ตาราง 7-1: ตารางแสดงระดับค่าของ "b"[1]

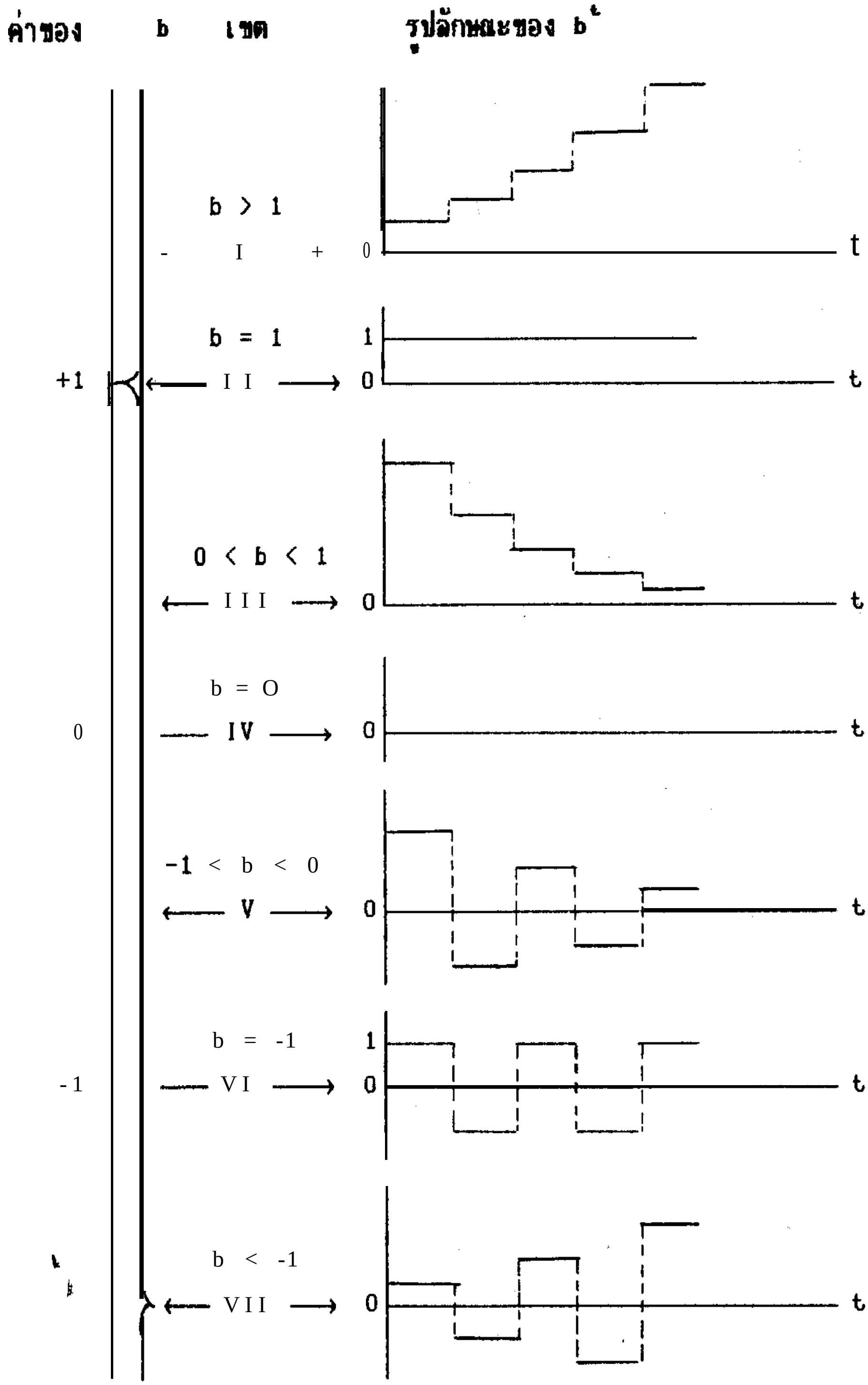
				ค่าของ b^t ตามช่วงเวลา				
เขต	ค่าของ b		ค่าของ b^t	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$ ...
I	$b > 1$	$(\lvert b\rvert > 1)$	เช่น $(2)^t$	1	2	4	8	16
II	$b = 1$	$(\lvert b\rvert = 1)$	$(1)^t$	1	1	1	1	1
III	$0<b<1$	$(\lvert b\rvert < 1)$	เช่น $(1/2)^t$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
IV	$b = 0$	$(\lvert b\rvert = 0)$	$(0)^t$	0	0	0	0	0
V	$-1<b<0$	$(\lvert b\rvert < 1)$	เช่น $(-1/2)^t$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
VI	$b = -1$	$(\lvert b\rvert = 1)$	$(-1)^t$	1	-1	1	-1	1
VII	$b < -1$	$(\lvert b\rvert > 1)$	เช่น $(-2)^t$	1	-2	4	-8	16

จากตารางข้างต้น ได้แบ่งเขตค่าของ b เป็น 7 เขต โดยเรียงลำดับจากมากมาน้อย ซึ่งค่าของ b จะเป็นผลให้ได้ค่าของ b^t ต่างๆ กันตามช่วงเวลาดังที่ได้แสดงไว้ในตารางแล้ว และถ้านำเขตค่าของ b และ b^t ดังกล่าวมาเขียนในรูปกราฟต่อไป ก็จะสามารถเปรียบเทียบเห็นได้เด่นชัดยิ่งขึ้น ดังนี้:

---

[1] Alpha C. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics* 3d ed. (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1984) p.558

รูป 7-1: ภาพกราฟแสดงเขตค่าของ b และ b^t



เมื่อเปรียบเทียบ รูป 7-1 กับ ตาราง 7-1 จะพบว่า รูป 7-1 ได้แสดงเขตค่าของ b ไว้ในแกนตั้ง โดยแกนตั้งมีเส้นแบ่งเขตเป็น 3 ระดับ คือ +1, 0 และ -1 ซึ่งเส้นแบ่งเขตแต่ละระดับแสดงค่าของเขต II,IV และ VI ตามลำดับ ทั้งนี้ เขต III แสดงกลุ่มของค่าที่เป็นเศษส่วนบวก (set of positive fraction) ส่วนเขต V แสดงกลุ่มของค่าที่เป็นเศษส่วนลบ (set of negative fraction) สำหรับเขต I และ เขต VII เป็นเขตที่ค่าของ b มีค่าสัมบูรณ์ (absolute value) มากกว่าหนึ่ง

ในแต่ละเขตค่า (region) ของ b^t จะทำให้ลักษณะของกาลวิถีแตกต่างกันออกไป ซึ่งจะเห็นได้จากตัวอย่างที่แสดงไว้ในตาราง 7-1 และรูป 7-1 ข้างต้น ซึ่งลักษณะของแต่ละเขตอาจจะพิจารณาได้ ดังต่อไปนี้

เขต I :

ในเขต I ซึ่งเป็นเขตที่ $b > 1$ ดังนั้น b^t จะต้องเพิ่มขึ้นตามค่าของ t ที่เพิ่มขึ้นนั้น ๆ ดังเช่นตัวอย่างในตาราง 7-1 ถ้า $b = 2$ เมื่อ t เพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ จาก 0,1,2,3,... และเรื่อย ๆ ไป ค่าของ b^t ก็จะเพิ่มขึ้นจาก 1,2,4,8,... และเรื่อย ๆ ไปเช่นเดียวกัน ซึ่งลักษณะกาลวิถีของ b^t ได้แสดงไว้แล้วในรูป 7-1 (ภาพกราฟบนสุด) นั่นเอง

เขต II:

เขต II ซึ่งเป็นเขตที่ $b = 1$ ดังนั้น b^t จะเป็นค่าคงที่เท่ากับหนึ่งตลอดทุกค่าของ t ดังที่จะเห็นได้จากตาราง 7-1 เมื่อ $b = 1$ แล้ว b^t ก็จะเท่ากับ 1 ตลอดไป ดังนั้นกาลวิถีก็จะเป็นเส้นตรงขนานกับแกนนอนเช่นเดียวกับที่แสดงไว้ในรูป 7-1 นั้น

เขต III:

เขต III ซึ่งเป็นเขตที่ $0 < b < 1$ หรือเป็นเขตที่ b มีค่าเป็นเศษส่วนบวก ดังนั้น

เมื่อ t เพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ ค่าของ b^t กลับจะลดลงเรื่อย ๆ เป็นลำดับ ดังเช่นตัวอย่างในตาราง 7-1 นั่นคือ ถ้า $b = 1/2$ เมื่อ t เพิ่มมากขึ้น จาก 1,2,3,... ค่าของ b^t กลับลดลง จาก 1,1/2,1/4,... เป็นลำดับลงไป แต่ยังคงได้ค่าเป็นบวกเสมอ ซึ่งจะเห็นลักษณะกาลวิถีได้จากรูป 7-1 นั่นเอง

เขต IV:

เขต IV ซึ่งเป็นเขตที่ $b = 0$ ดังนั้น b^t จะเป็นค่าคงที่เท่ากับศูนย์ตลอดทุกค่าของ t (ทำนองเดียวกันกับเขต II ซึ่ง b^t จะมีค่าคงที่ แต่มีค่าคงที่เป็นหนึ่ง) เช่นนี้แล้ว ลักษณะกาลวิถีจะเป็นเส้นตรงทับกับแกนนอนสนิทพอดี ดังเช่นรูป 7-1 นั้น อย่างไรก็ตาม เขต IV นี้เป็นเขตที่นอกเหนือความสนใจ ทั้งนี้เพราะว่า เป็นเขตที่ $b = 0$ อันเป็นผลให้ $b^t = 0$ และที่สุด $Ab^t = 0$ ซึ่งขัดกับสมมุติฐานที่กำหนดไว้ ที่ว่า: $Ab^t \neq 0$ และในที่สุดก็หมายถึง $b \neq 0$

จากการที่พิจารณาลักษณะค่าของ b^t ในเขตค่าต่าง ๆ ของ b ในส่วนที่เป็นบวกมาแล้ว จะเห็นได้ว่า เมื่อ b มีค่าเป็นบวก ค่าของ b^t ก็จะเป็นบวกโดยตลอดด้วยเช่นกัน ในลำดับนี้จะได้พิจารณาลักษณะค่าของ b^t ในเขตที่ b มีค่าเป็นลบบ้าง ซึ่งค่าของ b ในเขตลบนี้ ได้แก่เขตต่าง ๆ ที่ยังคงเหลืออยู่อีกสามเขตค่านั่นเอง อย่างไรก็ตาม เป็นที่น่าสังเกตว่า เมื่อ b มีค่าเป็นลบ ค่าของ b^t จะไม่เป็นบวกหรือเป็นลบเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น แต่ค่าดังกล่าวจะเปลี่ยนสลับกลับไปมาระหว่างบวกและลบจากช่วงเวลาหนึ่งไปสู่อีกช่วงเวลาหนึ่ง ดังที่จะเห็นได้จากการพิจารณาเขตค่าตาง ๆ ที่เหลืออยู่ ดังต่อไปนี้:

เขต V:

เขต V ซึ่งเป็นเขตที่: $-1 < b < 0$ หรือเป็นเขตที่ b มีค่าเป็นเศษส่วนลบนั้น เมื่อ t เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ค่าของ b^t กลับจะเป็นบวกน้อยลงและลบน้อยลงสลับกลับกันไปมาเป็นช่วง ๆ ตามการเปลี่ยนไปของค่า t ดังเช่นตัวอย่างในตาราง 7-1: ถ้า $b = -1/2$ เมื่อ t เพิ่มขึ้น

จาก 0,1,2,3,... ค่าของ b^t จะสลับไปมา จาก +1,-1/2,+1/4,-1/8,... และบวกน้อยลงลบน้อยลงเป็นลำดับต่อ ๆ กันไป ซึ่งเมื่อพิจารณาจากรูป 7-1 จะเห็นได้ว่า กาลวิถี b^t จะสลับสับเปลี่ยนไปมาโดยมีแนวโน้มเข้าใกล้เส้นแกนนอนมากขึ้นทุกขณะที่ t เพิ่มมากขึ้น

เขต VI:

เขต VI เป็นเขตที่ b = -1 ดังนั้น b^t จะมีค่าสลับเปลี่ยนไปมาระหว่าง +1 และ -1 ซึ่งจะเห็นได้จาก รูป 7-1 ว่า กาลวิถีของ b^t จะแกว่งสลับสับเปลี่ยนไปมาห่างจากแกนนอนเท่ากันตลอดทุกช่วงค่าของ t

เขต VII:

ในเขต VII อันเป็นเขตสุดท้ายที่แบ่งไว้นั้น เป็นเขตที่ b < -1 ดังนั้นเมื่อ t เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ค่าของ b^t จะเป็นบวกมากขึ้นและลบมากขึ้นสลับกันไปมาเป็นช่วง ๆ ตามการเปลี่ยนไปของค่า t ดังเช่นตัวอย่างในตาราง 7-1: เมื่อ b = -2 ถ้า t เพิ่มจาก 0,1,2,3,... แล้วค่าของ b^t ก็จะสลับไปมาจาก 1,-2,4,-8,... และจะบวกมากขึ้นลบมากขึ้นเป็นลำดับ ซึ่งเมื่อพิจารณาจาก รูป 7-1 จะเห็นได้ว่า กาลวิถี b^t จะสลับสับเปลี่ยนไปมาโดยมีแนวโน้มที่จะออกห่างจากเส้นแกนนอนมากขึ้นทุกขณะ ซึ่งเป็นลักษณะตรงกันข้ามกับ เขต V

จากการที่ได้เห็นแล้วว่า ค่าของ b^t ใน เขต V, VI และ VII จะมีลักษณะแกว่งกวัดสลับกลับไปกลับมา ดังนั้น สิ่งที่น่าสนใจในลำดับต่อไปในที่นี้ ก็คือ การแกว่งกวัด หรือ การสลับกลับไปกลับมา (fluctuating) ของกาลวิถีข้างต้นนั้น ซึ่งการแกว่งกวัดของกาลวิถีในที่นี้นั้นเห็นได้ชัดว่า มาจากพจน์ของ b^t แต่เพียงโสตเดียว และด้วยเหตุที่การแกว่งของกาลวิถีนี้มีรูปลักษณะขาดช่วงไม่ราบเรียบ ดังที่จะเห็นได้จากรูป 7-1 ข้างต้นนั้น ดังนั้นในที่นี้ จะขอใช้คำว่า "แกว่งกวัด" (oscillate) แสดงลักษณะการแกว่งที่ไม่ราบเรียบของค่าที่เปลี่ยนกลับไปกลับมาระหว่างบวกและลบสลับกันนั้น

อย่างไรก็ตาม เมื่อได้วิเคราะห์ลักษณะกาลวิถีของ b^t มาโดยลำดับ ทั้งในรูป ตาราง 7-1 และ รูป 7-1 โดยตลอดแล้ว จะเห็นได้ว่า กาลวิถีของ b^t จะอยู่ในลักษณะแกว่งหรือไม่ ก็ขึ้นอยู่กับค่าของ b เป็นสำคัญ ซึ่งอาจจะสรุปให้เห็นได้เด่นชัด ดังต่อไปนี้:

1) ถ้า $b > 0$:

กาลวิถีจะไม่แกว่งกวัด (nonoscillatory): (เขต I, II, III)

2) ถ้า $b < 0$:

กาลวิถีจะแกว่งกวัด (oscillatory): (เขต V, VI, VII)

อนึ่ง เป็นที่น่าสังเกตว่า ค่าของ b ในรูปของค่าสัมบูรณ์ (absolute value): $|b|$ ยังสามารถกำหนดลักษณะการโน้มตัวเข้าสู่ค่าจำเพาะ (convergence) ของกาลวิถีได้อีกโสตหนึ่งด้วย กล่าวคือ:

1) ถ้า $|b| > 1$:

กาลวิถีจะไม่โน้มเข้าสู่ค่าจำเพาะ (divergent): (เขต I,VII)

2) ถ้า $|b| < 1$:

กาลวิถีจะโน้มเข้าสู่ค่าจำเพาะ (convergent)! (เขต III,V)

4.2 บทบาทของ "A"

เมื่อได้ศึกษาและวิเคราะห์ถึงสาระสำคัญและบทบาทของ b ที่มีต่อลักษณะกาลวิถีมาโดยตลอดแล้ว ลำดับนี้ควรที่จะต้องพิจารณาถึงบทบาทค่าของ A บ้าง สำหรับบทบาทของ A นี้ คงจะกล่าวได้ว่ามีสองลักษณะ กล่าวคือ ลักษณะหนึ่งเป็นลักษณะของอิทธิพลของค่า A ที่อาจจะทำ

ให้กาลวิถีขยายขนาดใหญ่ขึ้น (blow up) หรือไม่ก็ย่อขนาดลง (pare down) โดยกาลวิถีจะถูกขยายขึ้น ถ้า $A > 1$ เช่น $A = 5$ และจะถูกย่อขนาดลง ถ้า $0 < A < 1$ เช่น $A = 1/3$ นั่นคือ ค่าของ A จะทำให้เกิดผลต่อขนาด (scale effect) ของกาลวิถีเท่านั้น โดยไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเดิมของกาลวิถี b^t ที่ได้มาแต่อย่างใด

อิทธิพลของ A อีกลักษณะหนึ่ง เป็นอิทธิพลค่าของ A ที่จะมีผลต่อรูปร่าง (affect the shape) ของกาลวิถีในลักษณะของการกลับตรงกันข้าม หรือ ผลการสะท้อนภาพของกระจกเงา (mirror effect) โดยกาลวิถีจะอยู่ในลักษณะภาพสะท้อนกลับ หรือกลับทิศทางกับกาลวิถีเดิม ถ้า $A < 0$ เช่น $A = -1$ เพราะว่า b^t จะถูกคูณด้วย -1 ดังนั้นกาลวิถีจะกลับไปอยู่ด้านตรงข้ามของแกนนอนของภาพเดิมในลักษณะของภาพสะท้อนกลับ และในขณะเดียวกันการสะท้อนกลับนี้ ก็อาจขยายหรือย่อขนาดตามค่าตัวเลขนั้นด้วย เช่นถ้า $A = -3$ กาลวิถีจะอยู่ในลักษณะภาพสะท้อนกลับจากของเดิมและขยายขึ้นสามเท่าด้วย

โดยสรุปแล้ว A อาจจะมีบทบาทต่อขนาดและรูปร่างของกาลวิถี ดังนี้:

1) ผลต่อขนาด (scale effect)

(ก) ถ้า $A > 1$: ขยายขนาด (blow up)

(ข) ถ้า $0 < A < 1$: ย่อขนาด (pare down)

2) ผลต่อรูปร่างลักษณะภาพสะท้อนกระจกเงา (mirror effect)

(ก) ถ้า $A > 0$: ภาพปกติ

(ข) ถ้า $A < 0$: ภาพสะท้อนกลับ (mirror effect)

หมายเหตุ:

A อาจจะมีบทบาทต่อขนาดและต่อรูปร่างของกาลวิถีในขณะเดียวกันและพร้อมกันได้

4.3 การโน้มเข้าสู่ดุลยภาพ

การพิจารณาที่ผ่านมาโดยลำดับข้างต้น เป็นการวิเคราะห์เกี่ยวกับพจน์ Ab^t ซึ่งเป็นฟังก์ชันเติมเต็ม อันเป็นส่วนเบี่ยงเบนจากดุลยภาพระยะยาวของกาลวิถี ในลำดับนี้ ถ้ารวมอินทิกรัลเฉพาะ y_p เข้ากับฟังก์ชันเติมเต็มที่ได้พิจารณามานั้นแล้ว ผลที่ได้จะเป็นการทำให้กาลวิถีขยับเลื่อนไป (shift) จากเดิมตามแนวแกนตั้ง เท่ากับค่าของ y_p ที่ปรากฏอยู่นั้นนั่นเอง เช่นถ้า $y_p = 5$ เมื่อรวม y_p เข้ากับ y_c แล้ว กาลวิถีก็จะเลื่อนสูงขึ้นไปอีก 5 หน่วย เท่ากับค่าของ y_p นั่นเอง อนึ่ง การขยับเลื่อนตัวของกาลวิถีดังกล่าว จะไม่มีผลต่อการโน้มตัวเข้าสู่ดุลยภาพ (convergence) หรือการเบนออกจากดุลยภาพ (divergence) ของกาลวิถีนั้นแต่อย่างใด เพราะนั่นเป็นแต่เพียงการเปลี่ยนระดับการเข้าสู่หรือเบนออกจากดุลยภาพของกาลวิถีนั้นเท่านั้น

อย่างไรก็ตาม เมื่อมีการรวม y_p เข้ากับ y_c แล้ว กาลวิถีที่จะต้องพิจารณา จะเปลี่ยนไปจากการวิเคราะห์แนวโน้มการเข้าหาศูนย์ของ Ab^t ที่เคยแสดงไว้ในรูป 7-1 ที่ผ่านมาแล้ว แต่จะเป็นการวิเคราะห์แนวโน้มการเข้าสู่ดุลยภาพ y_p ของกาลวิถี y_t ที่ว่า $y_t = y_c + y_p$

ในการวิเคราะห์ปัญหานี้ จะขอแสดงต้นแบบในลักษณะเฉพาะกรณี เมื่อ $b = 1$ ซึ่งเป็นเขตค่าของ b ในเขต II และแล้วกาลวิถีดังกล่าวก็จะคือ:

จาก
$$\begin{aligned} y_t &= y_c + y_p \\ &= Ab^t t\ y_p \end{aligned}$$

เมื่อ b = 1 :
$$\begin{aligned} y_t &= A(1)^t + y_p \\ &= A + y_p \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า กาลวิถีข้างต้นจะมีค่าเข้าหาค่าจำเพาะ เพราะว่า $b^t = (1)^t = 1$ ซึ่งได้ค่าเป็นค่าคงที่ อย่างไรก็ตาม ด้วยเหตุที่ $y_t = A + y_p$ ดังนั้น กาลวิถีดังกล่าวจะไม่มีวันเข้าถึงดุลยภาพ y_p ได้เลย เว้นเสียแต่ว่า $A = 0$ และจากการที่เคยทราบว่าอินทิกรัลเฉพาะ

ของสมการผลต่างสืบเนื่องทั่วไปที่ว่า: $y_{t+1} + ay_t = c$ กรณี $a = -1$ จะมีดุลยภาพสภาพเคลื่อนไหว (moving equilibrium) อันเป็นผลมาจาก $y_p = ct$ ซึ่งเมื่อพิจารณาแล้วจะพบว่า กาลวิถีลักษณะดังกล่าวนี้ จะเป็นลักษณะของการเบี่ยงเบนออกจากดุลยภาพ (divergent) ทั้งนี้เพราะว่า A เป็นค่าคงที่ที่ไม่ใช่ศูนย์ ดังนั้น จะมีการเบี่ยงเบนอย่างคงที่ออกจากดุลยภาพตลอดเวลา เช่นนี้แล้วจึงอาจกล่าวได้ว่า กาลวิถีข้างต้น จะโน้มตัวเข้าสู่ดุลยภาพได้ ก็ต้องไม่ใช่กรณีที่ $b = 1$ แต่จะต้องเป็นกรณีที่ ค่าของ b จะทำให้ Ab^t โน้มเข้าหาศูนย์ในที่สุด ดังนั้น จึงอาจจะสรุปได้ว่า กาลวิถี y_t ที่ว่า:

$$y_t = Ab^t + y_p$$

จะโน้มตัวเข้าสู่ดุลยภาพ y_p ก็ต่อเมื่อ $|b| < 1$ เพื่อว่า เมื่อ t เพิ่มมากขึ้น b^t และที่สุด Ab^t ก็จะลดน้อยลงเป็นลำดับจนในที่สุด เมื่อ $t \to \infty$ แล้ว $Ab^t \to 0$ อันเป็นผลให้ $y_t \to y_p$ นั่นเอง

ในลำดับนี้ เพื่อให้สามารถเข้าใจได้ดียิ่งขึ้น จึงขอยกตัวอย่างประกอบ ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 7-5: ตัวอย่างการหาลักษณะแนวโน้มของกาลวิถี

จงหาลักษณะแนวโน้มของกาลวิถี:

$$y_t = 3(-\frac{1}{2})^t + 10$$

วิธีทำ:

จากรูปมาตรฐาน:

$$\begin{aligned} y_t &= y_c + y_p \\ &= Ab^t + y_p \end{aligned}$$

ในที่นี้

$$y_t = 3(-\frac{1}{2})^t + 10$$

นั่นคือ: $A = 3$

$b = -\frac{1}{2}$

$y_p = 10$

ซึ่งจากการที่ $b = -1/2 < 0$ ดังนั้น กาลวิถีจะแกว่งกวัด (oscillatory) สลับกลับไปกลับมาระหว่างค่าบวกกับค่าลบ แต่ด้วยเหตุที่ $|b| = 1/2 < 1$ ดังนั้น การแกว่งกวัดดังกล่าวก็จะแคบลง ๆ เป็นลำดับ จนโน้มเข้าสู่ดุลยภาพ y_p หรือดุลยภาพที่มีค่าเท่ากับ 10

ตอบ //

ข้อพึงระวัง: $\left(-\frac{1}{2}\right)^t \neq -\left(\frac{1}{2}\right)^t$

ตัวอย่าง 7-6: ตัวอย่างการหาลักษณะแนวโน้มของกาลวิถี

จงหาลักษณะแนวโน้มของกาลวิถี:

$$y_t = 2(3)^t \text{ t } 5$$

วิธีทำ:

จากรูปมาตรฐาน: $y_t = y_c + y_p$

$= Ab^t + y_p$

ในที่นี้ $y_, = 2(3)^t \text{ t } 5$

นั่นคือ: $A = 2$

$b = 3$

$y_p = 5$

ซึ่งจากการที่ $b = 3 > 0$ ดังนั้น กาลวิถีจะไม่แกว่งกวัด (nonoscillatory) แต่ด้วยเหตุที่ $|b| = 3 > 1$ ดังนั้น กาลวิถีจะเบนห่างออกจากระดับดุลยภาพของ 5 ทุกขณะ

ตอบ //

5. การประยุกต์ในทางเศรษฐศาสตร์บางประการ

5.1 แบบจำลองใยแมงมุม

ในลำดับนี้ เมื่อได้เข้าใจเรื่องราวเกี่ยวกับสมการผลต่างสืบเนื่องอันดับที่หนึ่งแล้ว จะขอประยุกต์ความรู้ดังกล่าวกับเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์วิเคราะห์เป็นลำดับต่อไป ซึ่งเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์ที่จะนำมาประยุกต์ในที่นี้ จะเป็นเรื่องเกี่ยวกับการวิเคราะห์แบบจำลองภาวะตลาดสินค้าชนิดเดียว ในลักษณะที่การสนองขาย (supply) ขึ้นอยู่กับราคาสินค้าของช่วงเวลาก่อนหน้าเวลาพิจารณา ซึ่งถ้าเปรียบเทียบกับการวิเคราะห์แบบจำลองภาวะตลาดที่ได้วิเคราะห์ผ่านมาแล้วในเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์ จะเห็นได้ว่าแตกต่างกัน ทั้งนี้เพราะในเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์นั้น วิเคราะห์ในลักษณะที่การสนองขายขึ้นอยู่กับราคาสินค้าของเวลาเดียวกัน

แบบจำลองการวิเคราะห์ตลาดสินค้ากรณีการสนองขาย ขึ้นอยู่กับราคาสินค้าในช่วงเวลาก่อนหน้าเวลาที่จะพิจารณานี้ รู้จักกันโดยทั่วไปว่า "แบบจำลองใยแมงมุม" (cobweb model) ซึ่งจะมีแนวคิดหลักการและการวิเคราะห์เป็นลำดับ ดังต่อไปนี้

1 J รูปลักษณะแบบจำลอง (the model)

สภาพการณ์ทางเศรษฐศาสตร์ กรณีที่การสนองขายขึ้นอยู่กับราคาสินค้าของช่วงเวลาก่อนหน้าคาบเวลาที่กำลังพิจารณาอยู่นั้น มักจะเกี่ยวกับเรื่องราวของผู้ผลิตที่จะต้องวางแผนตัดสินใจเกี่ยวกับจำนวนหรือปริมาณผลผลิตก่อนที่จะมีการสนองขายจริงหนึ่งช่วงคาบเวลา เช่น การผลิตทางการเกษตร ซึ่งจะต้องวางแผนการผลิตหรือการเพาะปลูกล่วงหน้าให้เหมาะสมกับช่วงเวลาการเก็บเกี่ยวและการขาย เพราะการเพาะปลูกต้องอาศัยเวลาดำเนินการ

ในที่นี้ ถ้าสมมุติให้การตัดสินใจเกี่ยวกับปริมาณการผลิตในคาบเวลา t ใด ๆ ขึ้นอยู่กับราคา p_t แต่ด้วยเหตุที่ผลิตผลดังกล่าวจะยังไม่สามารถนำออกจำหน่ายได้ จนกว่าจะถึงคาบเวลา $t+1$ แล้ว เช่นนี้แล้ว p_t นี้ ก็จะมีอิทธิพลต่อการสนองขายทั้งในคาบเวลา t และ $t+1$

ซึ่งเป็นลักษณะของฟังก์ชันการสนองขายแบบคาบช่วงเวลา ("lagged" supply function) ดังเช่น:

$$Q_{s,t+1} = S(p_t)$$

หรือ

$$Q_{st} = S(p_{t-1})$$

ซึ่งถ้าฟังก์ชันการเสนอซื้อ (demand function) คือ:

$$Q_{dt} = D(p_t)$$

และถ้าราคาตลาดที่เกิดขึ้นจะทำให้ตลาดได้ดุลยภาพแล้วละก็ แบบจำลองภาวะตลาด (market model) ก็จะประกอบด้วยสมการสามสมการต่อไปนี้ คือ:

$$\begin{aligned} Q_{dt} &= Q_{st} \\ Q_{dt} &= \alpha - \beta P_t \qquad ; \alpha, \beta > 0 \\ Q_{st} &= -\gamma + \delta P_{t-1} \qquad ; \gamma, \delta > 0 \end{aligned}$$

2) กาลวิถี (the time path1

เมื่อแทนค่าสองสมการหลังลงในสมการแรก ซึ่งเป็นสมการนิยามแสดงดุลยภาพของตลาด ก็จะได้สมการผลต่างสืบเนื่อง เป็น:

$$\alpha - \beta P_t = -\gamma + \delta P_{t-1}$$

หรือ

$$\beta P_t + \delta P_{t-1} = \alpha + \gamma$$

และเมื่อแปลงให้อยู่ในรูปทั่วไปของสมการผลต่างสืบเนื่องพร้อมกับเลื่อนเวลา t ขึ้นอีกหนึ่งคาบ เช่น จาก t เป็น t+1 แล้ว จะได้:

$$P_{t+1} + \frac{\delta}{\beta} P_t = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

ซึ่งเมื่อเทียบกับสมการผลต่างสืบเนื่องมาตรฐาน ที่ว่า:

$$y_{t+1} + ay_t = c$$

จะพบว่า:

$$y = P$$

$$a = \frac{\delta}{\beta} \neq -1 \qquad : \delta, \beta > 0$$

$$c = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

และผลเฉลยหรือกาลวิถีของสมการผลต่างสืบเนื่อง กรณี $a \neq -1$ คือ:

$$y_t = (y_0 - \frac{c}{1 + a})(-a)^t + \frac{c}{1 + a}$$

ดังนั้นในทำนองเดียวกัน กาลวิถีของราคาในที่นี้ ก็จะคือ:

$$P_t = (P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta})(-\frac{\delta}{\beta})^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

3) การวิเคราะห์กาลวิถีลักษณะใยแมงมุม (the cobweb)

ในชั้นนี้ เมื่อได้กาลวิถีของราคาแล้วก็จะวิเคราะห์ลักษณะการโน้มตัวของกาลวิถีดังกล่าวต่อไป ซึ่งกาลวิถีดังกล่าวนี้มีข้อที่น่าจะพิจารณาอยู่ 3 ประเด็นด้วยกัน คือ:

(1) กลุ่มค่าของ $(\alpha + \gamma)/(\beta + \delta)$ ซึ่งก็คือ อินทิกรัลเฉพาะ (particular integral or particular solution: y_p) ของสมการผลต่างสืบเนื่อง อันอาจถือได้ว่าคือดุลยภาพระยะยาวของราคา (intertemporal equilibrium price) ของแบบจำลองนี้ ทั้งนี้เพราะ เมื่อราคาได้ดุลยภาพ อันเกิดจากการกำหนดให้ $Q_{dt} = Q_{st}$ ในทุกคาบของเวลา ดังนั้น ราคาก็จะเป็นราคาดุลยภาพ (equilibrium price: $\bar{p}$) ในทุกช่วงคาบเวลาเช่นกัน นั่นคือ:

$$\bar{p} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \qquad : \text{ค่าคงที่}$$

แต่ด้วยเหตุที่ราคาดุลยภาพที่ได้นี้เป็นค่าคงที่ ดังนั้น ดุลยภาพดังกล่าวจึงเป็นดุลยภาพแบบคงตัว (stationary equilibrium) และเมื่อแทนค่า $\bar{p}$ ในผลเฉลยหรือกาลวิถีข้างต้นนั้น กาลวิถีดังกล่าวก็จะอยู่ในรูป:

$$p_t = (p_0 - \bar{p})\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \bar{p}$$

(2) ด้วยเหตุที่ค่าของ $(p_0 - \bar{p})$ เปรียบเทียบได้กับค่าคงที่ A ในพจน์ของ Ab^t ที่ได้ศึกษาในเบื้องต้นแล้ว และโดยเหตุที่ได้ทราบว่าเครื่องหมายของ A นี้จะเป็นอย่างไรก็ขึ้นอยู่ว่ากาลวิถีนั้นจะอยู่เหนือ (above) หรืออยู่ใต้ (below) ดุลยภาพ อันเป็นเรื่องเกี่ยวกับผลของการสะท้อนภาพ (mirror effect) และในขณะเดียวกันค่าสัมบูรณ์ของ A จะแสดงการขยายขนาด (blow up) หรือการลดย่อขนาด (pare down) อันเป็นเรื่องเกี่ยวกับผลที่มีต่อขนาด (scale effect) ของกาลวิถีนั้น

(3) ด้วยเหตุที่ค่าของ $(-\delta/\beta)$ เปรียบได้กับ b ในพจน์ของ Ab^t ซึ่งในที่นี้ $\beta, \delta > 0$ ดังนั้น $(-\delta/\beta) < 0$ ฉะนั้นแล้ว กาลวิถีที่กำลังพิจารณาอยู่ก็จะเป็นกาลวิถีในรูปของการแกว่งกวัด (oscillatory time path) เช่นเดียวกับ $b < 0$ นั่นเอง

โดยเหตุที่กาลวิถีอยู่ในรูปของการแกว่งกวัดสลับกลับไปมา กาลวิถีดังกล่าวจึงมีรูปลักษณะคล้ายกับใยแมงมุม (cobweb) ดังนั้นกาลวิถีที่มีลักษณะของการแกว่งกวัด จึงเรียกกันว่า กาลวิถีใยแมงมุม อย่างไรก็ตาม ด้วยเหตุที่ลักษณะการแกว่ง (oscillation patterns) ของกาลวิถีในแบบจำลองทั่วไป อาจมีได้ 3 ลักษณะรูปแบบด้วยกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับค่าของ β และ δ และเมื่อเทียบกับ ตาราง 7-1 หรือ รูป 7-1 แล้ว การแกว่งกวัดดังกล่าวอาจจำแนกได้เป็น:

1) แกว่งกวัดแบบกระจายออก (explosive): ถ้า $\delta > \beta$

หรือ $\dfrac{\delta}{\beta} > 1$ (เขต VII)

2) แกว่งกวัดแบบคงตัว (uniform) : ถ้า $\delta = \beta$

หรือ $\dfrac{\delta}{\beta} = 1$ (เขต VI)

3) แกว่งกวัดแบบหน่วง (damped) : ถ้า $\delta < \beta$

หรือ $\dfrac{\delta}{\beta} < 1$ (เขต V)

ในชั้นนี้ เพื่อให้เห็นภาพใยแมงมุมข้างต้นได้เด่นชัด จึงขอแสดงแบบจำลองภาวะตลาดที่กำลังพิจารณาอยู่ ที่ว่า:

$$Q_{dt} = Q_{st}$$

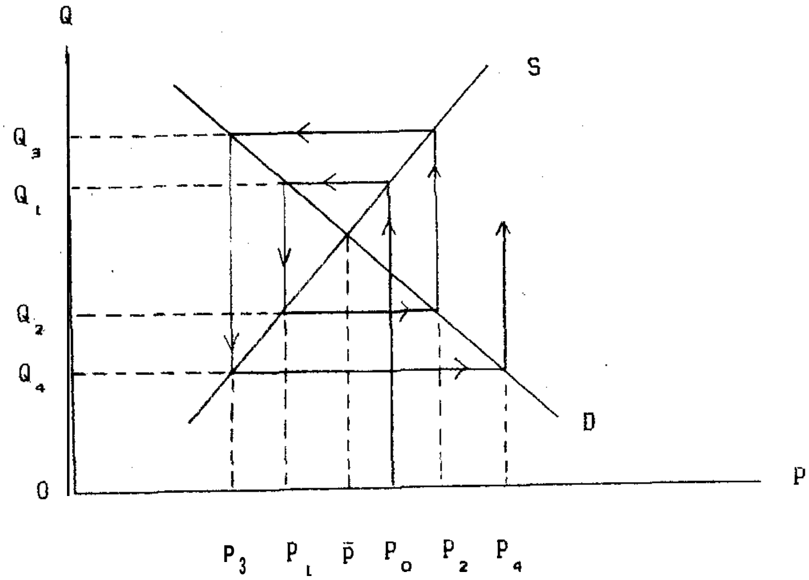
$$Q_{dt} = \alpha - \beta P_t \qquad : \alpha,\beta > 0$$

$$Q_{st} = -\gamma + \delta P_{t-1} \qquad : \gamma,\delta > 0$$

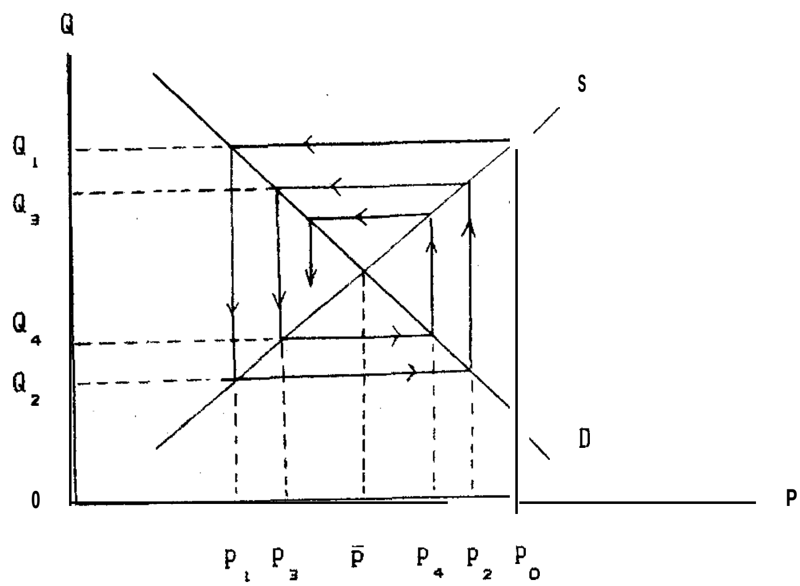
ในลักษณะรูปกราฟ ดังต่อไปนี้:

รูป 7-2: ภาพกราฟลักษณะใยแมงมุม

(ก) $\delta > \beta$: S ชันกว่า D (เขต VII)



(ข) $\delta < \beta$: s ลาดกว่า D (เขต V)



ในรูป 7-2 ข้างต้นนี้ ได้แสดงเส้นการเสนอซื้อ (demand curve) ในลักษณะเส้นตรงลาดจากซ้ายมาขวา โดยมีความชันของเส้นเท่ากับ β (โดยไม่คิดเครื่องหมาย) ดังสมการการเสนอซื้อซึ่งเป็นสมการที่สองของแบบจำลองข้างต้น ในทำนองเดียวกันได้แสดงสมการการสนองขาย (supply function) ซึ่งเป็นสมการที่สามของแบบจำลอง ด้วยเส้นตรงลาดจากขวามาซ้าย โดยมีความชันของเส้นเท่ากับ δ ไว้ในรูปดังกล่าวด้วยแล้วเช่นกัน ทั้งนี้ ได้ใช้แกนตั้งแทนปริมาณสินค้า (Q) ที่เป็นปริมาณการสนองขายคาบช่วงเวลา (lagged quantity supply) ซึ่งกรณีที่ $\delta > \beta$ หรือกรณีที่เส้นการสนองขาย (S) ชันกว่าเส้นการเสนอซื้อ (D) ได้แสดงไว้ในรูป (ก) สำหรับกรณีที่ $\delta < \beta$ หรือกรณีที่เส้นการสนองขายลาดกว่าเส้นการเสนอซื้อ ก็ได้แสดงไว้แล้วในรูป (ข) เช่นกัน อย่างไรก็ตาม ในแต่ละกรณีข้างต้น ตำแหน่งที่เส้นการเสนอซื้อ (D) ตัดกับเส้นการสนองขาย (S) จะเป็นตำแหน่งของดุลยภาพของราคาระยะยาว ($\bar{P}$) (intertemporal equilibrium price) นั่นเอง

ใน รูป 7-2: (ก) ซึ่งเป็นกรณีที่ $\delta > \beta$ ปฏิกิริยาระหว่างกันของการเสนอซื้อและการสนองขาย จะก่อให้เกิดการแกว่งกวัดของกาลวิถีของราคา ในลักษณะกระจายออก (explosive oscillation) ซึ่งปฏิกิริยาระหว่างกันดังกล่าวอาจพิจารณาได้ดังนี้ คือ:

สมมุติว่า ณ ขณะใดขณะหนึ่ง ราคาเบื้องต้น (initial price) อยู่ที่ P_o ซึ่งมากกว่าราคาดุลยภาพระยะยาว $\bar{P}$ (intertemporal equilibrium price) ดังนั้นการสนองขายคาบเวลาถัดไป หรือคาบเวลาที่ 1 ก็จะมีปริมาณ Q_1 ซึ่งถ้าต้องการให้สินค้าขายได้หมด (to clear the market) ในคาบเวลาที่ 1 นั้น การเสนอซื้อก็จะต้องมีปริมาณเท่ากับ Q_1 ด้วย แต่การที่การเสนอซื้อจะมีปริมาณเท่ากับ Q_1 ก็ต่อเมื่อ ราคาอยู่ในระดับ P_1 เท่านั้น แต่ในเมื่อราคาเป็น P_1 ปริมาณการสนองขายก็จะเป็น Q_2 ซึ่งเป็นปริมาณการสนองขายในคาบเวลาที่ 2 ซึ่งเมื่อปริมาณการสนองขายเป็น Q_2 และต้องการให้สินค้าขายได้หมด ปริมาณการเสนอซื้อก็จะต้องเป็น Q_2 ด้วย แต่การที่ปริมาณการเสนอซื้อจะเป็น Q_2 ได้ ราคาก็จะต้องเป็น P_2 เช่นกัน ซึ่งเมื่อราคาเป็น P_2 การสนองขายก็จะมีปริมาณ Q_3 ซึ่งเป็นคาบเวลาที่ 3 ดังนั้น ราคาและปริมาณก็จะมีการปรับตัวต่อเนื่องกันไป ในลักษณะกระจายออก (explosive path) ตามแนวของลูกศร ซึ่งได้แสดงประกอบไว้ในรูป (ก) ข้างต้นนั้นแล้ว ซึ่งจะเห็นได้ว่าการปรับตัวเป็นวง

รอบดังกล่าว มีลักษณะคล้ายกับใยแมงมุม (cobweb) และใยแมงมุมอันเป็นกาลวิถีดังกล่าว ก็มีลักษณะแกว่งกวัดกระจาย (explosive oscillation) ล่ออกจาก (diverge) จุดกลางหรือจุดดุลยภาพระยะยาวนั่นเอง

สำหรับ รูป 7-2: (ข) เป็นกรณีที่ $\delta < \beta$ ซึ่งเป็นกรณีตรงกันข้ามกับ รูป 7-2: (ก) ที่ได้พิจารณามาแล้ว ดังนั้นกระบวนการปรับตัวของราคาและปริมาณก็จะมีลักษณะเป็นใยแมงมุมทำนองเดียวกันแต่ตรงข้ามกัน นั่นคือ กาลวิถีของราคาจะแกว่งกวัดในลักษณะลู่เข้าหาจุดกลาง (centripetal) นั่นเอง ซึ่งจะเห็นได้จาก รูป (ข) ข้างต้น เมื่อเริ่มจาก P_0 ถ้ามุ่งไปตามลูกศรโดยลำดับ จะพบว่ากาลวิถีที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะใยแมงมุมเป็นวงรอบลู่แคบเข้าหาจุดตัดของเส้นการเสนอซื้อและการสนองขาย อันเป็นจุดดุลยภาพระยะยาวของราคา $\bar{P}$ โดยสรุป ก็คือ: กาลวิถีของราคานี้จะแกว่งกวัดแบบหน่วง (damped oscillation) ลู่เข้าหา (converge) จุดดุลยภาพระยะยาวนั่นเอง

อนึ่ง ในรูป 7-2 ข้างต้น ไม่ได้แสดงกาลวิถีของราคา กรณีที่ $\delta = \beta$ ไว้ ทั้งนี้เพราะกระบวนการปรับตัวของราคาและปริมาณในกรณีนี้ จะมีลักษณะเป็นใยแมงมุมเช่นเดียวกันกับสองกรณีที่กล่าวมา เพียงแต่ว่าการแกว่งกวัดในลักษณะใยแมงมุมของกรณีนี้ จะเป็นวงรอบแบบคงตัว (uniform oscillation) ไม่กระจายออกหรือลู่เข้าดังเช่นสองกรณีแรกเท่านั้น

ในที่นี้ จะเห็นได้ว่าการวิเคราะห์ข้างต้นเป็นแต่เพียงการพิจารณากาลวิถีของราคาเพียงโสตเดียว แต่มิได้พิจารณากาลวิถีของปริมาณ (Q) ด้วยแต่อย่างใด อย่างไรก็ตาม หากแม้นว่าต้องการวิเคราะห์กาลวิถีของปริมาณด้วย ก็อาจจะกระทำได้โดยง่าย โดยเพียงแต่แปลงสมการการเสนอซื้อซึ่งอยู่ในสมการที่สองของแบบจำลองตลาดนั้น ให้อยู่ในรูปของราคาขึ้นอยู่กับปริมาณ ทั้งนี้เพื่อหาความสัมพันธ์ของปริมาณกับราคา จากนี้ก็แทนค่าราคา (P_t) ซึ่งอยู่ในรูปของปริมาณ (Q_{dt}) ลงในกาลวิถีของราคาที่หามาได้แล้วนั้น เมื่อแทนค่าแล้วก็จะได้กาลวิถีของปริมาณ Q_{dt} ดังต้องการ อย่างไรก็ตาม ด้วยเหตุที่ Q_{dt} จะต้องเท่ากับ Q_{st} ในทุก ๆ คาบเวลา เพื่อให้สินค้าขายได้หมดตลอดไป ดังนั้น $Q_{dt} = Q_{st} = Q_t$ ซึ่ง Q_t ก็คือปริมาณดุลยภาพ ฉะนั้น ที่สุด

แล้ว กาลวิถีของปริมาณที่ได้ก็จะคือ กาลวิถีของ Q_t นั่นเอง ซึ่งการแปลงรูปกาลวิถีของราคาเป็นกาลวิถีของปริมาณ อาจเห็นได้โดยง่ายอีกลักษณะหนึ่งโดยการพิจารณาจากรูป 7-2 ข้างต้น กล่าวคือ เมื่อพิจารณาจุดใด ๆ บนเส้นการเสนอซื้อแล้ว จะเห็นว่า แต่ละจุดบนเส้นการเสนอซื้อดังกล่าวจะแสดงความสัมพันธ์ของราคา P_i กับปริมาณ Q_i ของคาบเวลาเดียวกัน ดังนั้น สมการการเสนอซื้อจึงสามารถนำมาแปลงกาลวิถีของราคาให้เป็นกาลวิถีของปริมาณได้นั่นเอง

อนึ่ง เป็นที่น่าสังเกตว่า วิธีการทางเรขาคณิตที่ใช้พิจารณากาลวิถีของราคาในรูป 7-2 นั้น เป็นวิธีการพิจารณาทางเรขาคณิตของกาลวิถีของราคาในกรณีที่ เส้นการเสนอซื้อและเส้นการสนองขายมีลักษณะเป็นเส้นตรง (linear) อย่างไรก็ตาม แม้นว่าการเสนอซื้อและการสนองขายจะไม่ใช้เส้นตรง (nonlinear) วิธีการทางเรขาคณิตในลักษณะดังกล่าวก็อาจนำมาวิเคราะห์โดยตรงเดียวกันได้เช่นกัน

ลำดับนี้ เพื่อให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับแบบจำลองใยแมงมุมได้โดยชัดเจนยิ่งขึ้น จึงขอแสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ภาวะตลาดดังกล่าวประกอบ ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 7-7: ตัวอย่างการวิเคราะห์แบบจำลองภาวะตลาด กรณีแบบจำลองใยแมงมุม

สมมุติว่า แบบจำลองภาวะตลาดของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ:

$$Q_{dt} = 20 - 3P_t$$

$$Q_{St} = -30 + 2P_{t-1}$$

และ $$Q_{dt} = Q_{St}$$

อยากทราบว่า:

(ก) กาลวิถี(time path) ของราคาสินค้าชนิดนี้มีลักษณะเป็นอย่างไร

(ข) ราคาดุลยภาพจะมีเสถียรภาพเชิงพลวัตหรือไม่ อย่างไร

วิธีทำ:

จาก $Q_{dt} = 20 - 3P_t$

$Q_{st} = -30 \text{ t } 2P_{t-1}$

และ $Q_{dt} = Q_{st}$

(ก) กาลวิถีของราคา (time path of price: P_t):

จากดุลยภาพ: $Q_{dt} = Q_{st}$

ดังนั้น $20 - 3P_t = -30 + 2P_{t-1}$:แทนค่า Q_{dt} และ Q_{st}

ฉะนั้น $P_t + \frac{2}{3}P_{t-1} = \frac{50}{3}$

เมื่อเลื่อนเวลาขึ้นหนึ่งช่วงคาบ:

จะได้ $P_{t+1} + \frac{2}{3}P_t = \frac{50}{3}$ //

ซึ่งเมื่อเทียบกับสมการผลต่างสืบเนื่องมาตรฐาน ที่ว่า:

$$Y_{t+1} + ay_t = c$$

จะพบว่า:

$y = P$

$a = \frac{2}{3} \neq -1$

$c = \frac{50}{3}$

และจากผลเฉลยหรือกาลวิถีของสมการผลต่างสืบเนื่อง กรณี $a \neq -1$ คือ:

$$y_t = (y_0 - \frac{c}{1 \text{ t } a})(-a)^t \text{ t } \frac{c}{1 + a}$$

ดังนั้นในทำนองเดียวกัน ลักษณะกาลวิถีของราคาในที่นี้ ก็จะคือ:

$$P_t \;\square\; [P_0 - \frac{50/3}{1 \; t \; (2/3)}](-\frac{2}{3})^t \; t \; \frac{50/3}{1 \; t \; (2/3)}$$

หรือ

$$P_t = [P_0 - 10](-\frac{2}{3})^t \; t \; 10$$

ตอบ //

(ข) เสถียรภาพเชิงพลวัตของราคาดุลยภาพ (dynamic stability of equilibrium)!

จากกาลวิถีของสมการผลต่างสืบเนื่องมาตรฐาน:

$$y_t = y_c + y_p$$

$$= Ab^t \; t \; y_p \qquad : y_c = Ab^t$$

ในที่นี้ กาลวิถีของราคา คือ:

$$P_t = [P_0 - 10](-\frac{2}{3})^t + 10$$

ดังนั้น: $Y \;\square\; P$

$\;\square\; [P_0 - \; 101$

$b = -\frac{2}{3}$

$y_p = 10$

ซึ่งเมื่อ: $b = -\frac{2}{3} < 0$: กาลวิถีจะแกว่งกวัด (osci1 late) I

และ $|b| = \frac{2}{3} < 1$: กาลวิถีจะลู่เข้าหาดุลยภาพ (convergent)

ฉะนั้น ราคาจะมีเสถียรภาพเชิงพลวัต โดยจะแกว่งกวัดลู่เข้าหาดุลยภาพ ณ ระดับราคาเท่ากับ 10 (damped oscillation converge to the equilibrium of 10)

ตอบ //

5.2 แบบจำลองภาวะตลาด กรณีมีสินค้าคงคลัง

การวิเคราะห์ภาวะตลาดที่ได้พิจารณาผ่านมาโดยลำดับข้างต้นแล้วนั้น เป็นกรณีที่ราคาถูกกำหนดให้อยู่ในสภาพที่จะเอื้ออำนวยให้ผลผลิตสามารถหมุนเวียนขายได้หมดตลอดเวลา ซึ่งการกำหนดเช่นนี้ เป็นลักษณะของสินค้าที่อาจเสื่อมสภาพสูญเสียได้ง่าย จนไม่สามารถที่จะเก็บรักษาไว้ได้ หรือถึงแม้จะเก็บรักษาไว้ได้ก็จะไม่มีการเก็บรักษาเอาไว้แต่อย่างใด แต่ในลำดับต่อไปนี้จะพิจารณาสร้างแบบจำลองภาวะตลาดในกรณีที่ผู้ขายจะต้องเก็บรักษาสินค้าคงคลังไว้ (which sellers do keep an inventory) ดังต่อไปนี้:

1) รูปแบบจำลอง (The Model)

สมมุติว่า:

(1) ปริมาณการเสนอซื้อ Q_{dt} และปริมาณการสนองขาย Q_{st} ต่างก็ขึ้นอยู่กับราคา P_t ของคาบเวลาเดียวกัน ในลักษณะความสัมพันธ์เชิงเส้น (linear function) หรือมีความสัมพันธ์โดยตรงต่อกัน

(2) การปรับตัวของราคาที่เกิดขึ้น ไม่เพียงแต่เพื่อให้ขายสินค้าได้หมดในแต่ละคาบเวลาเท่านั้น แต่ยังเกิดขึ้นจากกระบวนการการกำหนดราคาของผู้ขายด้วย กล่าวคือ ในตอนต้นของแต่ละคาบเวลา ผู้ขายจะกำหนดราคาขายของแต่ละคาบเวลาไว้ โดยพิจารณาจากสภาวะของสินค้าคงคลัง ซึ่งถ้าหากสินค้าคงคลังยังคงมีสะสมอยู่ อันอาจเป็นผลจากระดับราคาของคาบเวลาก่อนหน้านี้ ผู้ขายก็จะกำหนดราคาในคาบปัจจุบันให้ต่ำกว่าระดับราคาของช่วงก่อน ในทางตรงกันข้าม ถ้าสินค้าคงคลังลดต่ำลง ราคาในคาบปัจจุบันก็จะถูกกำหนดให้สูงกว่าในคาบก่อน

(3) การปรับตัวของราคาซึ่งพิจารณาจากคาบเวลาหนึ่งไปสู่อีกคาบเวลาหนึ่ง มีรูปความสัมพันธ์เป็นสัดส่วนตรงกันข้าม (inversely proportional) กับการเปลี่ยนแปลงของจำนวนสินค้าคงคลัง

ข้อสมมุติทั้งสามข้างต้น สามารถแสดงในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ได้ ดังต่อไปนี้:

$$Q_{dt} = \alpha - \beta P_t \qquad : \alpha, \beta > 0$$

$$Q_{St} = -\gamma + \delta P_t \qquad : \gamma, \delta > 0$$

และ

$$P_{t+1} = P_t - \sigma(Q_{St} - Q_{dt}) \qquad : \sigma > 0$$

:โดย σ หมายถึง สัมประสิทธิ์การปรับตัวของราคา

2) กาลวิถี (the time path)

จากสมการทั้งสามข้างต้น เมื่อแทนค่าสองสมการแรกลงในสมการที่สาม จะได้:

$$\begin{aligned}
P_{t+1} &= P_t - \sigma(Q_{St} - Q_{dt}) \\
&= P_t - \sigma[(-\gamma + \delta P_t) - (\alpha - \beta P_t)] \\
&= P_t - \sigma[-\gamma + \delta P_t - \alpha + \beta P_t] \\
&= P_t - \sigma[(-\alpha - \gamma) + (\beta + \delta)P_t] \\
&= P_t + \sigma(\alpha + \gamma) - \sigma(\beta + \delta)P_t \\
&= [P_t - \sigma(\beta + \delta)P_t] + \sigma(\alpha + \gamma) \\
&= [1 - \sigma(\beta + \delta)]P_t + \sigma(\alpha + \gamma)
\end{aligned}$$

หรือ $P_{t+1} - [1 \quad \sigma(\beta + \delta)]P_t = \sigma(\alpha + \gamma)$

สมการสุดท้ายนี้ก็คือ สมการผลต่างสืบเนื่องนั่นเอง

เมื่อเทียบกับสมการผลต่างสืบเนื่องมาตรฐานทั่วไป ที่ว่า:

$$Y_{t+1} + a\,y_t = c$$

จะพบว่า:

$$y = P$$

$$a = -Cl - \delta(\beta + \delta)] \neq -1 \qquad : \delta, \alpha, \gamma > 0$$

$$C = \delta(\alpha \; t \; \beta)$$

และจากผลเฉลยหรือกาลวิถีของสมการผลต่างสืบเนื่องมาตรฐาน กรณีที่ $a \neq -1$ คือ:

$$y_t = (y_0 - \frac{c}{1 + a})(-a)^t \; t \; \frac{c}{1 \; t \; a}$$

ดังนั้นในทำนองเดียวกัน กาลวิถีของราคาในที่นี้ ก็จะคือ:

$$P_t = (P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta})[1 - \delta(\beta \; t \; \delta)]^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

$$= (P_0 - \bar{p})[1 - \delta(\beta \; t \; \delta)]^t \; t \; \bar{p} \qquad //$$

3) การวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงพลวัตของกาลวิถี:

การวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงพลวัต (dynamic stability) ของกาลวิถีของราคาในที่นี้ อาจดำเนินการโดยวิธีการเปรียบเทียบกับกาลวิถีของสมการผลต่างสืบเนื่อง ในลักษณะรูปแบบมาตรฐานทั่วไปได้ดังนี้:

จากกาลวิถีรูปแบบมาตรฐานทั่วไป: $y_t = y_c + y_p$

$$= Ab^t + y_p$$

ในที่นี้ กาลวิถีของราคา คือ:

$$P_t = (P_0 - \bar{p})[1 - \sigma(\beta + \delta)]^t + \bar{p}$$

ดังนั้น:

$$y = P$$

$$A = (P_0 - \bar{p})$$

$$b = [1 - \sigma(\beta + \delta)] < 1 \qquad : \sigma, \alpha, \gamma > 0$$

$$Y_p = \bar{p}$$

จากกาลวิถีของราคาข้างต้น จะเห็นว่าเสถียรภาพเชิงพลวัตของแบบจำลอง จะขึ้นอยู่กับค่าของ b หรือก็คือค่าของพจน์ $[1 - \sigma(\beta + \delta)]$ เป็นสำคัญ และที่สุดก็คือ ขึ้นอยู่กับค่าของ σ, β และ δ นั่นเอง ซึ่งเมื่อเทียบกับ ตาราง 7-1 ดังที่ได้แสดงไว้ในเบื้องต้นแล้ว จะพบว่าในการวิเคราะห์พจน์ b^t ที่ผ่านมา ได้แบ่งเขตค่าของ b เป็นเจ็ดเขตค่าด้วยกัน แต่ด้วยเหตุที่ในที่นี้ σ, β และ $\delta > 0$ ฉะนั้นเขตค่าที่หนึ่งและเขตค่าที่สองของ b ซึ่งเป็นเขตค่าที่ $b > 1$ และ $b = 1$ จึงไม่มีความจำเป็นที่จะต้องพิจารณาแต่อย่างใด ดังนั้น เขตค่าของ b ที่จะต้องพิจารณาจึงมีอยู่เพียงห้าเขตเท่านั้น ซึ่งแต่ละเขตค่าจะมีรูปแบบลักษณะของกาลวิถี ดังต่อไปนี้:

ตาราง 7-2: ตารางแสดงรูปแบบลักษณะของกาลวิถี (types of time path):

เขต	ค่าของ b	รูปแบบลักษณะของกาลวิถี P_t
III	$0 < b < 1$	ลู่เข้าหาดุลยภาพแบบไม่แกว่งกวัด (convergent)
IV	$b = 1$	คงตัวอยู่ที่ดุลยภาพ (remaining in equilibrium)
V	$-1 < b < 0$	แกว่งกวัดแบบหน่วงลู่เข้า (damped oscillation)
VI	$b = -1$	แกว่งกวัดแบบคงตัว (uniform oscillation)
VII	$b < -1$	แกว่งกวัดกระจายออก (explosive oscillation)

ลำดับนี้ เพื่อให้การวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงพลวัตของกาลวิถีสามารถเข้าใจและเห็นได้โดยชัดเจนยิ่งขึ้น จึงขอแสดงตัวอย่างประกอบ ดังต่อไปนี้ :

ตัวอย่าง 7-8: ตัวอย่างการวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงพลวัตของกาลวิถี

สมมุติว่า ผู้ขายในแบบจำลองภาวะตลาดที่กำลังพิจารณาอยู่ จะเพิ่ม (ลด) ราคาร้อยละ 10 ของปริมาณสินค้าคงคลังที่ลดลง (เพิ่มขึ้น) เสมอ และถ้าการเสนอซื้อและการสนองขายมีความชันเป็น -2 และ 14 ตามแนวแกนของราคาตามลำดับ เช่นนี้แล้ว กาลวิถีของราคา P_t จะมีรูปแบบลักษณะเป็นอย่างไร

วิธีทำ:

จากกาลวิถีรูปแบบมาตรฐานทั่วไป:

$$y_t = y_c + y_p$$
$$= Ab^t \; t \; y_p$$

ในที่นี้กาลวิถีของราคา คือ:

$$P_t = (P_0 - \bar{p})[1 - \sigma(\beta + \delta)]^t \; t \; \bar{p}$$

นั่นคือ: $y = P$

$A = (P_0 - \bar{p})$

$b = [1 - \sigma(\beta + \delta)]$

$y_p = \bar{p}$

จากโจทย์: $\sigma = 10\% = \frac{10}{100}$

$\beta = 2$

$\delta = 14$

ดังนั้น $b = Cl - \delta(\beta\ t\ \delta)]$

$$= Cl - \frac{10}{100}(2\ t\ 14)]$$

$$= -\frac{6}{10} < 0$$: กาลวิถีจะแกว่งกวัด (oscillate)

และ $|b| = \frac{6}{10} < 1$: กาลวิถีลู่เข้าหาดุลยภาพ (damped)

ฉะนั้น กาลวิถีของราคา P_t จะมีลักษณะแกว่งกวัดแบบหน่วง (damped oscillation) ลู่เข้าหา (converge) ดุลยภาพระยะยาว $\bar{P}$

ตอบ //

ตัวอย่าง 7-9: ตัวอย่างการวิเคราะห์แบบจำลองภาวะตลาด กรณีมีสินค้าคงคลัง

สมมุติว่า แบบจำลองภาวะตลาดของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ:

$$Q_{dt} = 20 - 3P_t$$

$$Q_{St} = -30\ t\ 2P_t$$

และ $$P_{t+1} = P_t - 0.3(Q_{St} - Q_{dt})$$

อยากทราบว่า:

(ก) กาลวิถี(time path) ของราคาสินค้าชนิดนี้มีลักษณะเป็นอย่างไร

(ข) ราคาดุลยภาพจะมีเสถียรภาพเชิงพลวัตหรือไม่ อย่างไร

วิธีทำ:

จาก $$Q_{dt} = 20 - 3P_t$$

$$Q_{St} = -30\ t\ 2P_t$$

และ $$P_{t+1} = P_t - 0.3(Q_{St} - Q_{dt})$$

(ก) กาลวิถีของราคา (time path of price: P_t):

จาก

$$P_{t+1} \quad P_t - 0.3(Q_{st} - Q_{dt})$$
$$= P_t - 0.3[(-30 + 2P_t) - (20 - 3P_t)]$$
$$= P_t - 0.3[-50 + 5P_t]$$
$$= P_t + 15 - 1.5P_t$$
$$= -0.5P_t + 15$$

หรือ

$$P_{t+1} + 0.5P_t = 15 \qquad //$$

ซึ่งเมื่อเทียบกับสมการผลต่างสืบเนื่องมาตรฐาน ที่ว่า:

$$y_{t+1} + ay_t = c$$

จะพบว่า:

$$y = P$$
$$a = 0.5 \neq -1$$
$$c = 15$$

และจากผลเฉลยหรือกาลวิถีของสมการผลต่างสืบเนื่อง กรณี $a \neq -1$ คือ:

$$y_t = (y_0 - \frac{c}{1 + a})(-a)^t + \frac{c}{1 + a}$$

ดังนั้นในทำนองเดียวกัน ลักษณะกาลวิถีของราคาในที่นี้ ก็จะคือ:

$$P_t = [P_0 - \frac{15}{1 + 0.5}](-0.5)^t + \frac{15}{1 + 0.5}$$

หรือ

$$P_t = [P_0 - 10](-\frac{1}{2})^t + 10$$

ตอบ //

(ข) เสถียรภาพเชิงพลวัตของราคาดุลยภาพ (dynamic stability of equilibrium):

จากกาลวิถีของสมการผลต่างสืบเนื่องมาตรฐาน:

$$y_t = y_c + y_p$$

$$= Ab^t + y_p \qquad ; Y_c = Ab^t$$

ในที่นี้ กาลวิถีของราคา คือ:

$$P_t = [P_0 - 10](-\frac{1}{2})^t + 10$$

ดังนั้น:

$$y = P$$

$$A = [P_0 - 10]$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$y_p = 10$$

ซึ่งเมื่อ: $b = -\frac{1}{2} < 0$: กาลวิถีจะแกว่งกวัด (oscillate)

และ $|b| = \frac{1}{2} < 1$: กาลวิถีจะลู่เข้าหาดุลยภาพ (convergent)

ฉะนั้น ราคาจะมีเสถียรภาพเชิงพลวัต โดยจะแกว่งกวัดลู่เข้าหาดุลยภาพ ณ ระดับราคาเท่ากับ 10 (damped oscillation converge to the equilibrium of 10)

ตอบ //

๖. สรุป

สมการผลต่างสืบเนื่อง หมายถึง สมการที่มีรูปผลต่างของค่าตัวแปรต่างคาบอันดับเวลาสืบเนื่องกันปรากฏอยู่ ซึ่งเวลาที่ต่างอันดับสืบเนื่องกันนี้มีลักษณะเต็มหน่วยขาดช่วงไม่ต่อเนื่องกัน โดยสมการนี้จะมีตัวแปรที่มีช่วงต่างของเวลาสืบเนื่องกันเท่าใดก็ได้ และตัวแปรของสมการนั้นจะอยู่ในรูปยกกำลังเท่าไรก็ได้ด้วยเช่นกัน ทั้งนี้ จำนวนคาบเวลาของตัวแปรที่ต่างอันดับกันนั้นจะแสดงอันดับของสมการนี้ และระดับของการยกกำลังของตัวแปรก็จะแสดงระดับขั้นของสมการผลต่างสืบเนื่องนั้น ๆ เช่นกัน ดังนั้นถ้าสมการผลต่างสืบเนื่องใดมีผลต่างของค่าตัวแปรสืบเนื่องกัน n คาบเวลา และตัวแปรในสมการนั้นยกกำลัง m แล้ว สมการนั้น จะเรียกว่า สมการผลต่างสืบเนื่องอันดับ (order) ที่ n ระดับขั้น (degree) ที่ m นั่นเอง นอกจากนี้สมการผลต่างสืบเนื่องนั้น จะมีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรและค่าของสมการเป็นค่าคงที่ หรือเป็นตัวแปรก็ได้ด้วยเช่นกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้าค่าสมการมีค่าเป็นศูนย์ด้วยแล้ว สมการนั้น จะเรียกว่า สมการผลต่างสืบเนื่องแบบเอกพันธ์ แต่ถ้าค่าสมการของสมการนั้นมีค่าไม่เป็นศูนย์ สมการนั้นก็จะเรียกว่า สมการผลต่างสืบเนื่องกรณีไร้เอกพันธ์

อนึ่ง จากการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์และสมการผลต่างสืบเนื่องมาโดยลำดับแล้วนี้ จะพบว่า สมการทั้งสองรูปแบบมีลักษณะที่คล้ายคลึงกันเพราะต่างก็เป็นเรื่องเกี่ยวกับการวิเคราะห์เชิงพลวัต อันเป็นการศึกษาความเป็นไปของตัวแปรตามอันเกิดจากการเปลี่ยนแปลงของเวลาซึ่งเป็นตัวแปรอิสระเช่นเดียวกัน จะต่างกันก็เพียงแต่ ในกรณีของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ตัวแปรอิสระหรือเวลามีค่าในลักษณะต่อเนื่องไม่ขาดตอน แต่ในเรื่องของสมการผลต่างสืบเนื่องตัวแปรอิสระมีลักษณะเต็มหน่วยหรือขาดช่วงเท่านั้น ดังนั้น โดยหลักทั่วไปแล้ว วัตถุประสงค์ของการศึกษาของเรื่องทั้งสองในที่นี้ จึงเป็นไปในรูปแบบเดียวกัน กล่าวคือ เป็นการสร้างสูตรสำเร็จเพื่อใช้ในการแก้สมการถอดหาค่าตัวแปร อันเป็นประโยชน์ในการประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์เรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์เชิงพลวัตนั่นเอง

ในที่นี้ ความรู้ที่ได้จากการศึกษาสมการผลต่างสืบเนื่อง ได้นำมาประยุกต์ให้เป็นตัวอย่างใช้กับเรื่องราวของการวิเคราะห์ภาวะตลาดในรูปแบบต่าง ๆ อันเป็นการวิเคราะห์เพื่อหากาลวิถีของราคาสินค้า และที่สุดเป็นการวิเคราะห์ดุลยภาพเชิงพลวัตของราคาสินค้านั้น ๆ ด้วยแล้ว