตเก่าแก่หลายรูปแบบด้วยกัน แต่การศึกษาในช่วงต้น ๆ นั้นมักจะอาศัยเครื่องมือและวิธีการตอบปัญหา ซึ่งอิงกับระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ ที่มีอยู่เดิม โดยยังไม่มีระเบียบวิธีการแก้ปัญหาการจัดสรรโดยตรงที่สะดวกและไม่ยุ่งยาก จนกระทั่งถึงต้นศตวรรษที่ 20 ได้มีนักคิดค้นคว้าหาระเบียบวิธีการจัดสรรขึ้นโดยเฉพาะ ระเบียบวิธีที่ค้นคว้าได้มานั้น เป็นวิธีการที่ง่ายต่อการเข้าใจ และสะดวกต่อการคำนวณ นักคิดบางท่านในกลุ่มแรก ๆ นี้ได้แก่ 1/

M.M. Flood (1953)

P.S. Dwyer (1954)

H.W. Kuhn (1955)

ในที่นี้เพื่อเป็นการศึกษาในเบื้องต้น จะได้กล่าวถึง การจัดสรรโดยวิธีการที่เรียกกันว่า วิธีการของฮังกาเรียน (Hungarian method) และวิธีการของการแปรค่าดัชนี (modified index method)

1/ M.M. Flood, "On the Hitchcock Distribution Problem." <u>Pacific Journal of Mathematics,</u> 11 (June, 1953), 369 - 386.

Paul S. Dwyer, "Solution to the Personnel Classification Problem with the Method of Optimal Regions." <u>Psychometrika,</u> IXX (March, 1954), 11 - 26

H.W. Kuhn, " The Hungarian Method for the Assignment Problem.", <u>Naval Research Logistics Quarterly,</u> II (March - June, 1955), 83 - 97.

3. รูปลักษณะของปัญหาการจัดสรร

โดยปกติแล้ว ปัญหาการจัดสรรมักจะแสดงให้เห็นได้ง่าย ๆ ในรูปของตารางการจัดสรร ซึ่งแต่ละตารางจะแสดงแหล่งทรัพยากรและจุดหมายพร้อมด้วย ผลประโยชน์ (กรณีหาค่าสูงสุด) หรือ สิ่งที่จะต้องสูญเสีย (กรณีหาค่าต่ำสุด) อันเกิดจากการจัดสรร แต่ละทรัพยากรไปสู่แต่ละจุดหมายนั้น ๆ ซึ่งตารางการจัดสรรนี้มักจะนิยมเขียนแหล่งทรัพยากรในรูปแนวนอน (row) และ จุดหมายในแนวตั้ง (column) ทั้งนี้โดยทั่วไปแล้วจำนวนแหล่งทรัพยากรและจุดหมายจะต้องมีจำนวนเท่า ๆ กัน [1/]

ในที่นี้ จะแสดงตารางปัญหาการจัดสรรในรูปทั่วไป โดยสมมุติให้การจัดสรรนี้มีแหล่งทรัพยากร n แหล่ง และจุดหมาย n จุดหมาย ตารางดังกล่าวก็จะสามารถแสดงได้ดังนี้ :

ตาราง 2 - 1 : ตารางแสดงรูปลักษณะปัญหาการจัดสรร

Tasks (j) / Resources (i)	T_1	T_2	. . .	T_n
R_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}
R_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}
.	.	.	. . .	.
.	.	.	. . .	.
.	.	.	. . .	.
R_n	a_{n1}	a_{n2}	. . .	a_{nn}

[1/] ในกรณีที่แหล่งทรัพยากรและจุดหมายมีไม่เท่ากันก็จะต้องปรับปรุงและดัดแปลงให้เท่ากันด้วย ทั้งนี้หมายความว่า ลักษณะรูปปัญหาการจัดสรรนั้นไม่อยู่ในรูปมาตรฐาน

จากตารางข้างต้น จะเห็นว่าปัญหาการจัดสรรนี้มีแหล่งทรัพยากรทั้งสิ้น n แหล่ง (R_1, R_2, ..., R_n) และมีจุดหมายที่ได้กำหนดไว้แล้ว n จุดหมาย (T_1, T_2, ..., T_n) เช่นกัน โดยที่ ผลประโยชน์หรือสิ่งที่จะต้องสูญเสีย (แล้วแต่กรณี) ของการจัดสรรทรัพยากรจากแหล่งที่ "i" ไปสู่จุดหมายที่ "j" คือ a_{ij} ($i, j = 1, 2, ..., n$)

ในที่นี้ถ้าสมมุติต่อไปว่า x_{ij} หมายถึง ความน่าจะเป็นที่จะจัดสรรทรัพยากรจากแหล่งที่ "i" ไปสู่จุดหมายที่ "j" ตารางซึ่งแสดงการจัดสรรที่สมบูรณ์เมื่อได้เกิดการจัดสรรแล้วก็จะคือ :

ตาราง 2 - 2 : ตารางแสดงรูปลักษณะปัญหาการจัดสรรเมื่อเกิดการจัดสรรแล้ว

Tasks (j) / Resources (i)	T_1	T_2	. . .	T_n
R_1	a_{11} x_{11}	a_{12} x_{12}	. . .	a_{1n} x_{1n}
R_2	a_{21} x_{21}	a_{22} x_{22}	. . .	a_{2n} x_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
R_n	a_{n1} x_{n1}	a_{n2} x_{n2}	. . .	a_{nn} x_{nn}

สำหรับค่าของความน่าจะเป็นในการจัดสรรแต่ละทรัพยากรไปสู่จุดหมายต่าง ๆ นั้น (x_{ij}) จะมีค่าเป็น "1" หรือ "0" เท่านั้น ทั้งนี้เพราะเมื่อมีการจัดสรรจากแหล่งทรัพยากรแหล่งใดแหล่งหนึ่งไปสู่จุดหมายใดจุดหมายหนึ่ง ค่าของความน่าจะเป็นของการจัดสรรนั้นจะเป็น "1" เสมอ และถ้าแหล่งทรัพยากรใดได้รับการจัดสรรไปสู่จุดหมายใดแล้ว จุดหมายอื่น ๆ ก็จะไม่ได้รับทรัพยากรจากแหล่งดังกล่าวอีกเลย ดังนั้นความน่าจะเป็นที่จุดหมายอื่น ๆ จะได้รับทรัพยากรอีกก็จะมีค่าเป็น "0" เท่านั้น ที่เป็นเช่นนั้นเพราะแต่ละแหล่งทรัพยากรจะได้รับการจัดสรรไปสู่จุดหมายใดเพียงจุดหมายหนึ่งเท่านั้น และแต่ละจุดหมายก็จะได้รับทรัพยากรจากแหล่งทรัพยากรแหล่งใดเพียงแหล่งเดียวเช่นกัน

การจัดสรรตามลักษณะทั่วไปดังตารางข้างต้นนี้นั้น โดยข้อเท็จจริงแล้วจะสามารถแสดงรูปแบบการจัดสรรได้ถึง n! แบบด้วยกัน (factorial n possible assignments : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$) หากแต่ว่าในปัญหาการจัดสรรใด ๆ ก็ตาม การจัดสรรนั้นก็ย่อมจะต้องการให้เกิดการจัดสรรเพื่อให้ได้ประสิทธิภาพสูงที่สุด ดังนั้นจะต้องมีรูปแบบการจัดสรรบางรูปแบบเท่านั้นที่จะให้ประสิทธิภาพสูงที่สุดดังต้องการ ซึ่งประสิทธิภาพของการจัดสรรโดยทั่วไปจะหมายถึงสิ่งที่สามารถนับเป็นหน่วยเนื่องได้ อันได้แก่ผลประโยชน์ เช่น รายได้ กำไร ฯลฯ หรือ สิ่งที่ต้องสูญเสีย เช่น ต้นทุน ขาดทุน เวลาทำงาน ฯลฯ ดังนั้น เป้าหมายเพื่อให้ได้ประสิทธิภาพสูงสุด ย่อมหมายถึง เป้าหมายเพื่อให้ได้รับผลประโยชน์สูงสุด หรือเป้าหมายเพื่อให้สิ่งที่ต้องสูญเสียต่ำที่สุดนั่นเอง ซึ่งเป้าหมายทางประสิทธิภาพการจัดสรรก็ย่อมจะหมายถึง ประสิทธิภาพรวมของการจัดสรรทั้งหมด มิใช่ประสิทธิภาพเฉพาะส่วนหรือบางส่วนเท่านั้น เช่นนี้แล้วประสิทธิภาพรวม ก็คือ ผลรวมของประสิทธิภาพย่อย อันเกิดจากการจัดสรร แต่ละทรัพยากรไปสู่จุดหมายต่าง ๆ นั่นเอง ทั้งนี้ การจัดสรรเฉพาะส่วน หรือเฉพาะบางทรัพยากรอาจจะไม่อยู่ในระดับสูงที่สุด กล่าวคือ การจัดสรรให้ทุก ๆ แหล่งทรัพยากรอยู่ในระดับสูงที่สุดอาจกระทำไม่ได้ แต่เมื่อรวมประสิทธิภาพของการจัดสรร-ทั้งหมดแล้วอยู่ในระดับที่ดีที่สุดได้

ซึ่งประสิทธิภาพรวมของการจัดสรรในแต่ละแหล่งทรัพยากร และเงื่อนไขของการจัดสรรดังกล่าวข้างต้น สามารถแสดงให้อยู่ในรูปแบบจำลองกระบวนการทางคณิตศาสตร์ได้ดังต่อไปนี้.

แบบจำลอง 2 - 1

Maximize (Minimize) :

$$E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$$

Subject to

$$\sum_{i-1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

and $x_{ij} \geq 0$ or $x_{ij} = 0, 1$ or $x_{ij} = x_{ij}^2$

หมายเหตุ :

สำหรับ x_{ij} โดยข้อเท็จจริงแล้วจะต้องมีค่า "0" หรือ "1" เท่านั้น คือ $x_{ij} = 0$ หรือ 1

ดังนั้นอาจจะเขียนเงื่อนไขสุดท้ายนี้อีกอย่างหนึ่งทางสมการคณิตศาสตร์ได้ว่า :

$$x_{ij} = x_{ij}^2$$

ตัวอย่าง 2 - 1 : ตัวอย่างลักษณะปัญหาการจัดสรร

สมมุติว่าต้องการจัดสรรคนทำงาน 4 คน ให้ไปทำงาน 4 อย่าง โดยที่การจัดสรรนี้เป็นไปเพื่อให้งานทั้ง 4 อย่างนั้นแล้วเสร็จอย่างมีประสิทธิภาพสูงสุด ทั้งนี้ ค่าใช้จ่ายของการทำงานของคนงานแต่ละคนที่จะทำงานแต่ละอย่างสามารถเขียนให้อยู่ในรูปตารางดังต่อไปนี้

ตาราง 2 - 3 : ตารางแสดงค่าใช้จ่าย (Cost matrix)

(บาท)

คนงาน \ งาน	I	II	III	IV
A	27	22	24	25
B	23	29	21	17
C	17	19	15	24
D	21	17	19	16

จากตัวอย่างปัญหาการจัดสรรข้างต้นนี้ จะเห็นว่าเป็นปัญหาการจัดสรรบุคคลากร (Personnel - Assignment Problem) ซึ่งจำนวนบุคคลากร คือ จำนวนคนงาน มีจำนวนเท่ากับงานที่จะต้องจัดสรรให้ทำ และคนงานแต่ละคนจะต้องทำงานเพียงงานเดียว โดยที่งานแต่ละงานก็จะต้องให้คนงานคนใดคนหนึ่งเท่านั้นเป็นผู้ทำจนกว่าจะแล้วเสร็จ ทั้งนี้การจัดสรรดังกล่าวต้องการให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุด ซึ่งประสิทธิภาพที่จะต้องพิจารณาในที่นี้ คือ ค่าใช้จ่ายรวมอันเกิดจากการทำงานทั้ง 4 งานนั้น ดังนั้นเป้าหมายหลักที่จะแสดงประสิทธิภาพของการจัดสรรนี้ ก็คือ ให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

ในที่นี้ หากจะแสดงรูปแบบการจัดสรรโดยกระบวนการเชิงเส้นทางคณิตศาสตร์ โดยสมมุติว่า x_{ij} คือความน่าจะเป็นที่จะจัดสรรคนงานคนที่ "i" ไปทำงานชนิดที่ "j" แล้ว แบบจำลองกระบวนการเชิงเส้นดังกล่าวก็จะสามารถแสดงได้โดยง่ายดังต่อไปนี้ คือ

แบบจำลอง 2 - 2

Minimize

$$
\begin{aligned}
a \quad = \quad & 27x_{11} + 22x_{12} + 24x_{13} + 25x14 \\
& + 23x_{21} + 29x_{22} + 21x_{23} + 17x_{24} \\
& + 17x_{31} + 19x_{32} + 15x_{33} + 24x_{34} \\
& + 21x_{41} + 17x_{42} + 19x_{43} + 16x_{44}
\end{aligned}
$$

Subject to

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\
44 + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1
\end{aligned}
$$

and $\quad x_{ij} \geqslant 0, \quad (x_{ij} = x_{ij}^2)$

4. การหาคำเฉลยของปัญหาการจัดสรร

การหาคำเฉลย (solution) ซึ่งเป็นแบบการจัดสรรที่ดีที่สุด (Optimal assignment) ที่มีประสิทธิภาพการจัดสรรสูงสุดนั้น อาจจะกระทำได้หลายวิธีด้วยกัน กล่าวคือ อาจจะกระทำโดยวิธีการเลือกหา (enumeration) หรือ กระทำโดยวิธีการของกระบวนการเชิงเส้น (linear programming) หรือ อาจจะกระทำโดยวิธีเฉพาะแบบ (special technique) ก็ได้ ในที่นี้ จะแสดงหลักเหตุผลและความเหมาะสมของวิธีการดังกล่าวดังต่อไปนี้

4.1 วิธีหาคำเฉลยโดยวิธีการเลือกหา (Enumeration)

วิธีหาคำเฉลยโดยวิธีการเลือกหานี้นั้น เป็นลักษณะการหาคำเฉลยในรูปแบบของการลองผิดลองถูก ทั้งนี้ด้วยเหตุผลที่ว่า ในปัญหาการจัดสรรใด ๆ ก็ย่อมมีแบบวิธีการจัดสรรที่เป็นไปได้ (possible assignment) ได้หลายแบบด้วยกัน หากแต่ว่าจะมีแบบการจัดสรรบางแบบเท่านั้นที่นับว่าดีที่สุดเหมาะสมที่สุด (optimal) ดังนั้นวิธีการนี้ก็จะกระทำง่าย ๆ โดยการเปรียบเทียบแบบวิธีการจัดสรรที่มีอยู่ทุกแบบซึ่งกันและกัน จากนั้นก็พิจารณาว่า เป้าหมายของการจัดสรรนั้นเพื่อให้ได้รับผลประโยชน์สูงสุด หรือเพื่อให้เสียในสิ่งที่ต้องสูญเสียต่ำที่สุด เมื่อทราบแล้วจึงพิจารณาว่าผลประโยชน์ หรือ การสูญเสียของแบบวิธีจัดสรรแบบใดที่จะเหมาะสมกับเป้าหมายนั้น แบบวิธีการจัดสรรที่สอดคล้องกับเป้าหมายที่สุด ก็จะคือ คำเฉลยของปัญหาการจัดสรรนั้น ๆ ตัวอย่างเช่น ถ้าเป้าหมายคือ รายได้ อันเกิดจากการจัดสรร ดังนั้นแบบการจัดสรรแบบใดที่ก่อให้เกิดรายได้มากที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับแบบการจัดสรรที่เป็นไปได้แบบอื่น ๆ ทั้งหมดแล้ว แบบการจัดสรรนั้น ก็คือ คำเฉลย ในทางตรงกันข้ามถ้าเป้าหมาย คือ ค่าใช้จ่ายอันเกิดจากการจัดสรร ดังนั้นแบบการจัดสรรแบบใดที่ก่อให้เกิด ค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับแบบการจัดสรรที่เป็นไปได้แบบอื่น ๆ ทั้งหมดแล้วแบบการจัดสรรนั้นก็คือ คำเฉลย

เพื่อให้เข้าใจหลักการและวิธีหาคำเฉลยโดยวิธีเลือกหานี้ได้ดียิ่งขึ้น จะขอยกตัวอย่างปัญหาการจัดสรร ตามตัวอย่าง 2 - 1 ซึ่งเป็นการจัดสรรคนงาน 4 คน ให้ไปทำงาน 4 อย่างให้แล้วเสร็จ โดยให้เสียค่าใช้จ่ายการทำงานน้อยที่สุดดังนี้

ตัวอย่าง 2 - 2 : การหาคำเฉลยโดยวิธีเลือกหา

ตาราง 2 - 4 : ตารางแสดงค่าใช้จ่าย (cost matrix)

(บาท)

คนงาน \ งาน	I	II	III	IV
A	27	22	24	25
B	23	29	21	17
C	17	19	15	24
D	21	17	19	16

วิธีทำ :

จากปัญหาตัวอย่างนี้ จะพบว่าในการจัดสรรคนงาน 4 คน ให้ทำงาน 4 อย่างนั้น จะมีรูปแบบการจัดสรรที่เป็นไปได้ถึง $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ รูปแบบด้วยกัน อย่างไรก็ตามใน 24 รูปแบบนั้น จะมีแบบการจัดสรรบางรูปที่แสดงถึงการเสียค่าใช้จ่ายการทำงานต่ำที่สุด ซึ่งแบบการจัดสรรที่เสียค่าใช้จ่ายต่ำที่สุดก็คือ รูปแบบที่ดีที่สุดที่ต้องการ ในที่นี้รูปแบบการจัดสรรที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ :

รูปแบบการจัดสรรที่เป็นไปได้ :

แบบการจัดสรร (จัดสรรตามลำดับคนงาน) A - B - C - D	ค่าใช้จ่าย (บาท)			
1) I - II - III - IV	27 + 29 + 15 + 16	=	87	
2) I - II - IV - III	27 + 29 + 24 + 15	=	95	
3) I - III - II - IV	27 + 21 + 19 + 16	=	83	
4) I - III - IV - II	27 + 21 + 24 + 17	=	89	
5) I - IV - II - III	27 + 17 + 19 + 19	=	82	
* 6) I - Iv - III - II	27 + 17 + 15 + 17	=	76	
7) II - I - III - IV	22 + 23 + 15 + 16	=	76	
8) II - I - IV - III	22 + 23 + 24 + 19	=	a8	
9) II - III - I - IV	22 + 21 + 17 + 16	=	76	
10) II - III - IV - I	22 + 21 + 24 + 21.	=	88	
11) II - IV - I - III	22 + 17 + 17 + 19	=	75	*
12) II - IV - III - I	22 + 17 + 15 + 21	=	75	*
13) III - I - II - IV	24 + 23 + 19 + 16	=	82	
14) III - I - IV - II	24 + 23 + 24 + 17	=	88	
15) III - II - I - IV	24 + 29 + 17 + 16	=	86	
16) III - II - IV - I	24 + 29 + 24 + 21	=	98	
17) III - IV - I - I I	24 + 17 + 17 + 17	=	75	*
18) III - IV - II - I	24 + 17 + 19 + 21	=	81	
19) IV - I - II - III	25 + 23 + 19 + 19	=	86	
20) IV - I - III - II	25 + 23 + 15 + 17	=	90	
21) IV - II - I - III	25 + 29 + 17 + 19	=	90	
22) Iv - II - III - I	25 + 29 + 15 + 21	=	90	
23) Iv - III - I - II	25 + 21 + 17 + 17	=	80	
24) IV - III - II - I	25 + 21 + 19 + 21	=	86	

ข้อพิจารณา :

เมื่อเปรียบเทียบแบบการจัดสรรที่เป็นไปได้ทั้ง 24 แบบแล้ว จะพบว่าแบบการจัดสรรแบบที่ 11, 12, และ 17 เป็นแบบการจัดสรรที่จะทำให้สิ้นเปลืองค่าใช้จ่ายในการทำงานต่ำที่สุด (75 บาท) ดังนั้นแบบการจัดสรรที่เป็นไปได้ทั้ง 3 แบบดังกล่าว จึงเป็นแบบการจัดสรรที่ดีที่สุด มีประสิทธิภาพสูงสุด (optimal assignments)

แบบการจัดสรรที่ดีที่สุด **(optimal assignments)** :

แบบที่ I :

การจัดสรร	ค่าใช้จ่าย (บาท)
A ทำงาน II	22
B ทำงาน IV	17
C ทำงาน I	17
D ทำงาน III	19
รวมค่าใช้จ่าย ...	75 บาท

แบบที่ III :

การจัดสรร	ค่าใช้จ่าย (บาท)
A ทำงาน II	22
B ทำงาน IV	17
C ทำงาน III	15
D ทำงาน I	21
รวมค่าใช้จ่าย - - -	75 บาท

แบบที่ III :

การจัดสรร	ค่าใช้จ่าย (บาท)
A ทำงาน III	24
B ทำงาน IV	17
C ทำงาน I	17
D ทำงาน II	17
รวมค่าใช้จ่าย - - -	75 บาท

การจัดสรรในปัญหาตัวอย่างนี้ เป็นกรณีที่การจัดสรรมีได้หลายรูปแบบ (multiple solutions) การตัดสินใจเลือกใช้แบบการจัดสรรแบบใดก็ตามจะทำให้เกิดค่าใช้จ่ายเท่ากัน ดังนั้นการจะเลือกจัดสรรแบบใดนั้นอาจจะต้องพิจารณาข้อมูลและเหตุผลด้านอื่น ๆประกอบด้วย

วิธีการหาคำเฉลยโดยวิธีเลือกหาดังที่ได้กล่าวมาข้างต้นนี้ จะเห็นว่าเป็นการลองผิดลองถูกอย่างง่าย ๆ การหาคำเฉลยกระทำได้ด้วยการเปรียบเทียบแบบการจัดสรรที่เป็นไปได้เท่านั้น ซึ่งถ้าพิจารณาอย่างง่าย ๆ แล้ววิธีนี้น่าจะเป็นวิธีที่ดีที่สุดวิธีหนึ่ง หากแต่ว่าโดยข้อเท็จจริงแล้ว ถ้าจะต้องจัดสรรแผนงานใหญ่ ๆ ซึ่งมีแหล่งทรัพยากรและจุดหมายมาก ๆ การใช้วิธีเลือกหาก็จะทำให้เกิดการสับสนและเสียเวลามาก เพราะแบบการจัดสรรที่เป็นไปได้จะมีมากจนไม่เหมาะที่จะใช้วิธีนี้ ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการจัดสรรคนทำงาน 10 คน เพื่อให้ทำงาน 10 อย่าง จะพบว่าแบบการจัดสรรที่เป็นไปได้ที่จะต้องพิจารณาเปรียบเทียบมีถึง $10! = 10 \times 9 \times 8 \times \ldots \times 1 = 3,628,800$ แบบทีเดียว

4.2 วิธีหาคำเฉลยโดยวิธีการของกระบวนการเชิงเส้น (Linear Programming)

โดยเหตุที่ปัญหาการจัดสรร เป็นปัญหาที่อยู่ในรูปแบบสมการเชิงเส้น กล่าวคือ เป้าหมาย และเงื่อนไขการจัดสรรสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเส้นตรงได้ ดังนั้นในการหาคำเฉลยก็ย่อมที่จะสามารถใช้วิธีการของกระบวนการเชิงเส้น (linear programming) ได้ ในที่นี้ถ้าสมมุติว่าต้องการจัดสรรทรัพยากรจาก n แหล่ง ไปสู่จุดหมายที่กำหนดไว้แล้ว n จุดหมาย ดังเช่น ได้แสดงให้เห็นในเบื้องต้น จากตาราง 2-1 และตาราง 2-2 ดังนั้นกระบวนการเชิงเส้นก็จะสามารถแสดงให้เห็นได้ดังแบบจำลอง 2-1 ที่แล้วมา ดังนี้ :

แบบจำลอง 2 - 3 (จากแบบจำลอง 2 - 1)

Maximize (Minimize)

$$E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

and $x_{ij} \geq 0, \ (x_{ij} = x_{ij}^2)$

และถ้าปัญหาการจัดสรรนี้ เป็นไปตามตัวอย่าง 2 - 1 อันเป็นการจัดสรรคนทำงาน 4 คน ให้ไปทำงาน 4 อย่าง เพื่อให้เสียค่าใช้จ่ายการทำงานต่ำที่สุด แบบจำลองกระบวนการเชิงเส้นก็จะเขียนได้เช่นเดียวกับแบบจำลอง 2 - 2 ซึ่งได้แสดงไว้แล้วดังนี้.

แบบจำลอง 2 - 4 (จากแบบจำลอง 2 - 2)

Minimize

$$
\begin{aligned}
Z = {} & 27x_{11} + 22x_{12} + 24x_{13} + 25x_{14} \\
& + 23x_{21} + 29x_{22} + 21x_{23} + 17x_{24} \\
& + 17x_{31} + 19x_{32} + 15x_{33} + 24x_{34} \\
& + 21x_{41} + 17x_{42} + 19x_{43} + 16x_{44}
\end{aligned}
$$

Subject to

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1
\end{aligned}
$$

and $x_{ij} \geq 0, \quad (x_{ij} = x_{ij}^2)$

จากแบบจำลอง 2 - 4 หากจะหาคำเฉลยของปัญหาการจัดสรรนี้โดยวิธีการของกระบวนการเชิงเส้น ก็จะกระทำได้เช่นกัน ซึ่งวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับกรณีนี้ เห็นจะได้แก่วิธีการหาคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นโดยวิธีตาราง [1/] (simplex method) อย่างไรก็ตามแม้ว่าวิธีการหาคำเฉลยโดยตารางจะเหมาะสมที่สุด แต่การดำเนินการคำนวณนั้นจะสร้างความยุ่งยากและสิ้นเปลืองมาก ทั้งนี้ด้วยเหตุว่าในปัญหาการจัดสรรทั่วไปมักจะเป็นปัญหาเกี่ยวกับการจัดสรรที่มีแหล่งทรัพยากรและจุดหมายมาก ๆ ดังนั้นตัวแปรที่จะต้องหาคำเฉลย (ค่าความน่าจะเป็นของการจัดสรร : x_{ij}) ก็จะมีมากมายตามไปด้วย ซึ่งก่อให้เกิดความสิ้นเปลืองและยุ่งยากแต่การคำนวณมากทีเดียว กล่าวคือ ถ้าต้องการจัดสรรทรัพยากรจากแหล่งทั้งสิ้น n แหล่งทรัพยากรไปสู่ n จุดหมายแล้วละก็ ตัวแปรที่ต้องพิจารณาหาคำเฉลยก็จะมีอยู่ทั้งสิ้น n x n ตัวแปรด้วยกัน ดังตัวอย่าง แบบจำลอง 2 - 4 ข้างต้นนี้ ก็จะมีตัวแปร 4 x 4 = 16 ตัวแปรด้วยกัน ซึ่งจะเห็นว่าถ้าคำนวณโดยวิธีการของกระบวนการเชิงเส้น โดยตาราง ตารางคำนวณก็จะต้องมีขนาด (dimension) อย่างน้อย 9 x 17 (มีแถวนอน = 9 rows และมีแถวตั้ง 17 columns) ทีเดียว [2/] ดังนั้นในทางปฏิบัติจึงไม่นิยมใช้วิธีการของกระบวนการเชิงเส้นในการหาคำเฉลยของปัญหาการจัดสรร หากแต่ว่าจะใช้วิธีการเฉพาะแบบ ซึ่งสร้างขึ้นสำหรับกรณีปัญหาการจัดสรรเป็นพิเศษโดยเฉพาะ ซึ่งจะได้แสดงในรายละเอียดต่อไป

[1/] การหาคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นมีด้วยกันหลายวิธี เช่นการหาคำเฉลยโดยวิธีรูปเรขาคณิต (Graphical Method) วิธีพีชคณิต (Algebraic Method) และวิธีตาราง (Simplex Method)

[2/] คำนวณโดยวิธีตาราง (Simplex Method) ตามแบบของ William J. Baumol ซึ่งหา ดูได้ใน : William J. Baumol, *Economic Theory and Operations Analysis* (3 rd ed., Englewood Cliffs, New Jersey : Printice - Hall, Inc., 1972), p 70 - 102. ad4 ถ้าคำนวณโดยวิธีอื่นแล้วตารางจะใหญ่กว่านี้อีก

4.3 วิธีหาคำเฉลยโดยวิธีเฉพาะแบบ (Special Techniques)

วิธีการหาคำเฉลยโดยวิธีเฉพาะแบบนั้น มีด้วยกันหลายวิธีตามความเหมาะสมของปัญหา ซึ่งแต่ละวิธีการจะอาศัยหลักเหตุและผลพื้น ๆ ในการคิดคำนวณ หลักเหตุและผลดังกล่าวอาจจะกระทำโดยการลดรูปของปัญหาให้พิจารณาได้ง่าย ๆ ซึ่งเป็นการอาศัยหลักแห่งโอกาส (law of chance) และ การพิจารณาค่าเสียโอกาส (opportunity cost - loss) ซึ่งวิธีการเฉพาะแบบที่ง่าย สะดวก และนิยมกันอยู่ขณะนี้ ได้แก่วิธีการที่เรียกว่า วิธีการของฮังกาเรียน (Hungarian method) ซึ่งวิธีดังกล่าวนี้ เหมาะสมกับปัญหาการจัดสรรที่เรียกว่า ปัญหาการจัดสรรบุคคลากร[1/] (personnel - assignment problems) ซึ่งปัญหาการจัดสรรบุคคลากร หมายถึง ปัญหาการจัดสรรที่ประกอบด้วย แหล่งทรัพยากรที่มีจำนวนเท่ากันกับจำนวนจุดหมาย โดยที่แต่ละแหล่งทรัพยากร (บุคคลากร) จะต้องได้รับการแจกแจงไปสู่จุดหมายใดจุดหมายหนึ่งเท่านั้น และแต่ละจุดหมายจะต้องได้รับทรัพยากรจากแหล่งใดแหล่งหนึ่งเท่านั้นเช่นกัน ซึ่งลักษณะปัญหาการจัดสรรของฮังกาเรียนนี้ก็คือแบบการจัดสรรที่ได้กล่าวมาแล้วในเบื้องต้น ๆ นั่นเอง[2/]

วิธีการหาคำเฉลยของฮังกาเรียน (Hungarian method) อาศัยหลักการเหตุผลทางเศรษฐศาสตร์ อันเกี่ยวกับหลักของค่าเสียโอกาส (law of opportunity) ซึ่งค่าเสียโอกาสที่พิจารณาได้มานั้นจะแสดงถึงผลประโยชน์อันควรได้รับ หากแต่ว่าได้เสียผลประโยชน์นั้นไปอันเนื่องจากการไม่จัดสรรทรัพยากรไปสู่จุดหมายที่เหมาะสมกันนั่นเอง หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ

[1/] คำว่า "บุคคลากร" ในที่นี้ มิได้จำกัดความหมายให้ หมายถึงการจัดสรร "บุคคล" เท่านั้น แต่หมายรวมถึงการจัดสรรสิ่งใด ๆ ก็ได้ที่เป็นทรัพยากรทั่ว ๆ ไป หากแต่ชื่อที่เรียกนั้นได้จากความนิยมนำเครื่องมือนี้ไปใช้ในการจัดสรรบุคคลเป็นส่วนใหญ่เท่านั้นเอง

[2/] สำหรับปัญหาที่ไม่เป็นไปตามลักษณะทั่วไป และใช้วิธีการหาคำเฉลย โดยวิธีเฉพาะแบบจะกล่าวต่อไปในปัญหานั้นภายหลัง

ค่าเสียโอกาสจะเกิดขึ้นเมื่อ การจัดสรรนั้นได้จัดสรรทรัพยากรไปสู่แหล่งจุดหมายที่ไม่เหมาะสม ทั้ง ๆ ที่จุดหมายที่เหมาะสมของแต่ละแหล่งทรัพยากรนั้นมีอยู่แล้ว อย่างไรก็ตามการจัดสรรอันก่อให้เกิดค่าเสียโอกาสนั้น มิได้กระทำลงไปด้วยความไม่รู้ หรือด้วยความผิดพลาด หากแต่ว่าโดยความเป็นจริงแล้วการที่จะจัดสรรแต่ละทรัพยากรไปสู่จุดหมายที่เหมาะสมกับทรัพยากรเหล่านั้นทั้งหมด อาจจะกระทำไม่ได้ทั้งนี้ด้วยเหตุที่ว่าถ้ามีทรัพยากรจากหลาย ๆ แหล่งเหมาะสมกับจุดหมายใดจุดหมายหนึ่งร่วมกัน แต่จุดหมายนั้นก็จะรับทรัพยากรจากแหล่งใดแหล่งหนึ่งเพียงแหล่งเดียวเท่านั้น ฉะนั้นทรัพยากรจากแหล่งอื่นก็จะต้องจัดสรรไปสู่จุดหมายอื่นต่อไป ซึ่งการจัดสรรดังกล่าวจะก่อให้เกิดค่าเสียโอกาสขึ้นทันที หากแต่ว่าการกระทำดังกล่าวเป็นสิ่งที่เลี่ยงไม่ได้ ด้วยเหตุที่เป็นข้อกำหนดหรือเงื่อนไขของการจัดสรรนั่นเอง ดังนั้นวิถีทางที่ดีที่สุดในกรณีเช่นนี้ ก็คือ พยายามจัดสรรทรัพยากรต่าง ๆ ไปสู่จุดหมายที่เหมาะสมโดยเปรียบเทียบ กล่าวคือ พยายามจัดให้เกิดค่าเสียโอกาสรวมน้อยที่สุดก็จะเป็นการดีที่สุด เช่นนี้แล้ว แบบการจัดสรรที่เหมาะสมที่สุดดีที่สุด ก็คือ แบบการจัดสรรที่ก่อให้เกิดค่าเสียโอกาสน้อยที่สุดนั่นเอง

หลักการ :

การจัดสรรโดยวิธีการของฮังกาเรียน อาศัยหลักการทางเศรษฐศาสตร์อันเกี่ยวกับการพิจารณา "ค่าเสียโอกาส" ซึ่งค่าเสียโอกาสในที่นี้ก็คือ ผลประโยชน์อันควรได้รับ หากแต่ว่าได้เสียไป อันเนื่องจากการไม่สามารถที่จะแจกแจงให้แต่ละทรัพยากรได้รับการจัดสรรไปสู่จุดหมายที่เหมาะสมกันได้ ดังนั้นแบบการจัดสรรที่ดีที่สุด ก็คือ แบบการจัดสรรที่ก่อให้เกิดค่าเสียโอกาสรวมน้อยที่สุด

4.3.1 กรณีการหาค่าต่ำสุด (A Minimize Problem)

ในที่นี้ เพื่อให้เกิดความเข้าใจวิธีการจัดสรรกรณีการหาค่าต่ำสุดอย่างง่าย ๆ จึงขอยกตัวอย่าง ปัญหาการจัดสรร ตามตัวอย่าง 2 - 1 ซึ่งเป็นการจัดสรรคนงาน 4 คน ให้ไปทำงาน 4 อย่างให้แล้วเสร็จ โดยให้เสียค่าใช้จ่ายรวมของการทำงานนั้นน้อยที่สุด ดังนี้ :

ตัวอย่าง 2 - 3 : การหาคำเฉลยกรณีการหาค่าต่ำสุดโดยวิธีการของฮังกาเรียน

ตาราง 2 - 5 : **ตารางแสดงค่าใช้จ่าย** (Cost matrix)

(บาท)

งาน / คนงาน	I	II	III	IV
A	27	22	24	25
B	23	29	21	17
C	17	19	15	24
D	21	17	19	16

ข้อพิจารณา :

โดยวิธีการของฮังกาเรียนนั้น แบบการจัดสรรที่ดีที่สุดก็คือ แบบการจัดสรรที่ก่อให้เกิดค่าเสียโอกาสรวมน้อยที่สุด ดังนั้นขั้นแรกของการพิจารณาจึงจะต้องพิจารณาค่าเสียโอกาสอันเกิดจากการทำงานเสียก่อน ซึ่งค่าเสียโอกาสนี้ ถ้าพิจารณาว่าเป็นค่าเสียโอกาสอันเกิดจากการจัดสรรคนงานแต่ละคนเพื่อไปทำงานที่กำหนดให้ ค่าเสียโอกาสดังกล่าวก็เป็นค่าเสียโอกาสอันเกิดจากการเลือกงาน (job - opportunity cost) ทั้งนี้ด้วยเหตุที่ว่า ค่าเสียโอกาสนั้นเกิดจากการไม่จัดสรรคนงานแต่ละคนไปทำงานที่เสียต้นทุนน้อยที่สุด ดังนั้นจำนวนค่าเสียโอกาสของการจัดสรร ก็คือ ส่วนต่างของต้นทุนการทำงานของงานที่เสียต้นทุนต่ำที่สุด กับต้นทุนการทำงานของงานที่จะจัดสรรให้ทำเช่นนี้แล้ว ถ้าคนงานใดได้รับการจัดสรรให้ไปทำงานที่เสียต้นทุนต่ำที่สุด การจัดสรรนั้นก็จะไม่มีค่าเสียโอกาส (ค่าเสียโอกาส = 0) เพราะเป็นงานที่เหมาะกับคนงาน