UNIT 4

INTEGER PROGRAMMING

บทที่ 4

กระบวนการจำนวนเต็ม

(INTEGER PROGRAMMING)

หัวเรื่อง:

1. ความหมาย
2. วิวัฒนาการ
3. ลักษณะปัญหา
4. การหาคำเฉลย
5. สรุป

วัตถุประสงค์:

เมื่อนักศึกษาได้ศึกษาบทที่ 4 นี้แล้ว สามารถ:

1. อธิบายความหมายของกระบวนการจำนวนเต็มได้
2. อธิบายวิวัฒนาการของกระบวนการจำนวนเต็มได้
3. วิเคราะห์รูปลักษณะของปัญหาของกระบวนการจำนวนเต็ม ในรูปแบบต่างๆ ได้อย่างชัดเจน
4. วิเคราะห์และหาคำเฉลยปัญหาของกระบวนการจำนวนเต็ม โดยวิธีการที่เหมาะสมของแต่ละรูปแบบได้
5. ประยุกต์ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกระบวนการจำนวนเต็มนี้ เข้ากับเหตุการณ์ปัจจุบันได้อย่างถูกต้อง

บทที่ 4
กระบวนการจำนวนเต็ม
(INTEGER PROGRAMMING)

1. ความหมาย :

กระบวนการจำนวนเต็ม คือ กระบวนวิธีทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดของเป้าหมายที่ตั้งไว้ ภายใต้ภาวะการณ์หรือเงื่อนไขบางประการ ซึ่งเป้าหมายจะต้องอยู่ในรูปของสมการเส้นตรง สำหรับเงื่อนไขนั้นอาจจะอยู่ในรูปของสมการหรืออสมการเส้นตรงก็ได้ และทั้งนี้ตัวแปรซึ่งเป็นคำเฉลยจะต้องอยู่ในรูปของจำนวนเต็ม (integer) ด้วย

จากความหมายของกระบวนการจำนวนเต็มข้างต้น จะเห็นได้ว่าแท้ที่จริงแล้ว กระบวนการจำนวนเต็ม ก็คือ กระบวนการเชิงเส้น [1/] (linear programming) ซึ่งต้องการค่าของตัวแปรคำเฉลย (decision variables) เป็นจำนวนเต็มนั่นเอง ดังนั้นการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มนี้ อาจจะถือปฏิบัติเพื่อความสะดวกรวดเร็ว ด้วยการปัดเศษค่าของตัวแปรคำเฉลย ซึ่งได้จากการคำนวณโดยวิธีการของกระบวนการเชิงเส้นเสียเลยก็ได้ แต่อย่างไรก็ตามการปัดเศษค่าตัวแปรคำเฉลยดังกล่าว มักจะประสพปัญหาความยุ่งยากเกี่ยวกับการดำรงคำเฉลยให้เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดอยู่เสมอ ๆ เหตุที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะ

1/ สำหรับท่านผู้อ่านซึ่งไม่เคยศึกษา เรื่องกระบวนการเชิงเส้นมาก่อน สามารถศึกษาเรื่องนี้ได้ใน :

บุญสม คีรีโสภณา, <u>คณิตศาสตร์สำหรับนักเศรษฐศาสตร์</u> (EC 215), (กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์รามินทร์, 2523), หน้า 228-264.

โดยปกติแล้วคำเฉลยที่ได้จากวิธีการของกระบวนการเชิงเส้น จะเป็นคำเฉลยที่เป็นไปตามข้อกำหนดของเงื่อนไขแล้ว แต่เมื่อมีการปัดเศษค่าตัวแปรคำเฉลยเหล่านั้นเพื่อให้เป็นค่าจำนวนเต็มตามที่ต้องการ ค่าตัวแปรที่ปัดเศษแล้ว อาจจะทำให้ผลที่ได้ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดอีกต่อไปเลย ด้วยเหตุนี้ จึงได้มีการคิดค้นหาวิธีเฉพาะแบบเพื่อการแก้ปัญหากระบวนการจำนวนเต็มเกิดขึ้น

2. วิวัฒนาการ

วิธีการเฉพาะแบบสำหรับปัญหา กระบวนการจำนวนเต็ม ในปัจจุบันนี้มีอยู่ด้วยกันหลายวิธี ซึ่งวิธีการหนึ่งในหลาย ๆ วิธีที่นับว่าเป็นวิธีการที่ดีนั้น เห็นจะได้แก่วิธีการของ Ralph E. Gomory [1/] ซึ่งวิธีการดังกล่าวนี้สามารถใช้ได้กับ ปัญหากระบวนการจำนวนเต็มกรณีที่ทุก ๆ ตัวแปรคำแปรเฉลยต้องการเป็นจำนวนเต็ม และกรณีที่ตัวแปรคำเฉลยบางตัวเท่านั้นที่ต้องการให้เป็นจำนวนเต็ม ในที่นี้จะได้แสดงให้เห็นวิธีการของ Gomory ในกรณีดังกล่าวในลำดับต่อไป

[1/] Ralph E. Gomory, "Algorithm for Integer Solution to Linear Programming," in *Recent Advances in Mathematical Programming*, ed. by Robert L. Graves and Philip Wolfe (New York : McGraw-Hill Book Company, 1963), pp. 269-302.

3. ลักษณะของปัญหา

ลักษณะปัญหากระบวนการจำนวนเต็มโดยทั่ว ๆ ไปแล้ว จะเขียนในรูปแบบกระบวนการทางคณิตศาสตร์เช่นเดียวกับกระบวนการเชิงเส้น กล่าวคือ กระบวนการจะประกอบด้วยองค์ประกอบที่สำคัญ 3 ส่วนด้วยกัน คือ .-

1. ส่วนเป้าหมาย (objective) ซึ่งเขียนในรูปสมการเชิงเส้น

2. ส่วนเงื่อนไข (constraints) ซึ่งเขียนในรูปสมการหรืออสมการเชิงเส้น

และ 3. ส่วนตัวแปรคำเฉลย (decision variables) ซึ่งมีไว้เพื่อกำหนดขอบข่ายค่าของตัวแปร ว่าต้องการตัวแปรใดบ้างเป็นจำนวนเต็ม

ลักษณะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของกระบวนการจำนวนเต็มนี้ อาจจะแสดงได้ในรูปแบบทั่วไป โดยสมมุติว่า มีตัวแปร n ตัว และมี m เงื่อนไข ดังนี้

1) กรณีตัวแปรคำเฉลยทุกตัวแปรต้องการเป็นจำนวนเต็ม

Maximize (minimize) : objective

$$R = P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n$$

Subject to : constraints

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq C_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq C_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq C_m$$

and : decision variables

$$x_1, x_2, \dots, x_n = 0 \text{ or } 1 \text{ or } 2 \text{ or } \dots \text{ integer}$$

2) กรณีตัวแปรคำเฉลยบางตัวแปรเท่านั้น ที่ต้องการเป็นจำนวนเต็ม

ในที่นี้ สมมุติว่า x_h, x_k และ x_l เท่านั้นที่ต้องการเป็นจำนวนเต็ม

Maximize (Minimize) : objective

$$R = P_1x_1 + P_2x_2 + \dots P_nx_n$$

Subject of : constraints

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leqslant C_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leqslant C_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leqslant C_m$$

and : decision variables

x_h, x_k and x_l with integer values

หมายเหตุ : ส่วนของเงื่อนไข อาจจะอยู่ในรูปสมการและ/หรืออสมการก็ได้ และถ้าอยู่ในรูปอสมการ ค่าอสมการด้านซ้ายอาจจะมากกว่าด้านขวา หรือ ด้านขวาอาจจะมากกว่าด้านซ้ายก็ได้ (ตามรูปแบบทั่วไปข้างต้น แสดงเฉพาะกรณีอสมการด้านขวามากกว่าด้านซ้าย " < ")

4. การหาคำเฉลย

โดยวิธีการหาคำเฉลยของ Ralph E. Gomory นั้น อาศัยหลักแนวคิดที่ว่า กระบวนการจำนวนเต็ม ก็คือ กระบวนการเชิงเส้นที่ต้องการตัวแปรค่าคำเฉลยเป็นจำนวนเต็มนั่นเอง ดังนั้น การหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม จึงอาจดำเนินการในรูปแบบเดียวกันกับการหาคำเฉลยของปัญหากระบวนการเชิงเส้น หากแต่ว่าในการหาคำเฉลยปัญหากระบวนการจำนวนเต็มนี้นั้น กระบวนการจะต้องมีเงื่อนไขกำหนดค่าจำนวนเต็มของตัวแปรคำเฉลยรวมอยู่ด้วย ซึ่งในรูปแบบทางคณิตศาสตร์นั้น สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มนี้ สามารถสร้างขึ้นโดยอาศัยสมการเงื่อนไขอื่น ๆ ที่กำหนดไว้แล้วในกระบวนการนั้น ๆ นั่นเอง

โดยหลักการแล้ว สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ก็คือ สมการซึ่งมีหน้าที่ในการปัดเศษของค่าตัวแปรคำเฉลยที่ยังไม่เป็นจำนวนเต็มให้เป็นค่าที่เป็นจำนวนเต็มตามที่ต้องการ ทั้งนี้ การปัดเศษดังกล่าวจะดำรงเงื่อนไขอื่น ๆ ที่มีอยู่แต่เดิมให้คงไว้ด้วย ดังนั้นค่าตัวแปรคำเฉลยอันเป็นผลลัพธ์ ก็จะเป็นค่าตัวแปรคำเฉลยที่เป็นไปตามเป้าหมายและอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดทุกประการ อนึ่งด้วยเหตุที่หลักการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มนี้ เป็นแนวคิดของ Gomory ดังนั้นสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มดังกล่าว จึงได้รับการขนานนามว่า "Gomory Constraint" ด้วย

อย่างไรก็ตาม ด้วยเหตุที่ปัญหาของกระบวนการจำนวนเต็มสามารถแบ่งออกเป็น 2 กรณีด้วยกัน คือ กรณีที่ทุก ๆ ตัวแปรคำเฉลยต้องการเป็นจำนวนเต็ม และกรณีที่ตัวแปรคำเฉลยบางตัวเท่านั้นที่ต้องการให้เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น ในรายละเอียดของสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มของแต่ละกรณีย่อมแตกต่างกันไป ซึ่งในที่นี้จะได้แสดงวิธีการหาสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มและคำเฉลยของปัญหาแต่ละกรณีเป็นลำดับไป

4.1 กระบวนการจำนวนเต็ม กรณีตัวแปรคำเฉลยทุกตัวแปรต้องการเป็นจำนวนเต็ม

เพื่อให้เกิดความเข้าใจในเรื่องเกี่ยวกับการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ตลอดจน

การหาคำเฉลยของปัญหากระบวนการจำนวนเต็ม กรณีตัวแปรคำเฉลยทุกตัวแปรต้องการเป็นจำนวนเต็ม จึงขอยกตัวอย่างเพื่อแสดงวิธีการดังกล่าว โดยจะแสดงในรูปเรขาคณิต เป็นแนวคิดเบื้องต้น และแสดงโดยตารางคำนวณในลำดับถัดไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4-1 : กระบวนการจำนวนเต็ม กรณีทุกตัวแปรต้องการเป็นจำนวนเต็ม

Maximize

$$R = 12x_1 + 8x_2$$

Subject to

$$x_1 \leq 5$$

$$x_2 \leq 7$$

$$2x_1 + x_2 \leq 12$$

and $x_1, x_2 = 0$ or 1 or 2 ... integer

1) การหาคำเฉลยโดยวิธีการของรูปแบบเรขาคณิต

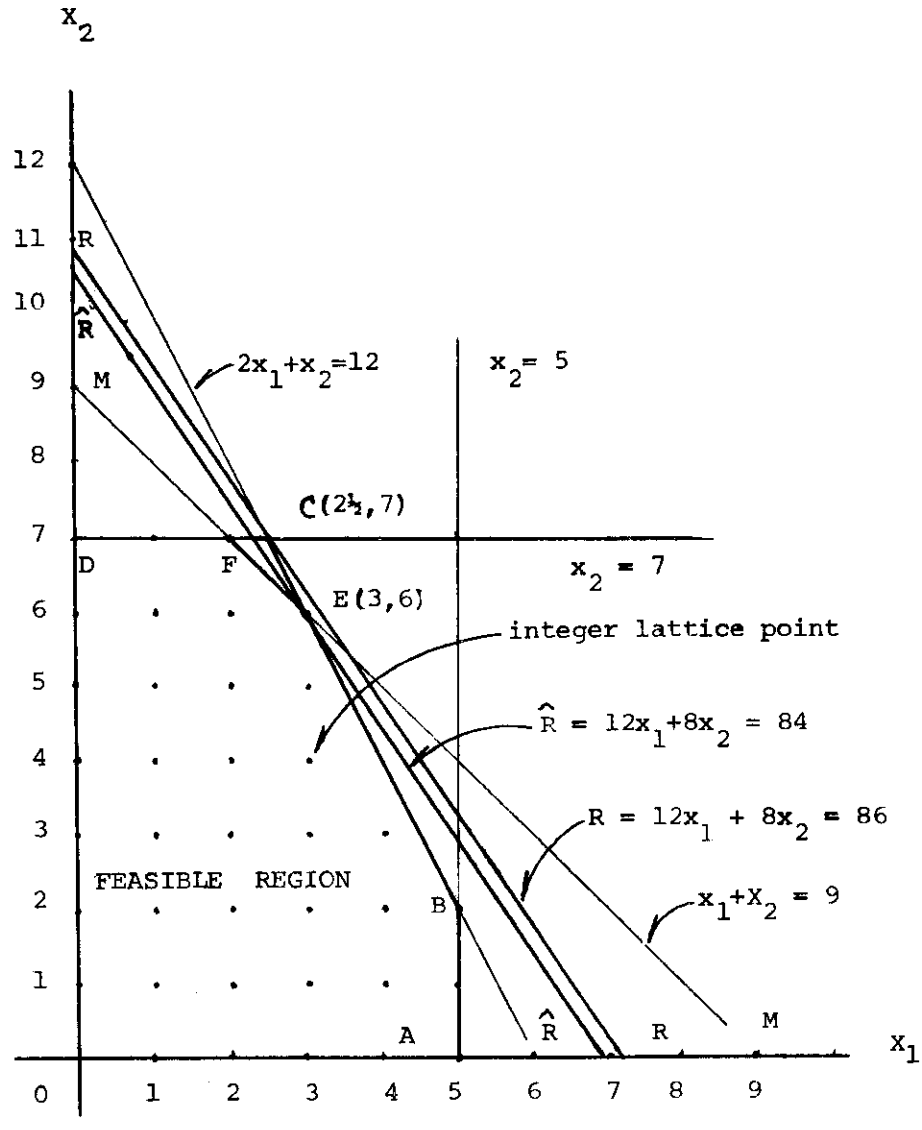
(Graphic Representation)

การหาคำเฉลยโดยวิธีการของรูปแบบเรขาคณิตของปัญหากระบวนการจำนวนเต็มข้างต้นนี้ กระทำได้โดยหลักเดียวกันกับการหาคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นนั่นเอง กล่าวคือ จะต้องนำส่มการและอส่มการเงื่อนไขทุกส่มการเขียนลงในกระดาษตารางระยะ (graph) เพื่อพิจารณาหาบริเวณที่เป็นคำตอบได้ (feasible region) ซึ่งบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้นี้ก็คือพื้นที่ที่อยู่ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดแล้วนั่นเอง จากนี้จึงนำส่มการเป้าหมายมาเขียนลงในรูปเรขาคณิตดังกล่าว เพื่อพิจารณาว่า ตำแหน่งใดในบริเวณที่เป็นคำตอบได้ จะให้ค่าของเป้าหมายเป็นไปตามที่ต้องการ ทั้งนี้ตำแหน่งดังกล่าวจะต้องเป็น "จุดแห่งจำนวนเต็ม" (integer lattice point) ซึ่งให้ค่าคำเฉลยเป็นจำนวนเต็มตามที่กำหนดด้วย

อนึ่ง จากการที่กระบวนการจำนวนเต็มนี้ ต้องการค่าตัวแปรคำเฉลยเป็นจำนวนเต็มทุกตัว ดังนั้นตำแหน่งที่จะเป็นคำเฉลยได้ จึงหมายถึงตำแหน่งบางตำแหน่งที่เป็น "จุดแห่งจำนวนเต็ม" ในบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้เท่านั้น (แตกต่างจากกระบวนการเชิงเส้น ซึ่งทุก ๆ ตำแหน่ง ทุก ๆ จุดในบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ จะเป็นตำแหน่งคำเฉลยได้ทั้งสิ้น) เมื่อเป็นเช่นนี้ ในการหาคำเฉลยโดยวิธีเรขาคณิตของปัญหากระบวนการจำนวนเต็ม จึงนิยมที่จะกำหนดตำแหน่งที่จะเป็นคำตอบได้ให้เห็นเด่นชัด นั่นคือจะเขียนจุดแห่งจำนวนเต็มไว้ในบริเวณที่เป็นคำตอบได้ไว้ด้วยนั่นเอง

จากปัญหาตัวอย่างกระบวนการจำนวนเต็มข้างต้น สามารถเขียนรูปเรขาคณิตแสดงบริเวณที่เป็นคำตอบได้ พร้อมจุดแห่งจำนวนเต็มและตำแหน่งคำเฉลย ดังต่อไปนี้:-

รูปเรขาคณิต 4-1 กรณีตัวแปรคำเฉลยทุกตัวแปรต้องการเป็นจำนวนเต็ม



จากรูปเรขาคณิต 4-1 ข้างต้น จะเห็นได้ว่า เมื่อนำเงื่อนไขทั้งหมดของกระบวนการลงเขียนในกระดาษตารางระยะแล้ว บริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ (feasible region)

ก็จะคือ พื้นที่ห้าเหลี่ยม OABCD นั่นเอง และเมื่อได้นำสมการเป้าหมายลงเขียนในรูปเรขาคณิตเดียวกันนี้ ก็จะได้ตำแหน่งคำเฉลยตามเป้าหมายการหาค่าสูงสุด ณ ตำแหน่ง C($2\frac{1}{2}$,7) โดยที่ตำแหน่ง C นี้ แสดงว่า $x_1 = 2\frac{1}{2}$, $x_2 = 7$ และ $R = 86$ ซึ่งค่าคำเฉลยนี้เป็นคำเฉลยกรณีการหาค่าสูงสุดของกระบวนการเชิงเส้น (linear programming) ธรรมดา ๆ นั่นเอง อย่างไรก็ตาม ในที่นี้ตัวแปรคำเฉลยที่ต้องการจะต้องเป็นจำนวนเต็มทั้งหมด ดังนั้นตำแหน่งที่จะเป็นคำตอบได้ จึงเป็นเพียงบางตำแหน่งซึ่งเป็นจุดแห่งจำนวนเต็ม (integer lattice points) ภายในบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้เท่านั้น ซึ่งจุดแห่งจำนวนเต็มดังกล่าวได้แสดงไว้แล้วในบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ข้างต้นนั้น

ในทางปฏิบัติ เมื่อได้กำหนดจุดแห่งจำนวนเต็มแล้ว ตำแหน่งคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม ก็จะหาได้จาก การเลื่อนเส้นสมการเป้าหมายจากเส้น RR ลงมาทีละน้อยจนกว่าเส้นสมการเป้าหมายจะผ่านมาถึงจุดแห่งจำนวนเต็มจุดแรกภายในบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้นั้น ในที่นี้จุดแห่งจำนวนเต็มจุดแรก หลังจากที่เลื่อนเส้นสมการเป้าหมายลงมา คือ จุด E และเส้นสมการเป้าหมายที่ผ่านจุด E นี้ ก็คือ เส้น $\hat{R}\hat{R}$ ดังนั้น จุด E (3,6) จึงเป็นตำแหน่งคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มตามเป้าหมายของการหาค่าสูงสุด โดยที่

$x_1 = 3$, $x_2 = 6$ และ $\hat{R} = 84$ นั่นเอง

อนึ่ง โดยหลักการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มโดยแท้จริงแล้ว คำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มนั้น อาจหาได้โดยตรงจากกระบวนการจำนวนเต็มเบ็ดเสร็จ ซึ่งกระบวนการจำนวนเต็มเบ็ดเสร็จนี้ หมายถึง กระบวนการที่ประกอบด้วย สมการหรืออสมการเงื่อนไขที่ได้กำหนดไว้แต่เดิม กับ เงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม (Gomory Constraint) ที่ได้จากการคำนวณเพิ่มเติม โดยอาศัยข้อกำหนดของเงื่อนไขที่มีอยู่แต่เดิมนั้นนั่นเอง ในที่นี้การคำนวณเพิ่มเติม เพื่อให้ได้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มมานั้น ไม่สามารถแสดงได้โดยวิธีเรขาคณิต ในขั้นนี้จึงจะยังไม่แสดงให้เห็น แต่จะแสดงวิธีการดังกล่าวนี้ในลำดับต่อไป เมื่อได้ดำเนินการหาคำเฉลยโดยทางคำนวณตามแบบของ Gomory แล้ว

อย่างไรก็ตาม สำหรับปัญหาตัวอย่าง 4-1 นี้ หากได้ทำการคำนวณเพิ่มเติมแล้ว ก็จะได้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มเป็น : $x_1 + x_2 \leqslant 9$ และเมื่อนำสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มนี้ ลงเขียนในรูปเรขาคณิต ก็จะได้เส้นแสดงเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม MM ดังที่แสดงไว้แล้วในรูปเรขาคณิต 4-1 ข้างต้น ดังนั้นเมื่อนำสมการเงื่อนไข MM ลงเขียนในรูปเรขาคณิต 4-1 ด้วยแล้ว บริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ซึ่งจะให้ค่าคำเฉลยเป็นจำนวนเต็ม ก็จะคือพื้นที่หกเหลี่ยม OABEFD นั่นเอง ฉะนั้นตำแหน่งคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม ซึ่งกระทำโดยลักษณะเช่นนี้ ก็จะเป็นตำแหน่ง ณ จุด E บนเส้นสมการเป้าหมาย $\hat{R}\hat{R}$ เช่นเดียวกันกับการหาคำเฉลย โดยวิธีการเลื่อนเส้นสมการเป้าหมายนั่นเอง

สรุปคำเฉลย

กระบวนการเชิงเส้น

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2\tfrac{1}{2} \\ x_2 &= 7 \end{aligned}\right\} \qquad R = 86$$

กระบวนการจำนวนเต็ม

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 6 \end{aligned}\right\} \qquad R = 84$$

2) การหาคำเฉลยโดยวิธีการของตารางคำนวณ (Simplex Method)

ด้วยเหตุที่กระบวนการจำนวนเต็ม คือ กระบวนการเชิงเส้นซึ่งต้องการค่าตัวแปรคำเฉลยเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม จึงอาจจะดำเนินการโดยวิธีการของตารางคำนวณ (Simplex Method) เช่นเดียวกันกับกระบวนการเชิงเส้นได้

เพียงแต่ว่าในการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มนั้น จะต้องมีสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มเพิ่มเติมเข้าไปในกระบวนการของปัญหานั้น ๆ ด้วย ทั้งนี้ก็เพื่อจะจำกัดให้ตัวแปรคำเฉลยได้ค่าที่เป็นจำนวนเต็มตามที่ต้องการ

ในการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม โดยวิธีของตารางคำนวณนี้ การคำนวณจะเริ่มต้นจากการหาคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นธรรมดา ๆ กล่าวคือ กระบวนการเชิงเส้นดังกล่าว เป็นกระบวนการดั้งเดิมที่ยังไม่ได้เพิ่มเติมสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มใด ๆ เข้าไปเลย เมื่อได้คำเฉลยตามเป้าหมายของกระบวนการเชิงเส้นแล้ว ก็นำค่าตัวแปรคำเฉลยที่ได้นี้มาพิจารณา ทั้งนี้ถ้าหากว่าค่าตัวแปรคำเฉลยทุกตัวแปรได้ค่าเป็นจำนวนเต็ม คำเฉลยจากกระบวนการเชิงเส้นนี้ ก็จะเป็นคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มนั่นเอง แต่ถ้าหากว่า ค่าคำเฉลยที่ได้นั้นยังปรากฏค่าเศษส่วน (fractional values) ของตัวแปรบางตัวอยู่ ก็แสดงว่าคำเฉลยจากกระบวนการเชิงเส้น ยังไม่เป็นคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม ดังนั้น ถ้าต้องการให้ได้ค่าคำเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มก็จะต้องมีการคำนวณเพิ่มเติมเพื่อขจัดค่าเศษส่วนเหล่านั้นออกไป การคำนวณเพิ่มเติมนี้ ในขั้นแรกก็เพื่อจะให้ได้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนมาดำเนินการต่อไป ซึ่งการคำนวณเพื่อสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มนี้ สามารถดำเนินการตามหลักแนวคิดของ Ralph E. Gomory ที่ได้กล่าวนำไว้ในเบื้องต้นนั่นเอง และเมื่อได้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ซึ่งเรียกกันว่า "Gomory Constraint" แล้ว ก็นำสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มที่ได้นี้ ลงเขียนต่อท้ายตารางของตารางสุดท้ายที่ได้จากการคำนวณของกระบวนการเชิงเส้น จากนี้ก็ดำเนินการคำนวณต่อไปโดยวิธีการของกระบวนการเชิงเส้นเช่นเดิม แต่ว่าการคำนวณครั้งนี้ กระทำในลักษณะการหาค่าต่ำสุด (minimization) เมื่อดำเนินการคำนวณในตารางแล้ว ก็จะได้คำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มที่ต้องการ กล่าวคือ จะได้ค่าตัวแปรคำเฉลยเป็นจำนวนเต็มทุกตัวแปร อนึ่ง ถ้าหากว่าการคำนวณโดยการเพิ่มเติมสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มเพียงครั้งเดียว ยังไม่สามารถขจัดค่าเศษส่วนของตัวแปรได้หมดทุกตัว ก็ให้สร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มขึ้นซ้ำอีก แล้วดำเนินการเหมือนกับการสร้างครั้งแรก ให้กระทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนกว่าค่าตัวแปรทุก ๆ ตัวจะเป็นค่าจำนวนเต็มตามที่ต้องการ

ในที่นี้ เพื่อให้เข้าใจและสามารถสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ตลอดจนการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มนี้ จึงขอยกตัวอย่างแสดงวิธีการคำนวณโดยตารางจากปัญหาตัวอย่าง 4-1 ที่เคยแสดงโดยวิธีการของเรขาคณิตมาแล้ว ซึ่งปัญหามีกระบวนการดังนี้

แบบกระบวนการจำนวนเต็ม :

Maximize

$$R = 12x_1 + 8x_2$$

Subject to

$$x_1 \leqslant 5$$

$$x_2 \leqslant 7$$

$$2x_1 + x_2 \leqslant 12$$

and $x_1, x_2 = 0$ or 1 or 2 or ... integer

สร้างอสมการเงื่อนไข ให้อยู่ในรูปของสมการ :

โดยการเติมตัวแปรเสริม (slack variables) เข้าไปในอสมการ จะได้สมการเงื่อนไขและกระบวนการเป็น ดังนี้

Maximize

$$R = 12x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

Subject to

$$x_1 + s_1 = 5$$

$$x_2 + s_2 = 7$$

$$2x_1 + x_2 + s_3 = 12$$

and x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 = 0 or 1 or 2 or ... integer

หมายเหตุ : 1) s_1, s_2 และ s_3 คือ ตัวแปรเสริม (slack variables) ที่จะทำให้ค่าสมการด้านซ้ายมือเท่ากับทางด้านขวามือ

2) s_1, s_2 และ s_3 ในสมการเป้าหมาย อาจไม่จำเป็นต้องมีไว้ก็ได้ ทั้งนี้เพราะสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเสริมทั้งสามเป็นศูนย์ "0" หมด นั่นคือค่าของตัวแปรเสริมทั้งสามดังกล่าว ไม่มีอิทธิพลใด ๆ ต่อเป้าหมาย "R" ของกระบวนการแต่อย่างใด

หรือ

Maximize

$$R = 12x_1 + 8x_2$$

Subject to

$$s_1 = 5 - x_1$$

$$s_2 = 7 - x_2$$

$$s_3 = 12 - 2x_1 - x_2$$

and x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 = 0 or 1 or 2 or ... integer

ตารางคำนวณ :

นำค่าคงที่ และสัมประสิทธิของตัวแปรในสมการต่าง ๆ ลงเขียนในตารางคำนวณ (Simplex Tableau) และดำเนินการคำนวณค่าตาราง ตามวิธีการหาคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้น (linear programming) จนกระทั่งได้ค่าคำเฉลย ดังตารางที่จะแสดงเป็นลำดับดังต่อไปนี้ [1/]

[1/] การคำนวณตารางในที่นี้ ใช้วิธีการคำนวณของ William J. Baumol ซึ่งจะหาดูได้ใน :

- William J.Baumol, *Economic Theory and Operation Analysis* (3 rd ed., Englewood Ciffs, New Jersey : Printice-Hall, Inc., 1972), pp 70-102.

- บูญส่ม ศิริโส่ภณา, หน้า 228-264.

ตาราง 4-1

	Constants	x_1	x_2	
R	0	12	8	
s_1	5	- 1	0	$\frac{5}{1} = 5$ //
s_2	7	0	- 1	
s_3	12	- 2	- 1	$\frac{12}{2} = 6$

ตาราง 4-2

	Constants	s_1	x_2	
R	60	- 12	8	
x_1	5	- 1	0	
s_2	7	0	- 1	$\frac{7}{1} = 7$
s_3	2	2	- 1	$\frac{2}{1} = 2$ //

ตาราง 4-3

	Constants	s_1	s_3	
R	76	4	- 8	
x_1	5	- 1	0	$\frac{5}{1} = 5$
s_2	5	- 2	1	$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ //
x_2	2	2	- 1	

ตาราง 4-4 : ตารางคำเฉลยกระบวนการเชิงเส้น

	Constants	s_2	s_3
R	86	- 2	- 6
x_1	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
s_1	$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	7	- 1	0

ตาราง 4-4 ที่ได้ข้างต้นนี้ คือ ตารางแสดงคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นแล้ว ซึ่งค่าคำเฉลยนี้ คือ :

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = 2\tfrac{1}{2}, & s_1 = 2\tfrac{1}{2} \\ x_2 = 7, & s_2 = 0 \\ & s_3 = 0 \end{array}\right\} \quad R = 86$$

อนึ่ง คำเฉลยที่ได้จากการคำนวณโดยตารางนี้ จะเป็นเช่นเดียวกับคำเฉลยที่ได้จากวิธีเรขาคณิต ซึ่งได้คำเฉลย ณ ตำแหน่ง C ตามรูปเรขาคณิต 4-1 นั่นเอง

อย่างไรก็ตาม จากคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นที่ได้นี้ จะเห็นว่าค่าของตัวแปรคำเฉลยบางตัว อันได้แก่ $x_1 = 2\tfrac{1}{2}$ และ $s_1 = 2\tfrac{1}{2}$ ยังไม่เป็นจำนวนเต็มดังที่ต้องการ ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องทำการคำนวณเพิ่มเติม เพื่อสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม (Gomory Constraint) ในอันที่จะขจัดค่าเศษส่วนของตัวแปร x_1 และ s_1 ต่อไป (กระบวนการจำนวนเต็ม ต้องการค่าตัวแปรทุกตัว ทั้งที่เป็นตัวแปรที่แท้ จริง: x_i และตัวแปรเสริม: s_i เป็นจำนวนเต็ม)

ในการคำนวณเพื่อสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มนั้น ขั้นแรกจะต้องพิจารณาก่อนว่า ตัวแปรใดบ้างที่ต้องการให้เป็นจำนวนเต็มแต่ยังได้ค่าไม่เป็นจำนวนเต็ม จากนี้ก็นำตัวแปรเหล่านั้นมาพิจารณาในขั้นที่สอง ซึ่งการพิจารณาในขั้นนี้ เป็นการเลือกตัวแปรที่จะนำไปสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ซึ่งโดยหลักเหตุและผลแล้ว จะต้องเลือกตัวแปรซึ่งมีค่าเศษส่วนสูงที่สุด แต่ถ้าค่าเศษส่วนของตัวแปรเหล่านั้นเท่ากัน ก็ให้เลือกตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งก็ได้จะมีผลเช่นเดียวกัน

จากตัวอย่างที่ได้ดำเนินการมาจนบัดนี้ ได้พบแล้วว่าตัวแปรซึ่งต้องการค่าเป็นจำนวนเต็ม แต่ยังได้ค่าเป็นเศษส่วนอยู่ ก็คือ x_1 และ s_1 แต่เมื่อได้พิจารณาค่าเศษส่วนของตัวแปร

ทั้งสองนี้แล้ว จะพบว่าตัวแปรทั้งสองมีค่าเศษส่วนที่เท่ากัน คือ " ½" (พิจารณาเฉพาะค่าเศษส่วน ค่าจำนวนเต็มไม่พิจารณา) ดังนั้นจะเลือกตัวแปร x_1 หรือ s_1 เพื่อนำมาสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มก็ได้ ในที่นี้ เพื่อให้การเลือกเป็นไปตามลำดับจะขอเลือกตัวแปร x_1

เมื่อเลือกตัวแปร (x_1) ที่จะนำไปสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มได้แล้วก็แยกสมการของตัวแปรดังกล่าวนี้ ออกจากตารางคำนวณสุดท้าย (ตาราง 4-4) ที่ได้จากกระบวนการเชิงเส้น โดยนำมาเขียนไว้ต่างหากจากตารางได้ดังนี้

$$x_1 = 2\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}s_2 - \tfrac{1}{2}s_3$$

หรือ $$x_1 - \tfrac{1}{2}s_2 + \tfrac{1}{2}s_3 = 2\tfrac{1}{2}$$

จากนี้ก็แยกสัมประสิทธิ์และค่าคงที่ของสมการข้างต้นออกเป็นสองส่วน โดยให้ส่วนหนึ่งเป็นจำนวนเต็ม (integer) อีกส่วนหนึ่งเป็นค่าเศษส่วนบวก (nonnegative fraction) ดังนี้

$$(1+0)x_1 + (-1+\tfrac{1}{2})\ s_2 + (0+\tfrac{1}{2})\ s_3 = 2 + \tfrac{1}{2}$$

นำตัวแปรซึ่งมีค่าสัมประสิทธิเป็นจำนวนเต็มบวก (integer coefficients) ย้ายออกไปทางด้านขวามือ

$$\tfrac{1}{2}\ s_2 + \tfrac{1}{2}\ s_3 = \tfrac{1}{2} + (2 - x_1 + s_2)$$

ด้วยเหตุที่ ค่าตัวแปรในกระบวนการจำนวนเต็ม จะต้องเป็นจำนวนเต็มบวก (nonnegative integer) ดังนั้นค่าในวงเล็บก็จะต้องเป็นจำนวนเต็มบวกด้วย และเมื่อจัดให้อยู่ในรูปสมการแล้ว ก็จะได้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ดังนี้ :

$$\tfrac{1}{2} s_2 + \tfrac{1}{2} s_3 = \tfrac{1}{2} + \text{integer}$$

หรือ $$\tfrac{1}{2} s_2 + \tfrac{1}{2} s_3 \geqslant \tfrac{1}{2} \quad : \text{ Gomory Constraint}$$

อนึ่ง อสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มข้างต้นนี้ สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของอสมการเงื่อนไขสามัญกระบวนการเชิงเส้นทั่ว ๆ ไปได้ ซึ่งรูปแบบดังกล่าวได้แสดงไว้แล้วด้วยเส้น MM ในกรณีการหาคำเฉลยโดยวิธีการเรขาคณิตนั่นเอง ในที่นี้จะแสดงวิธีการแปลงอสมการดังกล่าวต่อไปนี้

จากอสมการเงื่อนไขเดิมของกระบวนการ

$$x_2 \leqslant 7$$

แปลงให้อยู่ในรูปสมการ โดยการเติมตัวแปรเสริม (s_2)

$$x_2 + s_2 = 7$$

หรือ $$s_2 = 7 - x_2 \qquad //$$

และจากอสมการ

$$2x_1 + x_2 \leqslant 12$$

แปลงให้อยู่ในรูปสมการ

$$2x_1 + x_2 + s_3 = 12$$

หรือ $$s_3 = 12 - 2x_1 - x_2 \qquad //$$

แทนค่า s_2 และ s_3 ในอสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม

$$\tfrac{1}{2}(7 - x_2) + \tfrac{1}{2}(12 - 2x_1 - x_2) \geq \tfrac{1}{2}$$

$$-x_1 - x_2 + \frac{19}{2} \geq \tfrac{1}{2}$$

หรือ

$$x_1 + x_2 \leq 9 \quad : \text{Gomory Constraint}$$

จากข้างต้นทั้งหมดนี้ ได้แสดงวิธีการหาสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม (Gomory Constraint) ในรูปแบบสำเร็จเพื่อการคำนวณเพิ่มเติม และรูปแบบของสมการเงื่อนไขสามัญของกระบวนการเชิงเส้นไว้แล้ว แต่ว่าเป็นการแสดงโดยตัวอย่างของปัญหา ในขั้นนี้จะสรุปแสดงในรูปมาตรฐานทั่ว ๆ ไปให้เห็นพื้นฐานของหลักการดังต่อไปนี้

สมมุติว่า จากการคำนวณคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม โดยวิธีการของกระบวนการเชิงเส้นธรรมดา ๆ จนได้คำเฉลยแล้ว ปรากฏว่ายังมีตัวแปรคำเฉลยบางตัวได้ค่าเป็นเศษส่วนอยู่ และเมื่อได้เปรียบเทียบค่าคำเฉลยของตัวแปรเหล่านั้นแล้วพบว่า x_i เป็นตัวแปรที่มีค่าคำเฉลยเป็นเศษส่วนสูงที่สุด

นำตัวแปร x_i จากตาราง มาเขียนในรูปสมการดังต่อไปนี้

$$x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

หรือ

$$x_i + \sum_{j=1}^{n} -\hat{a}_{ij} x_j = \hat{b}_i$$

โดยที่ :

x_j คือ ตัวแปรที่ให้ค่าคำเฉลยเป็นศูนย์

$\hat{a}_{ij}$ คือ สัมประสิทธิของ x_j จากตารางคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้น

$\hat{b}_i$ คือ ค่าคงที่ของสมการ

จากนี้แยกสัมประสิทธิและค่าคงที่ของสมการออกเป็นสองส่วน โดยให้ส่วนหนึ่งเป็นจำนวนเต็ม (integer) อีกส่วนหนึ่งเป็นค่าเศษส่วนบวก (nonnegative fraction) ทั้งนี้ ถ้าสมมุติว่า $f(\hat{a}_{ij})$ คือเศษส่วนบวกของสัมประสิทธิ $\hat{a}_{ij}$ และ $f(\hat{b}_i)$ คือเศษส่วนบวกของค่าคงที่ $\hat{b}_i$ แล้ว สมการข้างต้นจะสามารถเขียนได้โดยรูปแบบของการแยกจำนวนเต็มและเศษส่วนบวก ได้ดังต่อไปนี้

$$\sum_{j=1}^{n} f(\hat{a}_{ij})x_j = f(\hat{b}_i) + \text{integer}$$

ดังนั้น อสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ก็จะคือ

$$\sum_{j=1}^{n} f(\hat{a}_{ij})x_j \geqslant f(\hat{b}_i)$$

Gomory-constraint inequality

อนึ่ง อสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มข้างต้นนี้ สามารถที่จะแปลงให้อยู่ในรูปของสมการได้ ทั้งนี้จะกระทำได้โดยการเติมตัวแปรเสริมที่เรียกว่า "Gomory slack variable : $\hat{s}$" ในด้านขวามือของอสมการดังกล่าว ซึ่งสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มที่ได้จะเป็นดังนี้

$$\sum_{j=1}^{n} f(\hat{a}_{ij})x_j = f(\hat{b}_i) + \hat{s}$$

$$\hat{s} = -f(\hat{b}_j) + \sum_{j=1}^{n} f(\hat{a}_{ij})x_j$$

: Gomory-constraint equality

จากรูปแบบและวิธีการสร้างเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม (Gomory Constraint) ดังที่ได้แสดงมาโดยตลอดแล้วนี้ ความจริงแล้ว การสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มดังกล่าว อาจไม่จำเป็นที่จะต้องคำนวณลำดับขั้นตอนโดยตลอดก็ได้ ทั้งนี้ก็เพราะว่า การสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มดังกล่าว มีหลักพอที่จะสังเกตได้ว่า สมการเงื่อนไขนี้จะประกอบด้วย เศษส่วนบวกของค่าคงที่ของสมการกับเศษส่วนบวกของสัมประสิทธิของตัวแปรที่ให้ค่าคำเฉลยเป็นศูนย์ (zero variable : non basic variables) ดังจะสร้างเป็นข้อสังเกตได้ดังต่อไปนี้

จากตาราง 4-4 ในตัวอย่าง ซึ่งเป็นตารางคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นนำ ตัวแปรซึ่งจะไปสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มออกมาเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$x_1 = 2\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} s_2 - \tfrac{1}{2} s_3$$

โดยหลักการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม สังเกตได้ว่าสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม จะประกอบด้วย ค่าคงที่ของสมการซึ่งเป็นเศษส่วนบวกกับสัมประสิทธิของตัวแปรซึ่งเป็นเศษส่วนบวกด้วยเช่นกัน ดังรูปลักษณะทั่วไปต่อไปนี้

$$\hat{s} = - f(\hat{b}_{x1}) + f(\hat{a}_{s2})\, s_2 + f(\hat{a}_{s3})\, s_3$$

ทั้งนี้เศษส่วนบวกของค่าคงที่ในสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มดังกล่าว จะหาได้จากค่าเศษส่วนบวกของค่าคงที่ในสมการเดิมนั่นเอง ดังนี้

$$f(\hat{b}_{x1}) = \tfrac{1}{2} \qquad \text{(ค่าจำนวนเต็มไม่เกี่ยวข้อง)}$$

สำหรับค่าเศษส่วนบวกซึ่งจะเป็นสัมประสิทธิของตัวแปร จะหาได้จากการพิจารณาต่อไปนี้

ก) ถ้าสัมประสิทธิของตัวแปรใดในสมการเดิมเป็นบวก "+" ค่าสัมประสิทธิของตัวแปรนี้ ในสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มที่จะหานี้ จะได้จากการนำค่าเศษส่วนของสัมประสิทธิเดิมลบออกจาก "1" ดังนี้.-

$$f(\hat{a}_{s2}) = 1 - \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

หมายเหตุ : ถ้าสัมประสิทธิของตัวแปรในสมการเดิมมีส่วนที่เป็นจำนวนเต็มรวมอยู่ด้วย ส่วนที่เป็นค่าจำนวนเต็มจะไม่นำมาเกี่ยวข้อง

ข) ถ้าสัมประสิทธิของตัวแปรใดในสมการเดิมเป็นลบ "-" ค่าสัมประสิทธิของตัวแปรนั้น ในสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มที่จะหานี้ จะได้จากค่าเศษส่วนของสัมประสิทธิเดิมนั้น ๆ นั่นเอง (เครื่องหมายลบไม่เกี่ยวข้อง) ดังนี้ :

$$f(\hat{a}_{s3}) = \tfrac{1}{2}$$

หมายเหตุ ถ้าสัมประสิทธิของตัวแปรในสมการเดิมมีส่วนที่เป็นจำนวนเต็มรวมอยู่ด้วย ส่วนที่เป็นค่าจำนวนเต็มก็จะไม่นำมาเกี่ยวข้องด้วยเช่นกัน

ดังนั้น สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม จากหลักการสังเกตนี้ ก็คือ

$$\hat{s} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} s_2 + \tfrac{1}{2} s_3$$

อนึ่ง เพื่อให้เกิดความเข้าใจในการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม โดยหลักการสังเกตนี้มากยิ่งขึ้น จะขอยกตัวอย่างสมการในรูปแบบต่าง ๆ ตลอดจนสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มของแต่ละสมการนั้น ๆ ดังต่อไปนี้

1. ถ้าสมการเดิมคือ

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{7} x_2 - \frac{2}{5} s_1$$

สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มละคือ

$$\hat{s} = -\frac{3}{4} + \frac{4}{7}x_2 + \frac{2}{5}s_1$$

2. ถ้าสมการเดิมคือ

$$x_3 = 2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{7}x_1 - 4\frac{5}{8}s_2$$

สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มละคือ

$$\hat{s} = -\frac{1}{3} + \frac{5}{7}x_1 + \frac{5}{8}s_2$$

3. ถ้าสมการเดิม คือ

$$x_2 = \frac{5}{2} + \frac{7}{6}x_1 - \frac{4}{3}s_2$$

สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มละคือ

$$\hat{s} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{3}s_2$$

4. ถ้าสมการเดิม คือ

$$s_3 = \frac{8}{3} + \frac{5}{4}s_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{7}{4}s_2 + \frac{2}{3}x_1$$

สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มละคือ

$$\hat{s} = -\frac{2}{3} + \frac{3}{4}s_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{3}{4}s_2 + \frac{1}{3}x_1$$

ข้อสังเกต : สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มทุก ๆ สมการจะมีรูปแบบมาตรฐานทั่วไป ดังนี้

1. ค่าคงที่ของสมการและสัมประสิทธิของตัวแปรในสมการจะเป็นค่าเศษส่วนเสมอ
2. ค่าคงที่ของสมการจะเป็นค่าเศษส่วนที่ติดลบ "-"
3. สัมประสิทธิของตัวแปรในสมการ จะเป็นค่าเศษส่วนที่เป็นบวก "+" เสมอ

เมื่อได้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มดังข้างต้นนี้แล้ว ก็ให้นำสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มดังกล่าว ลงเขียนต่อท้ายตารางของตารางสุดท้าย ที่ได้จากการคำนวณของกระบวนการเชิงเส้น จากนี้ก็ดำเนินการคำนวณต่อไปโดยวิธีการของกระบวนการเชิงเส้นเช่นเดิม ทั้งนี้การคำนวณในขั้นตอนนี้จะกระทำในลักษณะการหาค่าต่ำสุด และเมื่อดำเนินการคำนวณโดยลักษณะดังกล่าวแล้ว ก็จะได้คำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มที่ต้องการ อนึ่ง หากสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มเพียงสมการเดียว ยังไม่สามารถขจัดค่าเศษส่วนของคำเฉลยที่ต้องการได้ ก็จำเป็นที่จะต้องสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มโดยลักษณะที่ได้กล่าวมาแล้วในเบื้องต้นซ้ำ ๆ กันอีกต่อไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้คำเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มตามที่ต้องการ

จากตัวอย่าง 4-1 เมื่อได้อสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ตามที่ได้แสดงขั้นตอนมาแล้ว คือ

$$\tfrac{1}{2} s_2 + \tfrac{1}{2} s_3 \geqslant \tfrac{1}{2}$$

แปลงอสมการข้างต้นนี้ ให้อยู่ในรูปของอสมการ โดยการเติมตัวแปรเสริมที่เรียกว่า "Gomory slack variable : $\hat{s}$ " ในด้านขวามือ ดังนี้ :

$$\tfrac{1}{2} s_2 + \tfrac{1}{2} s_3 = \tfrac{1}{2} + \hat{s}$$

หรือ

$$\hat{s} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} s_2 + \tfrac{1}{2} s_3$$

จากนี้ก็นำสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มนี้ ลงเขียนต่อท้ายตาราง 4-4 ดังที่ได้แสดงไว้ในตาราง 4-5 และดำเนินการคำนวณต่อไปในลักษณะการหาค่าต่ำสุด ซึ่งเมื่อดำเนินการดังกล่าวนี้แล้ว ก็จะได้ ตาราง 4-6 ซึ่งจะเป็นตารางคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม ดังต่อไปนี้

ตาราง 4-5

	Constants	s_2	s_3
R	86	- 2	- 6
x_1	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
s_1	$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	7	- 1	0
s	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$ // $\frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$

ตาราง 4-6 : ตารางคำเฉลยกระบวนการจำนวนเต็ม (แบบทุกตัวแปร)

	Cnnstants	$\hat{s}$	s_3
R	84	- 4	- 4
X_1	3	1	- 1
S_1	2	- 1	1
X_2	6	- 2	1
S_2	1	2	- 1

จากตาราง 4-6 ซึ่งเป็นตารางคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม ตารางดังกล่าวจะให้ค่าคำเฉลย ดังนี้ คือ

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 3 & s_1 = 2 \\ x_2 = 6 & s_2 = 1 \\ & s_3 = 0 \\ & s = 0 \end{array}\right\} \quad R = 84$$

4.2 กระบวนการจำนวนเต็ม กรณีตัวแปรบางตัวเท่านั้นที่ต้องการเป็นจำนวนเต็มคละกันไป : กระบวนการจำนวนเต็มผสม (Mixed Integer Programming)

จากกระบวนการจำนวนเต็มที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 4.1 ข้างต้นนั้น กระบวนจำนวนเต็มดังกล่าว ต้องการค่าคำเฉลยของทุกตัวแปร ทั้งที่เป็นตัวแปรคำเฉลย (decision variables) และตัวแปรเสริม (slack variables) ให้เป็นจำนวนเต็มทั้งสิ้น อย่างไรก็ตาม ในปัญหาทั่ว ๆ ไปนั้น ตัวแปรซึ่งอยู่ในกระบวนการของปัญหา อาจจะมีทั้งที่ต้องการจำนวนเต็มและไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็มคละกันไป ซึ่งกระบวนการจำนวนเต็มคละกันนี้เรียกว่า "Mixed Integer Programming" ซึ่งในขั้นนี้จะขอแสดงหลักวิธีการหาคำเฉลยของกระบวนจำนวนเต็มผสมนี้ต่อไป

โดยทั่วไปแล้ว หลักการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสมจะคล้ายคลึงกับการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มธรรมดา ๆ นั่นเอง กล่าวคือเริ่มดำเนินการหาคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นโดยวิธีคำนวณตาราง (simplex method) เมื่อได้คำเฉลยแล้วก็พิจารณาว่า ค่าตัวแปรซึ่งต้องการเป็นจำนวนเต็มต่าง ๆ ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็มตามที่ต้องการ

แล้วหรือยัง ถ้าตัวแปรที่พิจารณาเป็นจำนวนเต็มตามที่ต้องการแล้ว นั่นย่อมแสดงว่าคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นนั้น ก็คือ คำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสมด้วยเช่นกัน แต่ถ้าหากว่าตัวแปรบางตัวซึ่งต้องการค่าคำเฉลยเป็นจำนวนเต็มแต่ยังไม่ได้ค่าเป็นจำนวนเต็มตามที่กำหนด นั่นย่อมแสดงว่า ยังไม่ได้คำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสม จำต้องมีการคำนวณเพิ่มเติมเพื่อขจัดค่าเศษส่วนให้เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งการขจัดค่าเศษส่วนของตัวแปรดังกล่าว ก็กระทำได้โดยการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มทำนองเดียวกันกับกระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปร หากแต่ว่าสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มกรณีนี้ เป็นสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสม ซึ่งจะสามารถขจัดค่าเศษส่วนของตัวแปรที่ต้องการ แต่อาจจะไม่ขจัดค่าเศษส่วนของตัวแปรที่ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็มก็ได้ ทั้งนี้เพราะสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสมดังกล่าว สร้างมาเพื่อขจัดค่าเศษส่วนเฉพาะตัวแปรที่กำหนดเท่านั้น ดังนั้นวิธีการหาสมการดังกล่าวนี้ก็จะแตกต่างไปจากกรณีที่ต้องการทุกตัวแปรเป็นจำนวนเต็ม กล่าวคือ การสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสมนี้จะแยกพิจารณาตัวแปรเป็นสองกลุ่ม คือ กลุ่มตัวแปรที่ต้องการเป็นจำนวนเต็ม และกลุ่มตัวแปรที่ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม โดยตัวแปรในกลุ่มที่ต้องการเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ที่จะได้รับการพิจารณาขจัดค่าเศษส่วนเหล่านั้น ในขั้นนี้เพื่อให้เกิดความเข้าใจหลักการสร้างเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสมดังกล่าว จึงขอแสดงหลักแนวคิดและวิธีการในรูปมาตรฐานทั่ว ๆ ไป ดังนี้

สมมุติว่า จากการคำนวณหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสม โดยวิธีการของกระบวนการเชิงเส้นจนได้คำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้นแล้ว ปรากฏว่า ตัวแปรคำเฉลยบางตัวซึ่งต้องการเป็นจำนวนเต็มยังได้ค่าเป็นเศษส่วนอยู่ และเมื่อเปรียบเทียบค่าคำเฉลยของตัวแปรเหล่านั้นแล้ว (พิจารณาเปรียบเทียบเฉพาะค่าของตัวแปรซึ่งต้องการเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ตัวแปรซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็มไม่เกี่ยวข้อง) พบว่า x_i เป็นตัวแปรที่มีค่าคำเฉลยเป็นเศษส่วนสูงที่สุด นำตัวแปร x_i จากตารางลงเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

หรือ

$$x_i + \sum_{j=1}^{n} - \hat{a}_{ij} x_j = \hat{b}_i$$

โดยที่ :

x_j คือ ตัวแปรที่ให้ค่าคำเฉลยเป็นศูนย์ (zero variables = nonbasic)

$\hat{a}_{ij}$ คือ สัมประสิทธิของ x_j จากตารางคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้น

$\hat{b}_i$ คือ ค่าคงที่ของสมการ

จากนี้ ก็แยกสัมประสิทธิของตัวแปรและค่าคงที่ของสมการออกเป็นสองส่วน โดยให้ส่วนหนึ่งเป็นค่าเศษส่วนบวก (nonnegative fraction) และอีกส่วนหนึ่งเป็นจำนวนเต็ม (integer) ดังนี้

$$\hat{a}_{ij} = f(\hat{a}_{ij}) + \text{integer}$$

$$\hat{b}_i = f(\hat{b}_i) + \text{integer}$$

เมื่อจัดรูปสมการใหม่ โดยให้ส่วนที่เป็นจำนวนเต็มรวมอยู่ด้วยกัน จะได้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสม ดังนี้

$$\sum_{j=1}^{n} f'(\hat{a}_{ij}) x_j = f(\hat{b}_i) + \text{integer} \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

เขียนให้อยู่ในรูปอสมการเงื่อนไข เป็น

$$\sum_{j=1}^{n} f'(\hat{a}_{ij})x_j \geqslant f(\hat{b}_i)$$

และจะเขียนในรูปสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสม โดยตัวแปรเสริม " $\hat{s}$: Gomory slack variable"

$$\hat{s} = -f(\hat{b}_i) + \sum_{j=1}^{n} f'(\hat{a}_{ij})x_i$$

$$(i = 1,2,\ldots,m)$$

โดยที่ :

$f'(a_{ij})$ คือ ค่าเศษส่วนบวก ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของ x_j อันได้จากการคำนวณโดยหลักเกณฑ์ต่อไปนี้ [1/]

---

1. แนวคิด หลักการและวิธีการในการหาหลักเกณฑ์นี้ ท่านผู้อ่านที่สนใจสามารถหารายละเอียดได้ใน :

Ralph E.Gomory, "An Algorithm for the Mixed Integer Problem", *Rand Report*,RM - 25797 (july 7, 1960).

1. กรณี ตัวแปร x_j ต้องการเป็นจำนวนเต็ม

ก) ถ้า $f(\hat{a}_{ij}) \leqslant f(\hat{b}_i)$

แล้ว $f'(\hat{a}_{ij}) = f(\hat{a}_{ij})$

ข) ถ้า $f(\hat{a}_{ij}) \geqslant f(\hat{b}_i)$

$$\text{แล้ว} \quad f'(\hat{a}_{ij}) = \frac{f(\hat{b}_i)}{1 - f(\hat{b}_i)} \{1 - f(\hat{a}_{ij})\}$$

2. กรณี ตัวแปร x_j ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม

ก) ถ้า $\hat{a}_{ij} \geqslant 0$

แล้ว $f'(\hat{a}_{ij}) = \hat{a}_{ij}$

ข) ถ้า $\hat{a}_{ij} \leqslant 0$

$$\text{แล้ว} \quad f'(\hat{a}_{ij}) = \frac{f(\hat{b}_i)}{1 - f(\hat{b}_i)} (- \hat{a}_{ij})$$

เมื่อสามารถหาสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสม ตามหลักเกณฑ์ข้างต้นนี้ได้แล้ว ก็นำสมการเงื่อนไขนี้ ลงเขียนต่อท้ายตารางซึ่งเป็นตารางคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้น จากนี้ก็ดำเนินการคำนวณตารางโดยวิธีคำนวณ (simplex method) ต่อไป ก็จะได้คำเฉลยที่ต้องการ อนึ่ง ถ้าหากว่าสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มเพียงสมการเดียวนี้ ยังไม่สามารถขจัดค่าเศษส่วนของคำเฉลยที่ต้องการได้ ก็ให้สร้างสมการเงื่อนไขตามหลักเกณฑ์ดังกล่าวข้างต้นซ้ำ ๆ กัน อีกต่อไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้คำเฉลยตามที่ต้องการ

ในที่นี้ เพื่อให้เข้าใจปัญหาของกระบวนการจำนวนเต็มแบบผสม ตลอดจนการคำนวณหาสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มและคำเฉลย จึงขอยกตัวอย่างแสดงการพิจารณาปัญหา และการหาคำเฉลยโดยวิธีตาราง ดังต่อไปนี้.-

ตัวอย่าง 4-2 : กระบวนการจำนวนเต็มแบบผสม

Maximize

$$R = 12x_1 + 9x_2$$

Subject to

$$2x_1 + x_2 \leqslant 12$$

$$3x_1 + 5x_2 \leqslant 45$$

$$2x_1 + 5x_2 \leqslant 30$$

and x_2 and s_3 with integer restrictions

x_1, s_1 and s_2 without integer restrictions

หมายเหตุ : s_1, s_2 และ s_3 คือ ตัวแปรเสริมของสมการเงื่อนไขในแต่ละสมการตามลำดับ

สร้างสมการเงื่อนไขให้อยู่ในรูปของสมการ :

Maximize

$$R = 12x_1 + 9x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

Subject to

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 12$$

$$3x_1 + 5x_2 + s_2 = 45$$

$$2x_1 + 5x_2 + s_3 = 30$$

and x_2 and s_3 with integer restrictions

x_1, s_1 and s_2 without integer restrictions

หรือ

Maximize

$$R = 12x_1 + 9x_2$$

Subject to

$$s_1 = 12 - 2x_1 - x_2$$

$$s_2 = 45 - 3x_1 - 5x_2$$

$$s_3 = 30 - 2x_1 - 5x_2$$

and x_2 and s_3 with integer restrictions

x_1, s_1 and s_2 without integer restrictions

ตารางคำนวณ :

นำค่าคงที่ และสัมประสิทธิของตัวแปรในสมการต่าง ๆ ลงเขียนในตารางคำนวณและดำเนินการคำนวณค่าตาราง ตามวิธีการของกระบวนการเชิงเส้น จนกระทั่งได้ค่าคำเฉลย ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4-7 :

	Constants	X_1	X_2	
R	0	12	9	
s_1	12	- 2	- 1	$\frac{12}{2} = 6$ //
s_2	45	- 3	- 5	$\frac{45}{3} = 15$
s_3	30	- 2	- 5	$\frac{30}{2} = 15$

ตาราง 4-8 :

	Constants	s_1	X_2	
R	72	- 6	3	
X_1	6	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$
s_2	27	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{27}{\frac{7}{2}} = 7\frac{5}{7}$
s_3	18	1	- 4	$\frac{18}{44} = 4\frac{1}{2}$ //

ตาราง 4-9 : ตารางคำเฉลยกระบวนการเชิงเส้น

	constants	s_1	s_3
R	$85\frac{1}{2}$	$-\frac{21}{4}$	$-\frac{3}{4}$
x_1	$3\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
s_2	$11\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$
x_2	$4\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

ตาราง 4-9 นี้คือ ตารางคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้น ซึ่งจะมีค่าคำเฉลยดังนี้

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = 3\frac{3}{4}, & s_1 = 0 \\ x_2 = 4\frac{1}{2}, & s_2 = 11\frac{1}{4} \\ & s_3 = 0 \end{array}\right\} \quad R = 85\frac{1}{2}$$

จากคำเฉลยข้างต้นนี้ จะเห็นได้ว่าค่าคำเฉลยของ x_2 ซึ่งต้องการเป็นจำนวนเต็ม แต่ยังได้ค่าเป็นเศษส่วนอยู่ ($x_2 = 4\frac{1}{2}$) ดังนั้น จึงจำเป็นต้องสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มเพื่อขจัดค่าเศษส่วนนี้ออกไป ซึ่งการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มดังกล่าว สามารถหาได้จากการพิจารณาสมการของตัวแปร x_2 ที่ได้ตาราง 4-9 ดังนี้ :

$$x_2 = 4\frac{1}{2} + \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_3$$

หรือ

$$x_2 - \frac{1}{4} s_1 + \frac{1}{4} s_3 = 4\frac{1}{2}$$

จากเงื่อนไขของตัวแปรคำเฉลย ตัวแปร s_1 ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นสัมประสิทธิของตัวแปรนี้ จึงหาได้จากหลักเกณฑ์ในกรณีที่ตัวแปรไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม ดังนี้ :

$$f'(s_1) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \{-(-\tfrac{1}{4})\}$$

$$= \tfrac{1}{4} \qquad (\text{เพราะ: } -\tfrac{1}{4} < 0)$$

สำหรับตัวแปร s_3 ต้องการเป็นจำนวนเต็ม สัมประสิทธิของตัวแปรนี้จึงหาได้จากหลักเกณฑ์กรณีตัวแปรต้องการเป็นจำนวนเต็ม ดังนี้ :

$$f'(s_3) = \tfrac{1}{4} \qquad (\text{เพราะ: } \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{2})$$

ดังนั้น อสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม ในกรณีนี้ จะคือ :

$$\tfrac{1}{4} s_1 + \tfrac{1}{4} s_3 \geqslant \tfrac{1}{2}$$

และจะสามารถเขียนในรูปสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสม โดยตัวแปรเสริม $\hat{s}$ ดังนี้

$$\hat{s} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} s_1 + \tfrac{1}{4} s_3$$

จากนี้ก็นำสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผสมนี้ ลงเขียนต่อท้ายตาราง 4-9 ดังที่ได้แสดงไว้ใน ตาราง 4-10 และดำเนินการคำนวณตารางต่อไปในลักษณะการหาค่าต่ำสุดของกระบวนการเชิงเส้นธรรมดา ซึ่งเมื่อได้ดำเนินการดังกล่าวข้างต้นนี้ ก็จะได้ตารางคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสม ดังตาราง 4-11 ต่อไปนี้

ตาราง 4-10

	Constants	s_1	s_3
R	$85\frac{1}{2}$	$-\frac{21}{4}$	$-\frac{3}{4}$
x_1	$3\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
s_2	$11\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$
x_2	$4\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
s	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
		$\frac{21/4}{1/4}$	$\frac{3/4}{1/4}$

ตาราง 4-11 ตารางคำเฉลยกระบวนการจำนวนเต็มผสม

	constants	s_1	s
R	84	$-\frac{9}{2}$	-3
x_1	4	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
s_2	13	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}$
x_2	4	$\frac{1}{2}$	-1
s_3	2	-1	4

จากตาราง 4-11 ซึ่งเป็นตารางคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสม ตารางดังกล่าวจะให้ค่าคำเฉลย ดังนี้ คือ

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 4 & s_1 = 0 \\ x_2 = 4 & s_2 = 13 \\ & s_3 = 2 \\ & \hat{s} = 0 \end{array}\right\} \quad R = 84$$

คำเฉลยข้างต้นนี้ เป็นคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสมที่ถูกต้องตามเงื่อนไขของตัวแปรแล้ว กล่าวคือ x_2 และ s_3 ได้ค่าเป็นจำนวนเต็มตามที่ต้องการ สำหรับ x_1, s_1 และ s_2 นั้นจะเป็นจำนวนเต็มหรือไม่ก็ได้ แต่จากคำเฉลยข้างต้นได้ค่าตัวแปรดังกล่าวเป็นจำนวนเต็มโดยบังเอิญ

อนึ่ง โดยปกติแล้วถ้าคำเฉลยของกระบวนการเชิงเส้น กระบวนการจำนวนเต็มผสม หรือ กระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปร มิได้คำเฉลยอย่างเดียวกัน ค่าคำเฉลยที่ได้จากกระบวนการในแต่ละประเภท จะมีค่าสูงต่ำเป็นลำดับกันไป กล่าวคือ ถ้าเป้าหมายเป็นการหาค่าสูงสุด กระบวนการเชิงเส้นก็จะให้ค่าสูงกว่ากระบวนการจำนวนเต็มผสม และกระบวนการจำนวนเต็มผสมจะให้ค่าสูงกว่ากระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปร ในกรณีตรงกันข้ามถ้าเป้าหมายเป็นการหาค่าต่ำสุด กระบวนการเชิงเส้นก็จะให้ค่าต่ำกว่ากระบวนการจำนวนเต็มผสม และกระบวนการจำนวนเต็มผสมก็จะให้ค่าต่ำกว่ากระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปร เหตุที่เป็นดังนี้ก็เพราะว่า กระบวนการเชิงเส้นมีเงื่อนไขเกี่ยวกับค่าของตัวแปรน้อยที่สุด กล่าวคือ ค่าตัวแปรจะเป็นจำนวนเต็มหรือไม่ก็ได้ สำหรับ กระบวนการจำนวนเต็มผสม กำหนดเงื่อนไขให้บางตัวแปรที่กำหนด จะต้องให้ค่าเป็นจำนวนเต็ม จึงนับว่ามีเงื่อนไขมากกว่ากระบวนการเชิงเส้น แต่กระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปรนั้น กำหนดเงื่อนไขให้ทุกตัวแปรจะต้องได้ค่าเป็นจำนวนเต็มทั้งหมด จึงนับว่ามีเงื่อนไขมากที่สุด ฉะนั้นกระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปรจึงให้ค่าของเป้าหมายที่ด้อยที่สุด ตามลำดับความเข้มของเงื่อนไขของตัวแปรนั่นเอง

5. สรุป

กระบวนการจำนวนเต็ม คือ กระบวนการเชิงเส้นเฉพาะแบบ เพื่อหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของเป้าหมายที่กำหนด ภายใต้เงื่อนไขบางประการ โดยที่ตัวแปรคำเฉลยของกระบวนการ และตัวแปรเสริม จะต้องมีค่าเป็นจำนวนเต็มตามที่กำหนดด้วย ในการหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มนั้น กระทำได้โดยดำเนินการตามวิธีการคำนวณ-ตารางเช่นเดียวกับกระบวนการเชิงเส้นปกติ หากแต่ว่าจะต้องมีสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มผนวกเพิ่มเติมเข้าไปในกระบวนการนั้น ๆ ด้วย ทั้งนี้ก็เพื่อที่จะให้สมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มนี้ ทำหน้าที่ในการขจัดและปัดเศษค่าของตัวแปรต่าง ๆ ให้เป็นจำนวนเต็มตามที่กำหนดนั่นเอง

โดยเหตุที่กระบวนการจำนวนเต็มอาจแยกเป็นประเภทใหญ่ ๆ โดยทั่วไปได้สองแบบด้วยกัน คือ กระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปร ซึ่งต้องการค่าตัวแปรทุกตัว ทั้งที่เป็นตัวแปรคำเฉลยและตัวแปรเสริมเป็นจำนวนเต็ม และกระบวนการจำนวนเต็มผสม ซึ่งต้องการค่าตัวแปรคำเฉลยหรือตัวแปรเสริมบางตัวเท่านั้นเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นในการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม จึงมีวิธีการที่แตกต่างกันไปในแต่ละกรณี กล่าวคือ ในการสร้างสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปร ตัวแปรทุกตัวรวมทั้งตัวแปรเสริมจะได้รับการพิจารณาเพื่อขจัดค่าเศษส่วนในลักษณะเดียวกันทั้งหมด แต่ถ้าเป็นกรณีกระบวนการจำนวนเต็มผสม การพิจารณาขจัดค่าเศษส่วนของตัวแปรก็จะดำเนินการตามลักษณะของแต่ละตัวแปรที่กำหนด ตัวแปรใดต้องการค่าเป็นจำนวนเต็มก็จะได้รับการพิจารณาขจัดค่าเศษส่วน สำหรับตัวแปรซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็มก็จะได้รับการพิจารณาเพียงเพื่อขจัดค่าส่วนเกินของเศษส่วนอย่างต่ำเท่านั้น จะไม่ได้รับการขจัดค่าเศษส่วนเพื่อให้เป็นจำนวนเต็มแต่อย่างใด

จากการที่กระบวนการแต่ละประเภทมีลักษณะการกำหนดค่าของตัวแปรที่แตกต่างกัน ดังนั้น ลำดับความเข้มของเงื่อนไขในแต่ละรูปแบบกระบวนการก็จะแตกต่างกันไปด้วย เช่นนี้แล้ว หากมิใช่การบังเอิญของแต่ละกระบวนการแล้วละก็ แต่ละประเภทของกระบวนการก็จะให้ค่าคำเฉลยและระดับค่าสูงสุดและต่ำสุดของเป้าหมายที่แตกต่างกันด้วย ในที่นี้ กระบวนการจำนวนเต็มแบบทุกตัวแปรมีความเข้มของเงื่อนไขมากที่สุดก็จะให้ค่าเป้าหมายที่ด้อยที่สุด กระบวนการเชิงเส้นปกติซึ่งไม่กำหนดค่าจำนวนเต็มของตัวแปรใด ๆ ก็จะมีความเข้มของเงื่อนไขน้อยที่สุด ดังนั้นกระบวนการจำนวนเต็มผสม จะมีความเข้มของเงื่อนไขในระดับกลาง จึงให้ค่าเป้าหมายในระดับกลางตามความเข้มของเงื่อนไขนั้น ๆ อย่างไรก็ตาม ค่าเป้าหมายของแต่ละประเภทของกระบวนการที่ได้เป็นคำเฉลยนั้น จะเป็นค่าเป้าหมายที่ดีที่สุดตามเงื่อนไขและลักษณะของกระบวนการนั้น ๆ ทั้งสิ้น

บรรณานุกรม

Balinski, M.L.and R.E. Quandt. "On an Integer Program for a Delivery Problem." *Operations Research*, 12 (March - April, 1964), 300 - 304.

Balinski, M.L. "Integer Programming : Methods, Uses, Computation." *Management Science*, 12 (November, 1965), 253 - 313.

Baumol, William J. *Economic Theory and Operation Analysis*. 2 nd ed. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice - Hall, Inc, 1965.

Beale, E.M. "Survey of Integer Programming." *Operations Research Quarterly*, 16 (June 1965), 219 - 228.

Gomory, R.E. "An Algorithm for Integer Solution to Linear Programs," *Recent Advance in Mathematical Programming*. Edited by Robert L. Graves and Philip Wolfe. New York : McGraw - Hill Book Company, 1963.

Gomory, R.E. "An Algorithm for the Mixed Integer Problem." *Rand Report*, RM - 25797 (July 7, 1960).

Haley, K.Brian. *Mathematical Programming for Business and Industry*. New York : St.Martin's Press, Inc., 1967.

Hillier, Frederick S.,and Lieberman, Gerald J. *Introduction to Operations Research*. San Francisco : Publisher, 1967.

Kwak, N.K. *Mathematical Programming with Business Applications.* New York : McGraw - Hill Book Company, 1973.

Land, A.H. ; and Doig, A.G. "An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problem." *Econometrica*, 28 (July 1960), 497-520.

แบบฝึกหัด

1. ถ้าสมการต่อไปนี้ แสดงถึงค่าของตัวแปรคำเฉลยที่มีเศษส่วนมากที่สุด ซึ่งได้จากการคำนวณตารางของกระบวนการเชิงเส้น

1.1 $$X_1 = 4\frac{1}{3} + \frac{2}{5} S_1 - \frac{7}{8} S_2 + \frac{1}{2} X_3$$

1.2 $$S_2 = 3\frac{3}{4} + \frac{3}{5} S_1 - \frac{2}{3} X_1 + \frac{1}{2} X_3 - \frac{2}{5} S_3$$

1.3 $$X_3 = \frac{7}{5} - \frac{1}{4} X_1 + \frac{1}{3} S_1 - \frac{4}{3} S_2 - \frac{5}{2} X_2$$

1.4 $$S_1 = \frac{3}{2} + \frac{7}{5} S_2 - \frac{1}{3} X_1 - \frac{6}{4} X_2 + \frac{9}{8} S_3$$

จงหาสมการเงื่อนไขแห่งจำนวนเต็ม จากสมการข้างต้น

2. จงหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม จากกระบวนการเชิงเส้นซึ่งได้คำนวณตารางคำเฉลยแล้ว ดังต่อไปนี้

Maximize

$$R = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Subject to

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 36$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 33$$

$$2x_2 + 3x_3 \leqslant 35$$

and $x_1, x_2, x_2 = 0$ or 1 or 2 or ... integer

ตารางคำเฉลยกระบวนการเชิงเส้น

	Constants	S_1	S_2	X_3
F	$85\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
X_1	$9\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
X_2	$6\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
S_3	$21\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$

3. จงหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มต่อไปนี้

Maximize

$$R = 12x_1 + 7x_2$$

Subject to

$$X_1 \leqslant 6$$

$$X_2 \leqslant 7$$

$$2X_1 + X_2 \leqslant 14$$

and $X_1, X_2 = 0$ or 1 or 2 or .... integer

4. จงหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มต่อไปนี้

Minimize

$$Z = 20X_1 + 30X_2$$

Subject to

$$3X_1 + X_2 \geq 6$$

$$3X_1 + 5X_2 \geq 15$$

$$X_1 + X_2 \geq 4$$

and $X_1, X_2 = 0$ or 1 or 2 or ... integer

5. จงหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็ม ต่อไปนี้

Maximize

$$R = 4X_1 + 3X_2$$

Subject to

$$2X_1 + X_2 \leq 4$$

$$3X_1 + 5X_2 \leq 15$$

$$2X_1 + 5X_2 \leq 10$$

and $X_1, X_2 = 0$ or 1 or 2 or ... integer

6. จงหาคำเฉลยของกระบวนการจำนวนเต็มผสม ต่อไปนี้

Maximize

$$R = 4X_1 + 3X_2$$

Subject to

$$2X_1 + X_2 \leqslant 4$$

$$3X_1 + 5X_2 \leqslant 15$$

$$2X_1 + 5X_2 \leqslant 10$$

and X_2 and S_3 with integer restrictions

X_1, S_1 and S_2 without integer restrictions

7. สมมุติว่า นายเศรษฐี เชิงปริมาณ ต้องการจะทำไข่เจียวหมูสับไว้รับประทาน ซึ่งในการประกอบอาหารนี้ เขาต้องการให้ไข่เจียวหมูสับมีคุณค่าทางอาหารตามหลักโภชนาการที่เขาเคยได้ยินมา กล่าวคือ จะต้องมีโปรตีนไม่น้อยกว่า 60 กรัม และมีคาร์โบไฮเดรทอย่างน้อย 400 กรัม ซึ่งในการทำไข่เจียวหมูสับนี้ เขาต้องใช้ไข่ไก่และเนื้อหมูประกอบกัน

ถ้าเขาทราบว่า ไข่ไก่แต่ละฟองมีโปรตีน 20 กรัม และมีคาร์โบไฮเดรท 100 กรัม

สำหรับเนื้อหมู แต่ละขีดมีโปรตีน 40 กรัม และมีคาร์โบไฮเดรท 600 กรัม

อยากทราบว่า ถ้าไข่ไก่ราคาฟองละ 1 บาท 80 สตางค์ และเนื้อหมูราคาขีดละ 6 บาท ดังนี้แล้ว นายเศรษฐี เชิงปริมาณ ควรจะต้องซื้อไข่ไก่และเนื้อหมูอย่างละเท่าไร จึงจะได้คุณค่าทางอาหารตามที่ต้องการ โดยสิ้นเปลืองค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด