บทที่ 7
สมการผลต่างสืบเนื่อง
(Difference Equations)

บทที่ 7
สมการผลต่างสืบเนื่อง
(Difference Equations)

เค้าโครงเรื่อง :

1. ความทั่วไป

2. ความหมาย

3. การหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องอันดับที่หนึ่ง

    3.1 วิธีการทำซ้ำ
    3.2 วิธีมาตรฐานทั่วไป

4. เสถียรภาพเชิงพลวัตของดุลยภาพ

    4.1 สาระสำคัญของ b
    4.2 บทบาทของ A
    4.3 การโน้มเข้าสู่ดุลยภาพ

5. การประยุกต์ในทางเศรษฐศาสตร์

    5.1 แบบจำลองใยแมงมุม
    5.2 แบบจำลองภาวะตลาด กรณีมีสินค้าคงคลัง

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อศึกษาเรื่องสมการผลต่างสืบเนื่องนี้จบแล้ว นักศึกษาสามารถ :

1. อธิบายความหมายของสมการผลต่างสืบเนื่องได้อย่างถูกต้อง
2. อธิบายความเหมือนกันและความแตกต่างกันของสมการผลต่างสืบเนื่องกับสมการเชิงอนุพันธ์ เชิงเปรียบเทียบได้อย่างชัดเจน
3. อธิบายและหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่อง ในแต่ละลักษณะกรณีได้อย่างถูกต้อง
4. วิเคราะห์การมีเสถียรภาพเชิงพลวัตของกาลวิถีของสมการผลต่างสืบเนื่องได้
5. ประยุกต์เรื่องราวเกี่ยวกับสมการผลต่างสืบเนื่อง เพื่อนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาเศรษฐกิจในทางปฏิบัติปัจจุบันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม

บทที่ 7
สมการผลต่างสืบเนื่อง
(Difference Equations)

1. ความทั่วไป

การวิเคราะห์เรื่องราวเกี่ยวกับเวลาต่อเนื่อง (continuous time) ที่ได้ศึกษามาในบทก่อน ได้แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงไป (pattern of change) ของตัวแปรตาม y อันเกิดจากการเปลี่ยนแปลงของเวลา t ในรูปของอนุพันธ์ $y'(t)$, $y''(t)$ ฯลฯ ทั้งนี้ด้วยเหตุที่การเปลี่ยนแปลงของเวลา t ที่เกี่ยวข้อง มีลักษณะการเปลี่ยนไปอย่างต่อเนื่องและน้อยมาก (infinitesimal) แต่ถ้าในที่นี้เวลาที่เปลี่ยนไปนั้น เป็นลักษณะของเวลาเต็มหน่วย (discrete time) ซึ่งก็หมายความว่า "เวลา" ได้รับการจัดให้เป็นตัวแปรอิสระแบบเต็มหน่วย (discrete variable) ในลักษณะนี้ เวลาย่อมต้องเป็นค่าจำนวนเต็ม (integer value) เท่านั้น ดังนั้น เรื่องเกี่ยวกับอนุพันธ์ซึ่งเคยนำมาใช้ในบทก่อนจะนำมาประยุกต์ใช้ไม่ได้อีกแล้ว ทั้งนี้เพราะเวลาที่ศึกษานั้นมิได้เปลี่ยนไปทีละน้อยดังเดิม แต่เวลานั้นจะเปลี่ยนไปคราวละหน่วยหรือคราวละคาบ (period) เลยทีเดียว เช่น เปลี่ยนจาก $t=1$ ไป $t=2$ เช่นนี้แล้ว การศึกษาในลำดับนี้ จึงเป็นการวิเคราะห์เกี่ยวกับลักษณะการเปลี่ยนไปของตัวแปร y เมื่อเวลาเปลี่ยนไปคราวละหน่วยเวลา หรือเวลามีลักษณะขาดช่วงไม่ต่อเนื่องนั่นเอง ซึ่งสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรตาม y กับตัวแปรอิสระ t ที่มีลักษณะเต็มหน่วยเช่นนี้ เรียกว่า สมการผลต่างสืบเนื่อง (difference equations) นั่นเอง

โดยเหตุที่ การศึกษาเรื่องเกี่ยวกับเวลาเต็มหน่วย (discrete time) นี้ ค่าของตัวแปรตาม y จะเปลี่ยนไปก็ต่อเมื่อ ตัวแปรอิสระ t เปลี่ยนไปจากค่าจำนวนเต็มค่าหนึ่ง ไปสู่ค่าจำนวนเต็มอีกค่าหนึ่งเท่านั้น ดังนั้น ค่าของเวลา (value of t) ในที่นี้ จึงหมายถึง ช่วง

หรือคาบเวลา (periods) โดยที่ $t=1$ หมายถึง คาบ 1 (period 1) และ $t=2$ หมายถึง คาบ 2 (period 2) เป็นต้น ฉะนั้น y ก็จะเป็นค่าโดดเฉพาะ (unique value) ของแต่ละคาบเวลา ในลักษณะเช่นนี้ เรื่องเกี่ยวกับเศรษฐศาสตร์เชิงพลวัตซึ่งวิเคราะห์ในรูปแบบของเวลาเต็มหน่วย (discrete time version) ที่จะกล่าวถึงในลำดับต่อไป จึงหมายถึง การวิเคราะห์ช่วงคาบเวลา (period analysis) นั่นเอง

2. ความหมาย

ความจริงแล้วการเปลี่ยนจากการวิเคราะห์ในรูปแบบของเวลาต่อเนื่อง (continuous time) มาเป็นการวิเคราะห์ในรูปแบบของเวลาเต็มหน่วยที่จะได้กล่าวถึงนี้ จะไม่ก่อให้เกิดผลกระทบต่อหลักการพื้นฐานในการวิเคราะห์เชิงพลวัตแต่อย่างใด ถึงแม้ว่ารูปแบบของปัญหาจะได้เปลี่ยนแปลงไปก็ตาม นั่นคือปัญหาเชิงพลวัต (dynamic problem) ก็ยังคงเป็นเรื่องเกี่ยวกับการหากาลวิถีของตัวแปรตาม y จากความสัมพันธ์ หรือลักษณะการเปลี่ยนไปของ y อันเกิดจากเวลา t ที่กำหนดนั่นเอง เพียงแต่ลักษณะรูปแบบความสัมพันธ์การเปลี่ยนแปลง (pattern of change) ดังกล่าวจะอยู่ในรูปสัดส่วนหรือผลหารของจำนวนผลต่าง (difference quotient: $\Delta y/\Delta t$) อันเป็นลักษณะของเวลาเต็มหน่วย (discrete time) แทนที่จะเป็นในรูปของอัตราการเปลี่ยนแปลงหรืออนุพันธ์ (derivative: dy/dt) ดังเช่นลักษณะของเวลาต่อเนื่อง เท่านั้นเอง

อย่างไรก็ตาม ด้วยเหตุที่การวิเคราะห์ในลักษณะของเวลาเต็มหน่วย เวลา t จะต้องเป็นค่าจำนวนเต็ม (integer values) เท่านั้น ดังนั้น เมื่อต้องการเปรียบเทียบค่าของ y ระหว่างคาบเวลาที่ติดต่อกันสองคาบ จึงต้องเขียนในรูป $\Delta t = 1$ ด้วยเหตุดังกล่าวนี้ สัดส่วนหรือผลหารของผลต่าง (difference quotient: $\Delta y/\Delta t$) จึงสามารถทำให้ง่ายโดยแสดงให้อยู่ในรูปของ Δy ได้ (expression Δy) และเรียกรูปลักษณะนี้ว่า ผลต่างหรือการเปลี่ยนแปลง ซึ่งหมายถึง การเปลี่ยนแปลงโดยตรงครั้งแรกหรือครั้งที่หนึ่งของเวลาเต็มหน่วย ทำนองเดียวกันกับ สัญลักษณ์ "d/dt" ของลักษณะเวลาต่อเนื่องนั่นเอง

อนึ่ง รูปของ Δy สามารถมีค่าได้หลายลักษณะด้วยกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนคาบเวลา (difference-taking or differencing) ของ y ว่าได้เปลี่ยนจากคาบเวลาใดไปสู่คาบเวลาใด จากสองคาบเวลาที่ติดต่อกันนั้น ดังนั้น เพื่อเป็นการหลีกเลี่ยงความสับสน จึงเพิ่มสัญลักษณ์ของเวลา (time subscript) ห้อยท้ายไว้กับ y ด้วย ทั้งนี้เพื่อเจาะจงเวลาที่แน่นอนของแต่ละคาบไว้ให้เห็นเด่นชัดยิ่งขึ้น และเมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงของคาบเวลาครั้งที่หนึ่งให้หมายถึง การเปลี่ยนจากคาบเวลา t ไปสู่คาบเวลา t+1 ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงของ y ครั้งที่หนึ่ง จึงหมายถึง การเปลี่ยนแปลงของ y จากคาบเวลา t ไปสู่คาบเวลา t+1 ซึ่งจะสามารถแสดงได้ ดังนี้:

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$$

โดยที่: y_t หมายถึง ค่าของ y ในคาบเวลาที่ t (t^{th} period)

y_{t+1} หมายถึง ค่าของ y ในคาบเวลาที่ถัดจาก คาบเวลา t

ด้วยระบบของสัญลักษณ์ข้างต้น ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของ y ใด ๆ อาจจะเขียนให้เห็นได้โดยง่ายในรูปของสมการ ดังเช่น:

$$Ay_t = 3$$

และ $$Ay_t = -0.2y_t$$

สมการซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงเช่นนี้ เรียกว่า สมการผลต่างสืบเนื่อง (difference equations) นั่นเอง ซึ่งจะเห็นได้ว่าคล้ายคลึงกันกับ สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) ที่ว่า:

$$\frac{dy}{dt} = 3$$

และ $$\frac{dy}{dt} = -0.2y$$

อย่างไรก็ตาม แม้ว่าสมการผลต่างสืบเนื่อง จะได้ชื่อมาด้วยเหตุที่เป็นสมการในลักษณะสัญลักษณ์ผลต่าง หรือ การเปลี่ยนแปลง เช่น Δy แต่สมการดังกล่าวก็อาจเขียนในรูปที่ง่ายและสดวกต่อการพิจารณา ในลักษณะของสมการทั่วไปที่ไม่จำเป็นต้องใช้สัญลักษณ์ Δ เลยก็ได้ เช่น:

จากสมการผลต่างสืบเนื่อง: $\Delta y_t = 3$

อาจเขียนแสดงในรูปลักษณะสมการมาตรฐานได้เป็น:

$$Y_{t+1} - y_t = 3$$

หรือ $$Y_{t+1} = 3 + y_t$$

และจาก $$AY_t = -0.2y_t$$

ก็อาจจะเขียนได้เป็น: $$y_{t+1} - y_t = -0.2y_t$$

หรือ $$Y_{t+1} = 0.8y_t$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า การเขียนสมการผลต่างสืบเนื่องในลักษณะของสมการมาตรฐานทั่วไปซึ่งไม่ปรากฏสัญลักษณ์ความแตกต่าง "Δ" นี้, เป็นรูปแบบที่สดวกต่อการหาค่าของ y เมื่อได้ทราบค่า y ของคาบเวลาก่อนหน้านั้น

อนึ่ง เป็นที่น่าสังเกตว่าสัญลักษณ์ของเวลาที่ห้อยท้ายของตัวแปรในสมการนั้น เป็นเพียงสัญลักษณ์ที่มีไว้เพื่อแสดงคาบช่วงเวลาของตัวแปรที่กำหนด ดังนั้น เมื่อต้องการที่จะแสดงการเปลี่ยนไปของตัวแปรจากคาบเวลาหนึ่งไปสู่คาบเวลาอีกคาบหนึ่ง ก็อาจจะแสดงได้หลายรูปแบบด้วยกัน เช่น:

$$y_{t+1} - y_t = 3$$

หรือ $$y_t - y_{t-1} = 3$$

หรือ $$y_{t+2} - y_{t+1} = 3$$

และอาจจะเขียนสัญลักษณ์ของเวลาที่ห้อยท้ายตัวแปรของสมการข้างต้น ในรูปแบบอื่น ๆ อีกก็ได้ เพียงแต่ต้องเขียนสัญลักษณ์ดังกล่าวในลักษณะต่อเนื่องกันเท่านั้น

ในลำดับนี้ เมื่อได้ทราบลักษณะทั่วไปเบื้องต้นของสมการผลต่างสืบเนื่องแล้ว ควรที่จะได้ทราบต่อไปว่า สมการผลต่างสืบเนื่อง อาจมีได้หลายลักษณะกรณีดังเช่นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้พิจารณามาแล้ว กล่าวคือ อาจจะเป็นเชิงเส้น (linear) หรือไม่ใช่เชิงเส้น (nonlinear) ก็ได้ และจะเป็นกรณีเอกพันธ์ (homogeneous) หรือกรณีไร้เอกพันธ์ (nonhomogeneous) ก็ได้เช่นกัน ทั้งยังอาจจะเป็นอันดับที่หนึ่ง (first order) อันดับที่สอง (second order) หรือ อันดับที่ใด ๆ ที่สูงกว่านี้ (higher order) ก็ได้ด้วย ในชั้นนี้ เพื่อให้เข้าใจได้ดียิ่งขึ้น จะขอเสนอสมการผลต่างสืบเนื่องสมการหนึ่งเป็นตัวอย่าง ดังนี้:

$$Y_{t+1} - y_t = 3$$

สมการผลต่างสืบเนื่องข้างต้นนี้ เรียกได้ว่าเป็นสมการเชิงเส้น ทั้งนี้เพราะว่าในสมการนั้น ไม่มีตัวแปรใดหรือพจน์ใดที่ยกกำลังเกินหนึ่งเลย และสมการนี้ก็เป็นกรณีไร้เอกพันธ์ (nonhomogeneous case) ด้วยเหตุที่ค่าสมการด้านขวามือไม่ใช่ศูนย์ (nonzero) ทั้งสมการนี้ก็เป็นอันดับที่หนึ่ง (first order) ด้วย ทั้งนี้ด้วยเหตุว่า การเปลี่ยนแปลงนั้นเกิดขึ้นเพียงคาบหรือช่วงเวลาเดียว หรือเป็นเพียงผลต่างในครั้งที่หนึ่ง (first difference: Δy) เท่านั้น นอกจากนี้ สมการข้างต้นนี้นั้นยังอาจจะเรียกว่าเป็นสมการที่มีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่ (constant coefficient) และมีค่าสมการเป็นค่าคงที่ (constant term) ด้วยก็ได้

อย่างไรก็ตาม แม้ว่าสมการผลต่างสืบเนื่องจะมีได้หลายลักษณะกรณี แต่ในที่นี้จะขอแสดงเฉพาะกรณีที่เป็นอันดับที่หนึ่งเท่านั้น ทั้งนี้เพื่อให้เป็นพื้นฐานของเรื่องนี้ในลำดับต่อ ๆ ไป

3. การหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องอันดับที่หนึ่ง

จากการที่ได้ทราบแล้วว่า สมการผลต่างสืบเนื่องอันดับที่หนึ่ง หมายถึง สมการที่มีการ

เปลี่ยนไปของตัวแปรเพียงคาบหรือช่วงเวลาเดียวเท่านั้น ในลำดับนี้ จะได้พิจารณาถึงวิธีการที่จะหาผลเฉลยหรือคำตอบของสมการผลต่างสืบเนื่องดังกล่าวต่อไป

ในการหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องใด ๆ โดยทั่วไปแล้ว จะมีวิธีการและหลักการทำนองเดียวกันกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้ศึกษาผ่านมาแล้วนั่นเอง กล่าวคือ เป้าหมายของการหาผลเฉลยก็คือ การหากาลวิถี (time path) ของตัวแปร y(t) เช่นเดียวกัน และกาลวิถีนั้นก็จะต้องขึ้นอยู่กับเวลา t (function of time) เพียงอย่างเดียวเท่านั้นเช่นกัน ทั้งนี้ กาลวิถีซึ่งเป็นผลเฉลยที่จะได้นั้น ก็จะต้องสอดคล้องกับสมการและเงื่อนไขเบื้องต้นที่กำหนดเหมือนกัน ซึ่งวิธีการหาผลเฉลยหรือกาลวิถีของสมการผลต่างสืบเนื่องดังกล่าวก็จะสามารถดำเนินการได้โดยวิธีการต่อไปนี้

3.1 วิธีการทำซ้ำ

วิธีการทำซ้ำ (iterative method) เป็นวิธีการหาผลเฉลยอย่างง่าย โดยเริ่มจากค่าของ y เบื้องต้น : y_0 แล้วก็หาค่า y_1 จากสมการผลต่างสืบเนื่องที่กำหนด เมื่อได้ y_1 ก็หา y_2 ต่อไป และเมื่อได้ y_2 ก็หา y_3 ได้ต่อไป ดำเนินการในลักษณะนี้ซ้ำกันต่อไปเรื่อย ๆ ที่สุดก็จะได้กาลวิถีตามต้องการ

เพื่อให้เห็นได้เด่นชัดยิ่งขึ้น จะขอยกตัวอย่างต่อไปนี้ประกอบความเข้าใจ ดังนี้:

ตัวอย่าง 7-1: การหากาลวิถีของสมการผลต่างสืบเนื่องโดยวิธีการทำซ้ำ

จงหาผลเฉลยหรือกาลวิถีของสมการผลต่างสืบเนื่อง:

$$\Delta y_t = 3$$

เมื่อค่าของ y เบื้องต้นคือ $y_0 = 15$

วิธีทำ:

จาก $$\Delta y_t = 3$$

หรือ $$y_{t+1} - y_t = 3 \qquad : \Delta y_t = y_{t+1} - y_t$$

ดังนั้น $$y_{t+1} = y_t + 3$$

ฉะนั้น โดยวิธีการทำซ้ำ:

$$y_1 = y_0 + 3$$

$$y_2 = y_1 + 3$$

$$= (y_0 \ t \ 3) \ t \ 3 \qquad : y_1 = y_0 \ t \ 3$$

$$= y_0 \ t \ 2(3)$$

$$y_3 = y_2 + 3$$

$$= [y_0 \ t \ 2(3)] \ t \ 3 \qquad : y_2 = y_0 \ t \ 2(3)$$

$$= y_0 \ t \ 3(3)$$

ทำนองเดียวกัน ...

$$y_t = y_0 + t(3)$$

ดังนั้น $$y_t = 15 \ t \ 3t \qquad : y_0 = 15$$

สมการข้างต้นนี้ก็คือ ค่าของ y ในคาบช่วงเวลา t ใด ๆ ซึ่งก็คือ กาลวิถีของสมการผลต่างสืบเนื่องที่กำหนดดังต้องการ

ตัวอย่าง 7-2:

จงหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่อง:

$$\Delta y_t = -0.2y_t$$

วิธีทำ:

จาก $$\Delta y_t = -0.2y_t$$

หรือ $$y_{t+1} - y_t = -0.2y_t \qquad : \Delta y_t = y_{t+1} - y_t$$

ดังนั้น $$y_{t+1} = 0.8y_t$$

ฉะนั้น โดยวิธีการทำซ้ำ:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.8y_0 \\ y_2 &= 0.8y_1 \\ &= 0.8(0.8y_0) && : y_1 = 0.8y_0 \\ &= (0.8)^2 y_0 \\ y_3 &= 0.8y_2 \\ &= 0.8[(0.8)^2 y_0] && : y_2 = (0.8)^2 y_0 \\ &= (0.8)^3 y_0 \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน ...

$$y_t = (0.8)^t y_0$$

สมการข้างต้นนี้ก็คือ ค่าของ y ในคาบช่วงเวลา t ใด ๆ ซึ่งก็คือ กาลวิถีของสมการผลต่างสืบเนื่องที่กำหนดนั่นเอง

อนึ่ง ตัวอย่างนี้อาจนำเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์บางประการ โดยเฉพาะเรื่องเกี่ยวกับการวิเคราะห์ตัวทวี (multiplier analysis) ในการใช้จ่ายเพื่อการลงทุน (investment expenditure) มาประยุกต์เปรียบเทียบได้ กล่าวคือ การลงทุนในคาบเวลา 0 จะก่อให้เกิดการเพิ่มขึ้นของรายได้ (income increment) ในปลายคาบเวลานั้น ทั้งนี้ถ้า y คือการเปลี่ยนไปของรายได้ (income increment) และ y_0 คือ จำนวนการลงทุนในคาบเวลา 0 โดยเหตุที่ การเปลี่ยนไปของรายได้ขึ้นอยู่กับความโน้มเอียงของการบริโภค (marginal propensity to consume: MPC) ดังนั้น ถ้า MPC = 0.8 และรายได้ในแต่ละคาบเวลาจะถูกใช้จ่ายไปในคาบเวลาถัดไปเท่านั้น เช่นนี้แล้ว ร้อยละ 80 ของการลงทุน y_0

ก็จะถูกนำใช้ไปใน คาบ 1 (period 1) อันเป็นผลให้รายได้เพิ่มขึ้นใน คาบ 1 เกิดขึ้นเป็นจำนวน $y_1 = 0.8y_0$ ในทำนองเดียวกัน จะได้ $y_2 = 0.8y_1$ และในคาบต่อ ๆ ไปก็จะอยู่ในลักษณะเดียวกันนั่นเอง ซึ่งจะเห็นได้ว่า ผลที่ได้นี้เป็นเช่นเดียวกันกับการพิจารณาโดยวิธีการทำซ้ำของตัวอย่าง 2 ที่พิจารณาแล้วข้างต้น กล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า กระบวนการทวีคูณของวงรอบรายได้ (multiple process of income generation) สามารถที่จะอธิบายได้ด้วยสมการผลต่างสืบเนื่อง ดังเช่นสมการ $y_{t+1} = 0.8y_t$ ได้ และผลเฉลยที่ได้จากสมการดังกล่าว คือ $y_t = (0.8)^t y_0$ ก็จะชี้ชัดให้เห็นว่า จำนวนของการเปลี่ยนไปของรายได้เป็นอย่างไรในคาบเวลา t ใด ๆ นั้น

ตัวอย่าง 7-3: การหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องกรณีเอกพันธ์ โดยวิธีการทำซ้ำ

จงหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องกรณีเอกพันธ์: $my_{t+1} - ny_t = 0$

วิธีทำ:

จาก $$my_{t+1} - ny_t = 0$$

หรือ $$y_{t+1} = \left(\frac{n}{m}\right)y_t$$

จะเห็นได้ว่า รูปสมการในตัวอย่างนี้มีลักษณะทำนองเดียวกันกับสมการใน ตัวอย่าง 7-2 ที่ว่า $y_{t+1} = 0.8y_t$ โดยในที่นี้ $(n/m) = 0.8$ นั่นเอง

ดังนั้นโดยนัยเดียวกัน ผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องนี้ จะคือ:

$$y_t = \left(\frac{n}{m}\right)^t y_0$$

ในที่นี้ ถ้า $(n/m) = b$ และ $y_0 = A$ ก็จะได้ผลเฉลยในลักษณะทั่วไปเป็น:

$$y_t = Ab^t$$

ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) กรณีเอกพันธ์ ที่ว่า: $y(t) = Ae^{-at}$ แล้ว จะพบว่า ผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องกรณีเอกพันธ์ (homogeneous difference equations) ที่ได้นี้: $y_t = Ab^t$ พจน์ของ Ab^t จะมีลักษณะทำนองเดียวกันกับ พจน์ Ae^{-at} ของสมการเชิงอนุพันธ์นั่นเอง เพียงแต่ในสมการผลต่างสืบเนื่องนั้น พจน์ดังกล่าวอยู่ในรูปฐาน b แต่ของสมการเชิงอนุพันธ์พจน์นั้นอยู่ในฐาน e ทั้งนี้ด้วยเหตุว่า กรณีเวลาต่อเนื่อง กาลวิถี $y(t)$ จะขึ้นอยู่กับค่าของ a แต่ถ้าเป็นกรณีเวลาเต็มหน่วย กาลวิถี y_t จะขึ้นอยู่กับค่าของ b

3.2 วิธีมาตรฐานทั่วไป

ด้วยเหตุที่ได้เปรียบเทียบให้ได้ทราบแล้วว่า สมการผลต่างสืบเนื่องมีลักษณะทำนองเดียวกันกับสมการเชิงอนุพันธ์นั่นเอง ดังนั้นการพิจารณาหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องในรูปลักษณะมาตรฐานทั่วไป (general method) ก็จะมีลักษณะแนวคิดและหลักการโดยนัยเดียวกันกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังที่จะได้พิจารณาต่อไปนี้:

ถ้าสมการผลต่างสืบเนื่อง (difference equations) ที่ต้องการจะหาผลเฉลย คือ:

$$y_{t+1} + ay_t = c \qquad : a,c \text{ เป็นค่าคงที่ใด ๆ}$$

ข้อพิจารณา:

ทำนองเดียวกันกับการหาค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ผลเฉลยลักษณะทั่วไป (general solution) ของสมการผลต่างสืบเนื่องนี้ ก็จะประกอบด้วยสองส่วน โดยส่วนหนึ่งได้แก่ อินทิกรัลเฉพาะ[1] (particular integral: y_p) ซึ่งเป็นผลเฉลยเฉพาะใด ๆ ของของสมการไร้เอกพันธ์เต็มรูป (complete nonhomogeneous equation) สำหรับอีกส่วน

[1] ในที่นี้เรียก "อินทิกรัลเฉพาะ" ทั้ง ๆ ที่ไม่มีการอินทิเกรตใด ๆ อยู่เลย ก็เพื่อสดวกต่อการเทียบเคียงกับสมการเชิงอนุพันธ์ที่คุ้นเคยอยู่ก่อนแล้ว แต่ถ้าต้องการจะเรียกให้แตกต่างออกไปเป็น "ผลเฉลยเฉพาะ" (particular solution) ก็ได้เช่นกัน

หนึ่ง คือ ฟังก์ชันเติมเต็ม (complementary function: y_c) ซึ่งก็คือผลเฉลยลักษณะทั่วไปของสมการลดรูป (reduce equation) ที่ว่า:

$$y_{t+1} + ay_t = 0$$

และจากการที่ได้ศึกษาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์มาแล้ว โดยเฉพาะเรื่องเสถียรภาพของดุลยภาพเชิงพลวัตนั้น จะเห็นได้ว่าส่วนของ y_p ที่ต้องการนั้น ที่จริงแล้วก็คือ ระดับดุลยภาพระยะยาว (intertemporal equilibrium) ของ y สำหรับส่วน y_c จะคือ ส่วนเบี่ยงเบนของกาลวิถีจากดุลยภาพ (deviations of the time path from the equilibrium) นั่นเอง

ในขั้นนี้จะพิจารณาหาฟังก์ชันเติมเต็ม: y_c เป็นลำดับแรก แล้วจึงจะพิจารณาหาอินทิกรัลเฉพาะ: y_p ต่อไป อย่างไรก็ตาม จากตัวอย่าง 3 ที่ผ่านมา ซึ่งเป็นตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องกรณีเอกพันธ์ จะได้ผลเฉลยโดยวิธีการทำซ้ำในรูปลักษณะทั่วไปเป็น: $y_t = Ab^t$ (โดยที่ $Ab^t \neq 0$: ไม่เช่นนั้นแล้ว y_t จะกลับกลายเป็นเส้นตรงในแนวนอนที่ทับแกน t) และอาจจะขยายความต่อไปโดยนัยเดียวกันได้ว่า: $y_{t+1} = Ab^{t+1}$ ซึ่งถ้าผลเฉลยของ y_t และ y_{t+1} ดังกล่าวนี้ถูกต้องจริงแล้ว สมการลดรูปหรือสมการเอกพันธ์ที่ว่า:

$$y_{t+1} + ay_t = 0$$

ก็จะเขียนได้เป็น:

$$Ab^{t+1} + aAb^t = 0$$

และแล้ว $\quad b+a = 0 \quad$: หารตลอดด้วย Ab^t

หรือ $\quad b = -a$

นั่นคือ ผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ จะต้องเป็นผลเฉลยที่ให้ค่า $b = -a$ ดังนั้นโดยนัยกลับกัน เมื่อต้องการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ ซึ่งในที่นี้ก็คือ ฟังก์ชันเติมเต็ม y_c ที่กำลังพิจารณาอยู่ ก็จะหาค่าได้โดยการแทนค่า $b = -a$ ในผลเฉลยของสมการเอกพันธ์นั้นนั่นเอง

ดังนั้นจาก $\qquad y_t = Ab^t$

จะได้ฟังก์ชันเติมเต็ม เป็น: $\qquad y_c = A(-a)^t$

ลำดับนี้ เมื่อได้ฟังก์ชันเติมเต็มแล้ว ก็จะดำเนินการหาอินทิกรัลเฉพาะ: y_p ต่อไป ซึ่งได้ทราบแล้วว่าอินทิกรัลเฉพาะนั้น ที่จริงก็คือ ผลเฉลยเฉพาะใด ๆ ของสมการไร้เอกพันธ์เต็มรูป ดังนั้นการหา y_p จึงอาจกระทำได้โดยพิจารณาผลเฉลยเฉพาะของสมการเต็มรูปในลักษณะของค่าคงที่ ดังต่อไปนี้:

ถ้า $\qquad y_t = k \qquad$: y ณ เวลาใด ๆ เท่ากับ k

ดังนั้น $\qquad y_{t+1} = k$

จากสมการเต็มรูป: $\qquad Y_{t+1} \text{ tay}_t = c$

เช่นนี้แล้ว $\qquad k+ak = c \qquad$: แทนค่า y_t และ y_{t+1}

นั่นคือ $\qquad k = \dfrac{c}{tta}$

และจาก $\qquad Y_p = y_t = k$

ฉะนั้น อินทิกรัลเฉพาะ คือ: $\qquad y_p = \dfrac{c}{1+a} \qquad : a \neq -1$ //

ข้อสังเกต:

y_p ที่ได้นี้เป็นค่าคงที่ และหมายถึงดุลยภาพระยะยาว (intertemporal equilibrium) ดังนั้น ดุลยภาพนี้จึงเป็นดุลยภาพแบบคงตัว (stationary equilibrium)

อย่างไรก็ตาม อินทิกรัลเฉพาะที่ได้ข้างต้นนี้ จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อ $a \neq -1$ เท่านั้น ทั้งนี้ก็เพราะว่า ถ้า $a = -1$ แล้ว y_p จะหาค่าไม่ได้ (undefined) ดังนั้น กรณีที่ $a = -1$ จึงจำเป็นที่จะต้องหา y_p จากสมการที่มิใช่ค่าคงที่ (ทำนองเดียวกันกับเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์)

ในที่นี้ ถ้าสมการที่ไม่ใช่ค่าคงที่ คือ: $y_t \;=\; kt$

ดังนั้น $$Y_{t+1} \;=\; k(t+1)$$

จากสมการเต็มรูป: $$Y_{t+1} + ay_t \;=\; c$$

เช่นนี้แล้ว $k(t+1)\ t\ akt \;=\; c$: แทนค่า y_t และ y_{t+1}

หรือ $kt+ktakt \;=\; c$

แต่ $a = -1$: $kttk-kt \;=\; c$

ดังนั้น $$k \;=\; c$$

และจาก $$y_p \;=\; y_t \;=\; kt$$

ฉะนั้น อินทิกรัลเฉพาะกรณีนี้ คือ:

$$y_p \;=\; ct \qquad : a = -1 \;//$$

ข้อสังเกต:

y_p กรณีนี้ $(a = -1)$ มิใช่ค่าคงที่ แต่อยู่ในรูปของเวลา t ดังนั้นดุลยภาพระยะยาว จึงเป็นดุลยภาพสภาพเคลื่อนไหว (moving equilibrium) ที่แปรเปลี่ยนไปตามเวลา

ในที่สุด เมื่อรวมฟังก์ชันเติมเต็มที่ได้มาในชั้นต้นเข้ากับอินทิกรัลเฉพาะของแต่ละกรณีที่ได้มาในที่นี้ ก็จะได้ผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องในรูปทั่วไปของแต่ละกรณี ดังนี้:

กรณี $a \neq -1$: $$y_t \;=\; A(-a)^t\ t\ \frac{c}{1+a}$$

: general solution, case of $a \neq -1$

กรณี $a = -1$: $$y_t \;=\; A(-a)^t\ t\ ct$$

$$=\; A + ct \qquad : a = -1$$

: general solution, case of $a = -1$

และถ้า A มีค่าเฉพาะตัว เพื่อจะสนองเงื่อนไปเบื้องต้น (initial condition) กล่าวคือ เมื่อ t = 0 ก็จะได้ค่าของ A ในรูปของ y_0 และได้ผลเฉลยในรูปเฉพาะกรณี (definite solution) ของแต่ละกรณีเป็นลำดับกันไป ดังนี้:

กรณี $a \neq -1$:

จาก $$y_t = A(-a)^t + \frac{c}{1+a}$$

เมื่อ t = 0: $$y_0 = A + \frac{c}{1+a}$$

ดังนั้น $$y_, = cy_0 - \frac{c}{1+a}](-a)^t + \frac{c}{1ta} \qquad //$$

: definite soiution, case of a ≠ -1

กรณี a = -1:

จาก $$y_t = A + ct$$

เมื่อ t = 0i $$y_0 = A$$

ดังนั้น $$y_t = y_0 + ct \qquad //$$

: definite solution, case of a = -1

อนึ่ง ผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องทุกรูปแบบข้างต้นนี้ สามารถทดสอบความถูกต้อง (validity) ของการตอบสนองเงื่อนไขเบื้องต้น และการยืนยันสมการผลต่างสืบเนื่องดั้งเดิมได้ด้วย ซึ่งการทดสอบดังกล่าวอาจดำเนินการเป็นสองขั้นตอนโดยลำดับ ดังต่อไปนี้:

ขั้นแรก: ทดสอบการสนองตอบเงื่อนไขเบื้องต้น

การทดสอบการสนองตอบเงื่อนไขเบื้องต้น กระทำได้โดยแทนค่า t = 0 ในผลเฉลยเฉพาะกรณีที่ได้ ซึ่งถ้าผลของทางด้านซ้ายมือและด้านขวามีอยู่ในรูป $y_0 = y_0$ ก็แสดงว่าเงื่อนไขเบื้องต้นได้รับการตอบสนองจริง ซึ่งขั้นตอนการดำเนินการอาจจะกระทำได้ ดังนี้:

จากผลเฉลยในรูปเฉพาะกรณี (definite solution) เมื่อ $a \neq -1$:

$$y_t = cy_0 - \frac{c}{lta}](-a)^t \ t \ \frac{c}{lta}$$

เมื่อ t = 0:

$$y_0 = cy_0 - \frac{c}{1+a}](-a)^0 + \frac{c}{lta}$$

$$y_0 = y_0 - \frac{c}{lta} + \frac{c}{lta}$$

ดังนั้น

$$y_0 = y_0$$

ด้านซ้ายมือ = ด้านขวามือ

นั่นคือ ผลเฉลยข้างต้นตอบสนองเงื่อนไขเบื้องต้นจริง ช.ต.พ //

ขั้นสุดท้าย: ทดสอบเพื่อยืนยันสมการผลต่างสืบเนื่องดั่งเดิม

การทดสอบเพื่อยืนยันว่าผลเฉลยที่ได้ เป็นผลเฉลยที่แท้จริงของสมการผลต่างสืบเนื่องที่กำหนดจริงนี้ กระทำได้โดยการแทนค่า y_t และ y_{t+1} ลงในสมการผลต่างสืบเนื่องที่กำหนด ซึ่งถ้าผลของทางด้านซ้ายมือและด้านขวามืออยู่ในรูป c = c ก็แสดงว่า ผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องที่กำหนดจริง ซึ่งการทดสอบอาจดำเนินการได้ ดังนี้:

จากสมการผลต่างสืบเนื่องที่กำหนด:

$$Y_{t+1} \ tay_t = c$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลย ปีน:

$$y_t = cy_0 - \frac{c}{lta}](-a)^t \ t \ \frac{c}{1+a}$$

แล้ว $$Y_{t+1} = [y_0 - \frac{c}{1+a}](-a)^{t+1} + \frac{c}{1+a}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่า y_t และ y_{t+1} ในสมการผลต่างสืบเนื่องที่กำหนด จะได้:

$$[y_0 - \frac{c}{1+a}](-a)^{t+1} + \frac{c}{1+a} + a\{[y_0 - \frac{c}{1+a}](-a)^{t} + \frac{c}{1+a}\} = c$$

$$[y_0 - \frac{c}{1+a}](-a)^{t+1} + \frac{c}{1+a} + a[y_0 - \frac{c}{1+a}](-a)^{t} + a(\frac{c}{1+a}) = c$$

$$[y_0 - \frac{c}{1+a}](-a)^{t+1} + \frac{c}{1+a} - (-a)[y_0 - \frac{c}{1+a}](-a)^{t} + a(\frac{c}{1+a}) = c$$

$$[y_0 - \frac{c}{1+a}](-a)^{t+1} + \frac{c}{1+a} - [y_0 - \frac{c}{1+a}](-a)^{t+1} + a(\frac{c}{1+a}) = c$$

$$\frac{c}{1+a} + a(\frac{c}{1+a}) = c$$

$$\frac{c}{1+a}(1+a) = c$$

$$c = c$$

ด้านซ้ายมือ . = ด้านขวามือ

นั่นคือ ผลเฉลยข้างต้นเป็นผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องที่กำหนดจริง ซ.ต.พ //

ในชั้นนี้ เพื่อให้คุ้นเคยกับการหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่อง ที่ได้พิจารณามาโดยลำดับแล้วนั้น จึงขอยกตัวอย่างประกอบ ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 7-4: การหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องโดยวิธีมาตรฐานทั่วไป

จงหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่อง:

$$y_{t+1} - 3y_t = 1 \qquad \text{เมื่อ} \quad y_0 = \frac{3}{2}$$

วิธีทำ:

จากรูปมาตรฐานทั่วไปของสมการผลต่างสืบเนื่อง:

$$y_{t+1} + ay_t = c$$

จะได้ผลเฉลยในรูปทั่วไป ซึ่งประกอบด้วยฟังก์ชันเติมเต็มและอินทิกรัลเฉพาะ เป็น:

$$y_t = y_c + y_p$$

ซึ่งฟังก์ชันเติมเต็ม จะหาได้จากผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ (สมการลดรูป) ที่ว่า:

$$y_{t+1} + ay_t = 0$$

โดยที่ $$y_t = Ab^t$$

และ $$y_{t+1} = Ab^{t+1}$$

ในที่นี้ สมการผลต่างสืบเนื่องที่กำหนด คือ:

$$y_{t+1} - 3y_t = 1$$

ดังนั้น สมการเอกพันธ์ ก็คือ:

$$y_{t+1} - 3y_t = 0$$

ฉะนั้น $$Ab^{t+1} - 3Ab^t = 0$$: แทนค่า y_{t+1} และ y_t

หรือ $$Ab^t(b - 3) = 0$$

นั่นคือ $$b = 3$$: $Ab^t \neq 0$

แต่จาก $$y_t = Ab^t$$

ฉะนั้น ฟังก์ชันเติมเต็มที่ต้องการ ก็คือ:

$$y_c = A(3)^t \qquad ; b = 3 \text{ //}$$

สำหรับอินทิกรัลเฉพาะ จะหาได้จากสมการเต็มรูปที่อยู่ในรูปของค่าคงที่ได้ ทั้งนี้เพราะว่า $a = -3$ นั่นคือ $a \neq -1$ ซึ่งสมการค่าคงที่นี้ คือ:

$$y_t = k \qquad ; y \text{ ณ เวลาใด ๆ เท่ากับ } k$$

แล้ว $$y_{t+1} = k \qquad ; k = \text{ค่าคงที่ใด ๆ}$$

ดังนั้น จากสมการเต็มรูป:

$$Y_{t+1} - 3y_t = 1$$

จะได้ $$k - 3k = 1 \qquad ; \text{แทนค่า } y_{t+1} \text{ และ } y_t$$

หรือ $$k = -\frac{1}{2}$$

แต่จาก $$y_t = k$$

ฉะนั้น อินทิกรัลเฉพาะที่ต้องการ ก็คือ:

$$y_p = -\frac{1}{2} \qquad ; y_p = y_t = k \text{ //}$$

ในที่สุด เมื่อรวมฟังก์ชันเติมเต็มเข้ากับอินทิกรัลเฉพาะ จะได้ผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องที่กำหนด ในรูปลักษณะทั่วไป (general solution) เป็น:

$$y_t = y_c + y_p$$

$$= A(3)^t - \frac{1}{2} \qquad : \text{แทนค่า } y_c \text{ และ } y_p$$

และเมื่อ $t = 0$ จะได้:

$$y_0 = A - \frac{1}{2}$$

หรือ $$A = y_0 + \frac{1}{2}$$

แต่ $y_0 = \frac{3}{2}$:

ดังนั้น $$A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 2$$

ฉะนั้น ผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องในรูปเฉพาะกรณี (definite solution) ตามสมการที่กำหนด ก็คือ:

$$y_t = 2(3)^t - \frac{1}{2}$$

ตอบ //

อนึ่ง การหาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องข้างต้นนี้ สามารถที่จะดำเนินการโดยรูปแบบสำเร็จตามมาตรฐานทั่วไปได้อีกโสตหนึ่ง ดังต่อไปนี้:

จากรูปมาตรฐานทั่วไปของสมการผลต่างสืบเนื่อง:

$$y_{t+1} + ay_t = c$$

จะได้ผลเฉลยในรูปเฉพาะกรณี (definite solution) เมื่อ $a \neq -1$ เป็น:

$$y_t = [y_0 - \frac{c}{1+a}](-a)^t + \frac{c}{1+a}$$

ในที่นี้ สมการผลต่างสืบเนื่องที่กำหนด คือ:

$$y_{t+1} - 3y_t = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการมาตรฐานทั่วไปแล้ว จะพบว่า:

$$a = -3$$

$$c = 1$$

และ $$y_0 = \frac{3}{2}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องในรูปเฉพาะกรณี (definite solution) ตามสมการที่กำหนด ก็คือ:

$$y_t = [\frac{3}{2} - \frac{1}{1-3}](3)^t + \frac{1}{1-3}$$

$$= 2(3)^t - \frac{1}{2}$$ ตอบ //

จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องที่หาโดยรูปแบบสำเร็จนี้ จะได้ผลเฉลยเช่นเดียวกันกับผลเฉลยที่หาได้จากสมการที่กำหนดโดยตรงเช่นกัน

ข้อสังเกต:

สมการผลต่างสืบเนื่องมาตรฐานที่สร้างขึ้นนี้ สร้างในรูปแบบที่สัมประสิทธิ์ของ y_{t+1} เป็น "หนึ่ง" เท่านั้น ดังนั้น การที่จะนำรูปแบบผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องมาตรฐานนี้

ไปใช้หาผลเฉลยของสมการผลต่างสืบเนื่องใด ๆ จึงจำเป็นจะต้องแปลงสัมประสิทธิ์ของ y_{t+1} ของสมการที่กำหนดนั้น ให้เป็นหนึ่งเช่นเดียวกันเสียก่อนเสมอ

4. เสถียรภาพเชิงพลวัตของดุลยภาพ

จากการที่ได้พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) อันเป็นเรื่องเกี่ยวกับการวิเคราะห์ในลักษณะของเวลาต่อเนื่อง (continuous time) มาแล้ว ได้พบว่าเสถียรภาพเชิงพลวัตของดุลยภาพ (dynamic stability of equilibrium) จะขึ้นอยู่กับพจน์ "Ae^{rt}" ($r = -a$ หรือ $r = -\int u dt$ แล้วแต่กรณี) ซึ่งเป็นฟังก์ชันเติมเต็ม (complementary function: y_c) สำหรับในที่นี้นั้น สมการผลต่างสืบเนื่อง (difference equations) อันเป็นเรื่องเกี่ยวกับการวิเคราะห์เรื่องราวต่าง ๆ ในรูปลักษณะของเวลาเต็มหน่วย (discrete time) เสถียรภาพเชิงพลวัตของดุลยภาพ จะขึ้นอยู่กับพจน์ "Ab^t" ซึ่งเป็นส่วนของฟังก์ชันเติมเต็ม (complementary function: y_c) เป็นสำคัญ ดังนั้น เพื่อความเข้าใจที่ชัดเจนจะขอขยายความต่อไปเป็นลำดับ ดังต่อไปนี้:

4.1 สาระสำคัญของ "b"

โดยปกติแล้ว ดุลยภาพของกาลวิถีจะมีเสถียรภาพเชิงพลวัตหรือไม่ ก็ขึ้นอยู่กับว่า เมื่อ t เพิ่มขึ้นตลอดไป: $t \to \infty$ แล้ว ฟังก์ชันเติมเต็ม: y_c จะมีแนวโน้มเข้าใกล้ศูนย์หรือไม่ แต่ด้วยเหตุที่ฟังก์ชันเติมเต็มมีองค์ประกอบที่สำคัญอยู่ที่พจน์ของ Ab^t ดังนั้น พจน์ Ab^t จึงเป็นตัวกำหนดแนวโน้มดังกล่าวนั้น และด้วยเหตุที่พจน์ Ab^t จะมีแนวโน้มอย่างไรเมื่อ t เพิ่มขึ้นตลอดไปนั้น ก็ขึ้นอยู่กับค่าของ b เป็นสำคัญตัวหนึ่ง ฉะนั้นจึงเป็นความจำเป็นที่จะต้องพิจารณาบทบาทของ b ที่มีต่อแนวโน้มดังกล่าวให้เด่นชัดต่อไป

ในการวิเคราะห์นี้ จะขอแบ่งช่วงค่าของ b ซึ่งมีค่าที่เป็นไปได้ ตั้งแต่ $-\infty$ ถึง $+\infty$ ออกเป็น 7 ช่วงเขตค่า (regions) ด้วยกัน ซึ่งแต่ละช่วงเขตค่าก็จะให้ค่าของ b^t ไปตามค่าของ t แต่ละช่วงเวลาแตกต่างกันไป ดังตารางต่อไปนี้: