ขั้นที่สอง: ถอดสมการหาค่า $\psi(t)$ จากสมการดั้งเดิม $F(y,t)$ โดยผ่าน N

จาก $$F(y,t) = 3ty - y^2 t \psi(t)$$

เมื่อหาอนุพันธ์มุ่งต่อ t จะได้:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 3y\ t\ \psi'(t) \qquad : \psi'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\psi(t)$$

แต่ $$\frac{\partial F}{\partial t} = N$$

ดังนั้น $$N = 3y\ t\ \psi'(t) \qquad //$$

และโดยเหตุที่ $$N = 2t + 3y \qquad //$$

เช่นนี้แล้ว $$2t + 3y = 3y\ t\ \psi'(t)$$

ฉะนั้น $$\psi'(t) = 2t$$

และเมื่ออินทิเกรตมุ่งต่อ t จะได้:

$$\psi(t) = \int \psi'(t)dt$$

$$= \int 2t dt \qquad : \psi'(t) = 2t$$

$$= t^2 \qquad : \text{ละค่าคงที่}$$

ข้อสังเกต: $\psi(t)$ ที่ได้ในที่นี้ อยู่ในรูปตัวแปร t (ต่างจากตัวอย่าง 6.5 ซึ่งเป็นค่าคงที่)

ขั้นที่สาม: ถอดหาค่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่ต้องการ โดยการแทนค่า $\psi(t)$ ที่ได้จากขั้นที่สอง ลงในสมการดั้งเดิม $F(y,t)$ ที่ได้มาจากขั้นที่หนึ่ง

จาก $$F(y,t) = 3ty - y^2 + \psi(t)$$

แทนค่า $\psi(t)$ ที่ได้จากขั้นที่สอง:

$$F(y,t) = 3ty - y^2 \cdot t\ t^2 \qquad ;\ t^2 = \psi(t)$$

แต่ด้วยเหตุที่ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แท้ คือ:

$$F(y,t) = c$$

ดังนั้น ค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ต้องการ คือ:

$$3ty - y^2 + t^2 = c$$ ตอบ //

ในชั้นนี้ ถ้าหากต้องการจะทดสอบดูว่าผลเฉลยนี้ถูกต้องหรือไม่ ก็อาจจะกระทำได้โดยหาอนุพันธ์รวม (total differential) ของผลเฉลยข้างต้น แล้วพิจารณาดูว่าเป็นเช่นเดียวกันกับสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดหรือไม่ก็ได้ ซึ่งถ้าดำเนินการก็สามารถกระทำได้ ดังต่อไปนี้:

จากผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์:

$$3ty - y^2 + t^2 = c$$

ซึ่งเมื่อหาอนุพันธ์รวม จะได้:

$$(3t - 2y)dy \ t \ (3y \ t \ 2t)dt = 0$$

จะเห็นได้ว่า อนุพันธ์รวมนี้เป็นเช่นเดียวกันกับสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนด ดังนั้นจึงยืนยันได้ว่า ผลเฉลยที่ได้นั้นเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดโดยแท้จริง

ซ.ต.พ. //

อนึ่ง ลำดับขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้แสดงมาโดยลำดับแล้วนั้น เป็นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้เท่านั้น อย่างไรก็ตาม วิธีการดังกล่าว ก็อาจนำมาประยุกต์ใช้กับการหาผลเฉลยของสมการที่มิใช่สมการเชิงอนุพันธ์แท้ก็ได้ ทั้งนี้เพียงแต่จะต้องมีการปรับปรุงให้สมการที่ต้องการหาค่านั้น เปลี่ยนไปเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้ โดยการถ่วงน้ำหนักด้วย "ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต" (integrating factor) เสียก่อนเท่านั้น ซึ่งจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 6.7: ตัวอย่างการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์แท้

สมมุติว่า สมการเชิงอนุพันธ์ คือ:

$$2tdy \ t \ ydt = 0$$

ถ้า $M = 2t$ แล้ว $\dfrac{\partial M}{\partial t} = 2$

และถ้า $N = y$ แล้ว $\dfrac{\partial N}{\partial y} \quad 1$

เช่นนี้แล้ว $\dfrac{\partial M}{\partial t} \neq \dfrac{\partial N}{\partial y}$

นั่นคือ สมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้นไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์แท้

อย่างไรก็ตาม ถ้าคูณทุกพจน์ของสมการข้างต้นนี้ด้วย y จะได้:

$$2ytdy + y^2dt = 0$$

ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้นนี้ ก็คือ สมการเชิงอนุพันธ์แท้ ดังเช่นสมการเชิงอนุพันธ์แท้ในตัวอย่าง 6.5 ในเรื่องนี้นั่นเอง ดังนั้น y ในตัวอย่างนี้ จึงคือ ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต ซึ่งทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้นนั้นเปลี่ยนไปเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้นั่นเอง เช่นนี้แล้ว ก็จะสามารถดำเนินการหาผลเฉลยของสมการต่อไปได้ดังเช่นตัวอย่าง 6.5 ที่ได้กล่าวมาแล้ว

อย่างไรก็ตาม ตัวอย่างข้างต้นนี้ เป็นกรณีที่ทราบตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตอยู่แต่เดิมแล้ว แต่ถึงแม้จะยังไม่ทราบตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตมาแต่เดิม ก็จะสามารถหาได้เช่นเดียวกัน ดังที่จะได้แสดงวิธีการได้มาของตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตในลักษณะทั่วไป ดังต่อไปนี้:

การหาตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต (integrating factor)

จากสมการเชิงอนุพันธ์ลักษณะมาตรฐานทั่วไป:

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t) \qquad : w(t) \neq 0$$

หรือ $$dy + (uy - w)dt = 0$$

สมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้นนี้ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้หรือไม่นั้นไม่ทราบ แต่เมื่อถ่วงน้ำหนัก (คูณทุกพจน์) ด้วยตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต (integrating factor) แล้ว สมการจะเปลี่ยนไปเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้

ในที่นี้ สมมุติว่า I คือ ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต ซึ่งอยู่ในรูปของ t : $I = I(t)$ ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์แท้ ก็จะคือ:

$$Idy + I(uy - w)dt = 0$$

ทั้งนี้ $M = I$

และ $N = I(uy - w)$

แต่เมื่อเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้ ก็จะต้องมีคุณสมบัติเป็น:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} \qquad //$$

ซึ่งในที่นี้: $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial t}$: I เป็นฟังก์ชันของ t เท่านั้น

และ $\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[I(uy - w)]$

$= Iu$: I,u,w เป็นฟังก์ชันของ t เท่านั้น

เช่นนี้แล้ว เมื่อแทนค่าในคุณสมบัติดังกล่าว จะได้:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = Iu$$

หรือ $\frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial t} = u$ //

สมการข้างต้นนี้ แท้ที่จริงแล้วก็มีลักษณะเช่นเดียวกันกับสมการเชิงอนุพันธ์กรณีเอกพันธ์ที่ได้กล่าวผ่านมาแล้ว ซึ่งมีลักษณะมาตรฐานทั่วไปเป็น:

$$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial t} = -u(t)$$

โดยมีผลเฉลยในรูปทั่วไป เป็น:

$$y(t) = Ae^{-\int u(t)dt}$$

ดังนั้นโดยนัยเดียวกัน ผลเฉลยของ I ที่ต้องการ ก็อาจจะพิจารณาเปรียบเทียบได้เป็น:

$$I(t) = Ae^{\int u dt} \qquad ; \quad u = u(t)$$

อย่างไรก็ตาม ค่าคงที่ A สามารถเทียบค่าเป็น 1 ได้ โดยไม่มีผลต่อหน้าที่ของ I ในอันที่จะเป็นตัวถ่วงน้ำหนักเพื่อการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์แท้แต่ประการใด ดังนั้น $e^{\int u dt}$ จึงถือได้ว่าเป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต (integrating factor) ในลักษณะมาตรฐานทั่วไปที่ต้องการนั่นเอง

ในที่นี้ เมื่อทราบแล้วว่าตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตจะอยู่ในรูปของ $e^{\int u dt}$ ดังนั้น เมื่อต้องการที่จะแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ใด ๆ ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้ ก็อาจจะกระทำได้โดยง่าย เพียงแต่นำตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต $e^{\int u dt}$ นี้ ถ่วงน้ำหนัก (คูณทุกพจน์) เข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำลังพิจารณาอยู่เท่านั้น ก็จะได้สมการเชิงอนุพันธ์แท้ดังต้องการ และในที่สุด ก็จะสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวได้โดยง่าย โดยผ่านคุณสมบัติ และวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แท้ ดังที่ได้แสดงโดยละเอียดเป็นลำดับขั้นตอนมาแล้ว

ในที่สุดนี้ เมื่อได้ทราบวิธีการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ใด ๆ ให้เปลี่ยนไปเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้นี้แล้ว ผนวกกับได้ทราบคุณสมบัติ และวิธีการหาค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แท้ดังกล่าวด้วย ดังนั้น การที่จะหาผลเฉลยหรือกาลวิถีของสมการเชิงอนุพันธ์กรณีไร้เอกพันธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น ในกรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นตัวแปร และค่าสมการเป็นตัวแปรด้วย (first-order linear differential equations with variable coefficient and variable term) ที่ได้พิจารณามาโดยลำดับนี้ ก็สามารถกระทำได้โดยตลอด ดังต่อไปนี้:

การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ กรณีไร้เอกพันธ์:

จากสมการเชิงอนุพันธ์ กรณีไร้เอกพันธ์ ซึ่งมีลักษณะมาตรฐานทั่วไป เป็น:

$$\frac{dy}{dt} + uy = w \qquad : u, w \text{ เป็นฟังก์ชันของ } t$$

หรืออาจเขียนเป็น:

$$dy + (uy - w)dt = 0$$

เมื่อคูณทุกพจน์ด้วยตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต $e^{\int u dt}$ แล้ว จะได้สมการเชิงอนุพันธ์แท้เป็น:

$$e^{\int u dt} dy + e^{\int u dt}(uy - w)dt = 0$$

ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับสมการเชิงอนุพันธ์แท้ลักษณะมาตรฐานทั่วไป ที่ว่า:

$$Mdy + Ndt = 0$$

จะพบว่า:

$$M = e^{\int u dt}$$

และ $$N = e^{\int u dt}(uy - w)$$

ดังนั้น การหาค่าผลเฉลยก็จะสามารถดำเนินการเป็นลำดับขั้นตอนได้ ดังต่อไปนี้:

ขั้นที่หนึ่ง: ดำเนินการหาสมการดั้งเดิม $F(y,t)$ จาก M

จาก $$\frac{\partial F}{\partial y} = M = e^{\int u dt}$$

เมื่ออินทิเกรตมุ่งต่อ y จะได้สมการดั้งเดิม:

$$F(y,t) = \int e^{\int u dt} dy + \psi(t)$$

$$= e^{\int u dt} \int dy \ t \ \psi(t) \qquad : u \text{ ไม่ขึ้นกับ } Y$$

$$= ye^{\int u dt} \ t \ \psi(t)$$

ขั้นที่สอง: ถอดสมการหาค่า $\psi(t)$ จากสมการดั้งเดิม $F(y,t)$ โดยผ่าน N

จาก $$F(y,t) = ye^{Iudt} \ t \ \psi(t)$$

เมื่อหาอนุพันธ์มุ่งต่อ t จะได้:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = we^{\int u dt} \ t \ \psi'(t)$$

แต่ $$\frac{\partial F}{\partial t} = N$$

ดังนั้น $$N = yue^{\int u dt} \ t \ \psi'(t) \qquad //$$

และโดยเหตุที่ $$N = e^{\int u dt}(uy - w) \qquad //$$

เช่นนี้แล้ว $$e^{\int u dt}(uy - w) = yue^{\int u dt} \ t \ \psi'(t)$$

ฉะนั้น $$\psi'(t) = e^{\int u dt}(uy - w) - yue^{\int u dt}$$

$$= uye^{\int u dt} - we^{\int u dt} - yue^{\int u dt}$$

$$= -we^{\int u dt}$$

และเมื่ออินทิเกรตมุ่งต่อ t จะได้:

$$\psi(t) = -\int we^{\int u dt} dt$$

ขั้นที่สาม: ถอดหาค่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่ต้องการ โดยการแทนค่า $\psi(t)$ ที่ได้จากขั้นที่สอง ลงในสมการดั้งเดิม $F(y,t)$ ที่ได้มาจากขั้นที่หนึ่ง

จาก

$$F(y,t) = ye^{\int u dt} + \psi(t)$$

แทนค่า $\psi(t)$ ที่ได้จากขั้นที่สอง:

$$F(y,t) = ye^{\int u dt} - \int we^{\int u dt} dt$$

แต่ด้วยเหตุที่ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แท้ คือ:

$$F(y,t) = c$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แท้ที่ต้องการ คือ:

$$ye^{\int u dt} - \int we^{\int u dt} dt = c$$

หรือ

$$y(t) = e^{-\int u dt} (c + \int we^{\int u dt} dt)$$

และเมื่อแทนค่าคงที่ c ด้วย A ซึ่งเป็นค่าคงที่ใด ๆ ของกาลวิถีแล้ว จะได้:

$$y(t) \;=\; e^{-\int u\,dt}\,(A + \int w e^{\int u\,dt}\,dt) \qquad //$$

ผลเฉลยสุดท้ายนี้คือ ผลเฉลยทั่วไป (general solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์แท้กรณีไร้เอกพันธ์ที่กำลังพิจารณาอยู่ อย่างไรก็ตาม แท้ที่จริงแล้วผลเฉลยนี้ก็คือ ผลเฉลยลักษณะทั่วไปของ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น (first-order linear differential equations) ของทุกลักษณะกรณีนั่นเอง กล่าวคือ รูปแบบผลเฉลยของสมการข้างต้นนี้สามารถใช้ได้กับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น ซึ่งมีลักษณะของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่ หรือเป็นตัวแปรก็ได้ และสมการนั้นจะมีค่าสมการเป็นค่าคงที่ หรือเป็นตัวแปรก็ได้ด้วยเช่นกัน และที่สุด แม้จะเป็นกรณีเอกพันธ์หรือเป็นกรณีไร้เอกพันธ์ก็สามารถใช้ได้ดุจเดียวกัน

อนึ่ง ลักษณะผลเฉลยข้างต้นเป็นรูปแบบของผลเฉลยทั่วไป (general solution) ซึ่งถ้าได้ทราบเงื่อนไขเบื้องต้น (initial condition) เพิ่มเติมเข้ามา ก็จะทำให้สามารถหาผลเฉลยในรูปแบบเฉพาะกรณี (definite solution) ในลำดับต่อไปได้

ท้ายสุดนี้ เพื่อก่อให้เกิดความเข้าใจและคุ้นเคยกับการนำรูปแบบผลเฉลยข้างต้นไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้นดังกล่าว จึงขอแสดงตัวอย่างการนำไปใช้ ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 6.8: การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ: $\dfrac{dy}{dt} + 2ty \;=\; t$

วิธีทำ:

จากรูปมาตรฐานทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น:

$$\frac{dy}{dt} + uy = w$$

จะได้ผลเฉลยทั่วไป (general solution) เป็น:

$$y(t) = e^{-\int udt} (A + \underset{I}{} we^{\int udt} dt)$$

ในที่นี้ สมการที่กำหนด คือ:

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = t$$

ดังนั้น $u = 2t$

และ $w = t$

ฉะนั้น $\int udt = t^2 + k$: k = ค่าคงที่

เช่นนี้แล้ว เมื่อแทนค่าในผลเฉลยทั่วไป จะได้:

$$y(t) = e^{-(t^2+k)} CA \quad t\int te^{(t^2+k)} dt]$$

$$= e^{-t^2} e^{-k} (A + \int te^{t^2} e^{k} dt)$$

$$= e^{-t^2} e^{-k} (A\ t\ e^{k} \int te^{t^2} dt)$$

$$y(t) = Ae^{-t^2}e^{-k} + e^{-t^2}\int te^{t^2}dt$$

$$= Ae^{-t^2}e^{-k} + e^{-t^2}(\frac{1}{2}e^{t^2} + c)$$

$$= Ae^{-t^2}e^{-k} + \frac{1}{2} + e^{-t^2}c$$

$$= (Ae^{-k} + c)e^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

$$= Be^{-t^2} + \frac{1}{2} \qquad : B = Ae^{-k} + c$$

ผลเฉลยข้างต้นนี้คือ ผลเฉลยหรือกาลวิธีของสมการที่กำหนดดังต้องการ ตอบ //

ตัวอย่าง 6.9: การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ กรณีละค่าคงที่ของการอินทิเกรต

จงหาผลเฉลยของสมการ: $\frac{dy}{dt} + 4ty = 4t$

วิธีทำ:

จากรูปมาตรฐานทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น:

$$\frac{dy}{dt} + uy = w$$

จะได้ผลเฉลยทั่วไป (general solution) เป็น:

$$y(t) = e^{-\int u dt}(A + \int we^{\int u dt}dt)$$

ในที่นี้ สมการที่กำหนด คือ:

$$\frac{dy}{dt} \quad t \quad 4ty = 4t$$

ดังนั้น $u = 4t$

และ $w = 4t$

ฉะนั้น $\int u dt = 2t^2$: ละค่าคงที่

เช่นนี้แล้ว เมื่อแทนค่าในผลเฉลยทั่วไป จะได้:

$$y(t) = e^{-2t^2} (A \quad t \int 4te^{2t^2} dt \quad)$$

$$= e^{-2t^2} \quad CA \quad t \quad I \quad \frac{4t}{4t} e^{2t^2} \; d(2t^2)]$$

$$= e^{-2t^2} \; CA \quad t \int e^{2t^2} \; d(2t^2) \; 1$$

$$= e^{-2t^2} (A \; t \; e^{2t^2}) \qquad : \text{ละค่าคงที่}$$

$$= Ae^{-2t^2} + Ae^{-2t^2} e^{2t^2}$$

$$= Ae^{-2t^2} + 1 \qquad : e^{-2t^2} e^{2t^2} = 1$$

ผลเฉลยข้างต้นนี้คือ ผลเฉลยหรือกาลวิธีของสมการที่กำหนดดังต้องการ

ตอบ //

ข้อสังเกต: เมื่อละค่าคงที่ของการอินทิเกรต จะทำให้การหาค่าผลเฉลยอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น

ตัวอย่าง 6.10: การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ กรณีที่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรและค่าสมการเป็นค่าคงที่

จงหาผลเฉลยของสมการ: $\frac{dy}{dt} + ay = b$

วิธีทำ:

จากรูปมาตรฐานทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น:

$$\frac{dy}{dt} + uy = w$$

จะได้ผลเฉลยทั่วไป (general solution) เป็น:

$$y(t) = e^{-\int udt}(A + \int we^{\int udt}dt)$$

ในที่นี้ สมการที่กำหนด คือ:

$$\frac{dy}{dt} + ay = b$$

ดังนั้น $u = a$

และ $w = b$

ฉะนั้น $\int udt = at$: ลดค่าคงที่

เช่นนี้แล้ว เมื่อแทนค่าในผลเฉลยทั่วไป จะได้:

$$y(t) = e^{-at}(A + \int be^{at}dt)$$

$$y(t) = e^{-at}\left[A + \int \frac{b}{a}e^{at}\, d(at)\right]$$

$$= e^{-at}\left[A + \frac{b}{a}e^{at}\right] \qquad ; \text{ ละค่าคงที่}$$

$$= Ae^{-at} + \frac{b}{a} \qquad ; \text{ general solution}$$

ถ้า "A" มีค่าเฉพาะตัว โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ A ตอบสนองต่อเงื่อนไขเบื้องต้น (initial condition) นั่นคือ เมื่อ $t = 0$ จะได้ค่าของ A ดังนี้:

จาก $$y(t) = Ae^{-at} + \frac{b}{a}$$

เมื่อ $$y(0) = Ae^{0} + \frac{b}{a}$$

$$= A + \frac{b}{a}$$

และแล้ว $$A = y(0) - \frac{b}{a}$$

ดังนั้น $$y(t) = \left[y(0) - \frac{b}{a}\right]e^{-at} + \frac{b}{a}$$

; definite solution

ผลเฉลยข้างต้นนี้ แท้ที่จริงแล้วก็คือ ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น เมื่อสัมประสิทธิ์ของตัวแปรและค่าของสมการเป็นค่าคงที่ กรณีไร้เอกพันธ์ ซึ่งได้เคยพิจารณามาก่อนหน้านี้แล้ว (หัวข้อ 2.2)

3.3 การประยุกต์ในทางเศรษฐศาสตร์บางประการ

ในลำดับนี้ เมื่อได้เข้าใจเรื่องเกี่ยวกับการหาผลเฉลยหรือกาลวิถีของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้นนี้แล้ว จึงขอแสดงวิธีการประยุกต์ใช้สมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวกับเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์ต่อไป ซึ่งในที่นี้จะขอเสนอวิธีการประยุกต์เรื่องเกี่ยวกับการวิเคราะห์ความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ ในรูปแบบจำลองของท่านโดมาร์ (Domar growth model) ซึ่งได้เคยวิเคราะห์มาแล้วในลักษณะที่ความโน้มเอียงในการออม (margimal propensity to save: s) และอัตราสมรรถภาพต่อทุน (capacity-capital ratio: ρ) เป็นค่าคงที่ แต่ในลำดับนี้ จะวิเคราะห์ในอีกลักษณะหนึ่ง ซึ่งเป็นลักษณะที่ข้อมูลดังกล่าวทั้งสองมิใช่ค่าคงที่ แต่เป็นฟังก์ชันของเวลา (t)

จากหลักพื้นฐานแนวคิดการวิเคราะห์ ความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ ในรูปแบบลักษณะการจำลองของท่านโดมาร์ ซึ่งได้แสดงโดยละเอียดไว้แล้วในบทก่อน อาจสรุปได้ว่า ปัญหาการวิเคราะห์ความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ ก็คือ การหารูปแบบกาลวิถีของกระแสการลงทุนอันเหมาะสมที่จะดำรงดุลยภาพของระบบเศรษฐกิจไว้ตลอดไป ซึ่งเงื่อนไขความสัมพันธ์ของกระแสการลงทุนกับเวลาที่จะดำรงดุลยภาพดังกล่าว เมื่อความโน้มเอียงในการออม และอัตราสมรรถภาพต่อทุนเป็นค่าคงที่ จะแสดงได้ด้วยสมการต่อไปนี้:

ดุลยภาพของระบบเศรษฐกิจ:

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = \rho s$$

โดยที่:

I(t) หมายถึง อัตรากระแสการลงทุน (rate of investment flow)

s หมายถึง ความโน้มเอียงในการออม (marginal propensity to save)

ρ หมายถึง อัตราสมรรถภาพต่อทุน (capacity-capital ratio)

t หมายถึง เวลา (time)

และที่สุดแล้ว จะได้กาลวิถีของกระแสการลงทุนที่จะดำรงดุลยภาพของระบบเศรษฐกิจไว้ตลอดกาลเป็น:

$$I(t) = Ae^{\rho st}$$

อย่างไรก็ตาม ดังได้กล่าวแล้วว่าในที่นี้จะวิเคราะห์ในอีกลักษณะหนึ่ง ซึ่งเป็นกรณีที่ความโน้มเอียงในการออมและอัตราสมรรถภาพต่อทุนเป็นฟังก์ชันของเวลา ซึ่งการวิเคราะห์ลักษณะนี้ก็จะได้เงื่อนไขความสัมพันธ์ของกระแสการลงทุนกับเวลา (ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์) ในทำนองเดียวกัน ได้เป็น:

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = \rho(t)s(t)$$

ในที่นี้:

$s(t)$ หมายถึง ความโน้มเอียงในการออม ซึ่งขึ้นอยู่กับเวลา

$\rho(t)$ หมายถึง อัตราสมรรถภาพต่อทุน ซึ่งขึ้นอยู่กับเวลาเช่นกัน

หรืออาจแสดงสมการในอีกรูปลักษณะหนึ่ง ได้เป็น:

$$\frac{dI}{dt} - \rho(t)s(t)I = 0$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าสมการข้างต้นนี้ ก็คือ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น (first-order linear differential equations) นั่นเอง และเมื่อได้เปรียบเทียบกับรูปแบบมาตรฐานทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น ที่ว่า:

$$\frac{dy}{dt} + uy = w$$

ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไป (general solution) เป็น:

$$y(t) = e^{-\int udt} (A + \int we^{\int udt} dt)$$

จะพบว่า: $y = I$

$u = -\rho(t)s(t)$

และ $w = 0$

ดังนั้น $\int udt = \int -\rho(t)s(t)dt$

เช่นนี้แล้ว เมื่อแทนค่าในผลเฉลยทั่วไป จะได้:

$$I(t) = e^{-\int -\rho(t)s(t)} (A + \int 0dt)$$

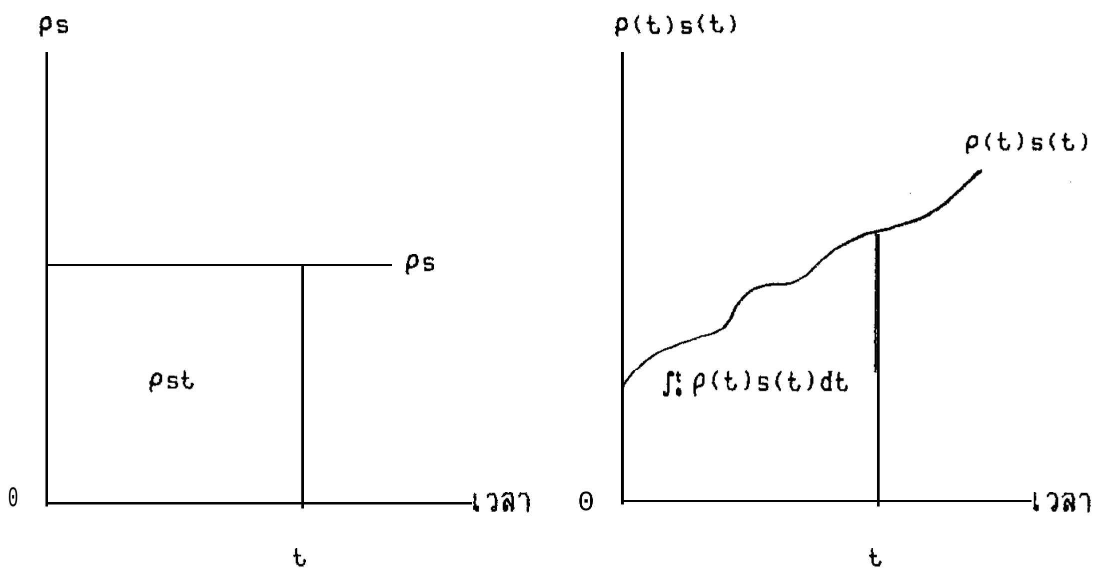
$$= e^{\int \rho(t)s(t)}(A + k) \quad : \int 0dt = k$$

$$= Ae^{\int \rho(t)s(t)} \quad : k \text{ รวมเข้ากับ } A$$

สมการข้างต้นนี้ก็คือ กาลวิถีของกระแสการลงทุน ที่จะดำรงดุลยภาพของระบบเศรษฐกิจไว้ตลอดกาลดังต้องการนั่นเอง ซึ่งจะเห็นได้ว่าการหากาลวิถีดังกล่าวนี้สามารถกระทำได้โดยง่ายและกระชับรวดเร็ว เมื่อได้ทราบวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์มาก่อน

อนึ่ง สมการสุดท้ายนี้แสดงถึงกาลวิถีของกระแสการลงทุนที่เหมาะสม เพื่อที่จะดำรงดุลยภาพของระบบเศรษฐกิจไว้ตลอดไป ทำนองเดียวกันกับกาลวิถีของกระแสการลงทุน กรณีที่ ρ และ s เป็นค่าคงที่นั่นเอง จะแตกต่างกันก็แต่เพียง ในที่นี้ ρ และ s อยู่ในรูปของ t เท่านั้น ซึ่งเป็นผลให้พจน์ของ e อยู่ในรูปการยกกำลังของ $\int\rho(t)s(t)dt$ แทนที่จะเป็น ρst ดังเช่นที่ผ่านมา ซึ่งความแตกต่างนี้จะเห็นได้จากรูป 6-3 ต่อไปนี้:

รูป 6-3: ภาพกราฟพจน์ยกกำลังของ e



(ก) (ข)

รูป (ก) เป็นกรณีที่ ρ และ s เป็นค่าคงที่ ซึ่งผลคูณของ ρst คือ พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าใต้เส้น ρs ตั้งแต่เวลาเริ่มต้น 0 ถึงเวลา t ใด ๆ นั่นเอง สำหรับกรณีที่ ρ และ s ไม่ใช่ค่าคงที่ แต่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ t เส้น $\rho(t)s(t)$ ก็จะไม่ใช่เส้นตรง ดังรูป (ข) ข้างต้นนั้น ซึ่งกรณีเช่นนี้ พื้นที่ใต้โค้งจะหาได้จากค่าอินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral) นั่นเอง อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่า ρ และ s จะอยู่ในรูปค่าคงที่ อินทิกรัลจำกัดเขตดังกล่าวก็ยังคงใช้อธิบายได้ ทั้งนี้เพราะ เมื่อ ρ และ s เป็นค่าคงที่ อินทิกรัล: $\int_0^t \rho s dt$ จะเท่ากับ ρst พอดี

ในที่นี้ ถ้าให้ ρ และ s ซึ่งอยู่ในรูปฟังก์ชันของ t คือ $\rho(t) = at$ และ $s(t) = bt$ เช่นนี้แล้ว พจน์ของ e ยกกำลัง ก็คือ:

$$\int \rho(t)s(t)dt = \int abt^2 dt$$

$$\int \rho(t)s(t)dt = \frac{1}{3}abt^3 \qquad : \text{ละค่าคงที่}$$

ดังนั้น กาลวิถีของกระแสการลงทุน ก็จะคือ:

$$I(t) = Ae^{\frac{1}{3}abt^3} \qquad : \text{รูปทั่วไป}$$

และเมื่อ t = 0:

$$I(0) = Ae^0 = A$$

ฉะนั้น

$$I(t) = I(0)e^{\frac{1}{3}abt^3} \qquad : \text{รูปเวลาเบื้องต้น}$$

ในที่สุด อัตราการเจริญเติบโตของกระแสการลงทุน (growth rate of investment flow) ที่เหมาะสม เพื่อที่จะดำรงดุลยภาพของระบบเศรษฐกิจไว้ตลอดไป ก็จะคือ:

$$\frac{[dI(t)/dt]}{I(t)} = \frac{I(0)abt^2 e^{\frac{1}{3}abt^3}}{I(0) e^{\frac{1}{3}abt^3}}$$

$$= abt^2$$

$$= \rho(t)s(t) \qquad : \rho(t)=at;\ s(t)=bt$$

โดยสรุปแล้ว แม้ว่า ρ และ s จะอยู่ในรูปฟังก์ชันของ t แต่อัตราการเจริญเติบโตของกระแสการลงทุนที่เหมาะสม ก็ยังคงมีลักษณะอยู่ในรูปผลคูณของ ρ และ s เช่นเดียวกัน

4. สรุป

สมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึง สมการที่มีอนุพันธ์ (derivative) หรือ รูปผลต่างอนุพัทธ์ (differential) ปรากฏอยู่ ซึ่งอนุพันธ์หรือผลต่างอนุพัทธ์นี้จะเป็นอันดับ (order) ที่เท่าใดก็ได้ และจะอยู่ในรูปยกกำลังระดับขั้น (degree) ที่เท่าไรก็ได้ด้วยเช่นกัน ทั้งนี้ อันดับที่ของอนุพันธ์จะแสดงอันดับที่ของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ๆ ในขณะเดียวกันระดับของการยกกำลังก็จะแสดงระดับขั้นของอนุพันธ์นั้น ๆ เช่นกัน ดังนั้นถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ใดมีอนุพันธ์อันดับที่ n และอนุพันธ์นั้นยกกำลัง m สมการนั้นก็จะเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n ระดับที่ m นั่นเอง นอกจากนี้ สมการเชิงอนุพันธ์นั้น จะมีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรและค่าของสมการเป็นค่าคงที่ หรือเป็นตัวแปรก็ได้ด้วยเช่นกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้าค่าของสมการเป็นศูนย์ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์นั้น จะเรียกว่าเป็น สมการเชิงอนุพันธ์กรณีเอกพันธ์ แต่ถ้าค่าของสมการไม่ใช่ศูนย์ สมการนั้นก็จะเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์กรณีไร้เอกพันธ์

จากการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ ที่ได้พิจารณามาโดยลำดับแล้วนั้น แท้ที่จริงแล้วก็เพื่อจะหาและสร้างรูปแบบสำเร็จหรืออาจเรียกว่า "สูตร" ของการแก้สมการเพื่อหาค่าตัวแปรที่ติดอยู่ในรูปอนุพันธ์หรือผลต่างอนุพัทธ์ ที่ปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์ต่าง ๆ เหล่านั้นนั่นเอง ทั้งนี้ก็เพื่อที่จะนำรูปแบบหรือสูตรสำเร็จที่ได้นี้ไปประยุกต์ใช้กับเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์ต่อไป ซึ่งเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์ที่สามารถนำสมการเชิงอนุพันธ์นี้ไปประยุกต์ใช้ได้อย่างเหมาะสม เห็นจะได้แก่เรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์เชิงพลวัตนั่นเอง โดยเฉพาะอย่างยิ่งกรณีที่ตัวแปรทางเศรษฐกิจเกี่ยวข้องกับเวลาในลักษณะต่อเนื่อง

การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์เข้ากับเรื่องรางทางเศรษฐศาสตร์เชิงพลวัตนั้น สามารถดำเนินการได้ทั้งในด้านเศรษฐศาสตร์มหภาค ดังเช่นการวิเคราะห์กาลวิถีของกระแสการลงทุนในเรื่องทฤษฎีการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของท่านโดมาร์ หรือทางด้านเศรษฐศาสตร์จุลภาค ดังเช่น เรื่องเกี่ยวกับการวิเคราะห์กาลวิถีของราคาสินค้าในตลาดที่มีรูปแบบต่าง ๆ กัน ดังได้ศึกษาผ่านมาแล้วโดยลำดับนั่นเอง

บรรณานุกรม

ALLEN, R.G.D. Mathematical *Economics.* 2d ed., New York: St.Martin's Press, Inc., 1959.

BAUMOL, W. J. *Economic Dynamics: An Introduction. 3d* ed., New York: The Macmillan Company, 1970.

CHIANG, *A. C. Fundamental Methods of* Mathematical Economics. 3d ed., New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1984.

CODDINGTON, E. A., AND N. LEVINSON. *Theory of* Ordinary *Differential Equations.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1955.

DOMAR, E.O. Essays *in* the Theory of Economic Growth. Fair Lawn, N.J.: Oxford University Press, 1957.

FORD, L. R. *Differential Equations.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1933.

LEIGHTON, W. *An Introduction to the* Theory *of Differential* Equations. New York: McGraw-Bill Book Company, 1952.

ROWEROFT, J. E. Mathematical Economics : An *Integrated* Approach, London; Paul Chapman Publishing, 1994.

SYDSAETER, K., **Mathematics *for Economic Analysis.*** Englewood Cliffs, ***N.J.:*** Prentice-Hall, Inc., 1994.

TAKAYANA, A. ***Analytical*** Methods in Economics. London: Harvester Wheatsheaf, 1993.

YAMANE, T. ***Mathematics for*** Economists: An Elementary Survey. 2d ed., Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1968.

แบบฝึกหัด

1. จงหาฟังก์ชันเติมเต็ม (complementary function: y_c) และอินทิกรัลเฉพาะ (particular integral: y_p) พร้อมด้วยผลเฉลยทั่วไป (general solution) และผลเฉลยเฉพาะกรณี (definite solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) ต่อไปนี้:

(ก) $\frac{dy}{dt} + 4y = 12$ เมื่อ $y(0) = 2$

(ข) $\frac{dy}{dt} - 2y = 0$ เมื่อ $y(0) = 9$

(ค) $\frac{dy}{dt} + 10y = 15$ เมื่อ $y(0) = 0$

(ง) $2\frac{dy}{dt} + 4y = 6$ เมื่อ $y(0) = 1\frac{1}{2}$

2. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ โดยใช้สูตรสำเร็จและทดสอบความถูกต้องด้วย

(ก) $\frac{dy}{dt} + y = 4$ เมื่อ $y(0) = 0$

(ข) $\frac{dy}{dt} = 23$ เมื่อ $y(0) = 1$

(ค) $\frac{dy}{dt} - 5y = 0$ เมื่อ $y(0) = 6$

(ง) $3\frac{dy}{dt} + 6y = 5$ เมื่อ $y(0) = 0$

3. จงแสดงให้เห็นจริงว่า $(dP/dt) + j(\beta+\delta)P = j(\alpha + \gamma)$ สามารถที่จะเขียนได้เป็น $(dP/dt) + k(P - \bar{p}) = 0$ และถ้า $P - \bar{p} = \Delta$ (Δ หมายถึง ส่วนเบี่ยงเบน) ที่จะทำให้ $(d\Delta/dt) = (dP/dt)$ เช่นนี้แล้ว สมการเชิงอนุพันธ์จะสามารถเขียนได้เป็น $(d\Delta/dt) + k\Delta = 0$

จงหากาลวิถี [time path: $\Delta(t)$] และวิเคราะห์เงื่อนไขของเสถียรภาพเชิงพลวัต

4. ถ้าการเสนอซื้อ (demand) และการสนองขาย (supply) ของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ:

$$Q_d = \alpha - \beta P - \gamma\frac{dP}{dt} \quad \text{และ} \quad Q_s = \delta P \quad \text{โดย } \alpha,\beta,\gamma,\delta > 0$$

(ก) จงหากาลวิถีของราคา เมื่อสินค้าขายได้หมดตลอดเวลา : $Q_d = Q_s$

(ข) ราคาดุลยภาพจะมีเสถียรภาพเชิงพลวัตหรือไม่ อย่างไร

5. จงวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงพลวัตของดุลยภาพ ที่ได้จาก:

(ก) $Q_d = 10 - 15P$ และ $Q_s = 15P - 10$ โดย $\dfrac{dP}{dt} = 5(Q_d - Q_s)$

(ข) $Q_d = 15P - 10$ และ $Q_s = 10 - 15P$ โดย $\dfrac{dP}{dt} = 5(Q_d - Q_s)$

6. จงแสดงให้เห็นจริงว่า สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้ (สมการผลต่างอนุพัทธ์แม่นตรง : exact differential equations)) หรือไม่ และให้หาผลเฉลยของสมการดังกล่าวโดยวิธีลำดับขั้นด้วย:

(ก) $2yt^3 dy \; t \; 3y^2t^3 dt = 0$

(ข) $3y^2tdy \ t \ (y^3 \ t \ 2t)dt = 0$

(ค) $t(1 \ t \ 2y)dy \ t \ y(1 \ t \ y)dt = 0$

(ง) $\frac{dy}{dt} \ t \ \frac{2y^4t \ t \ 3t^2}{4y^3t} = 0$

7. จงทดสอบดูว่า สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้หรือไม่ ถ้าไม่ใช่ ขอให้ทดลองหาดูว่า t, y และ y^2 ตัวใด คือ ตัวประกอบเพื่อการอินทิเกรต (integrating factor) ของสมการใด:

(ก) $2(t^3 \ t \ 1)dy \ t \ 3ytdt = 0$

(ข) $4y^3tdy \ t \ (2y^4 \ t \ 3t)dt = 0$

8. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ โดยใช้สูตรสำเร็จ:

(ก) $\frac{dy}{dt} + 5y = 15$

(ข) $\frac{dy}{dt} + 2yt = 0$

(ค) $\frac{dy}{dt} \ t \ t^2y = 5t^2$ เมื่อ $y(0) = 6$

(ง) $2\frac{dy}{dt} + 12y + 2e^t = 0$ เมื่อ $y(0) = \frac{6}{7}$

9. จงหาอัตราของกระแสการลงทุน (rate of investment flow) ที่จะทำให้เกิดดุลยภาพในแบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของท่านโดมาร์ (Domar Growth Model):

(ก) เมื่อ $\rho = t^*$ และ $s = cl.3$

(ข) เมื่อ $\rho = at^*$ และ $s = bt^*$

10. สมมุติว่า แบบจำลองภาวะตลาดของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ:

$$Q_d = 35 - 3P$$

$$Q_s = -45 + 5P$$

และ
$$\frac{dP}{dt} = 0.7(Q_d - Q_s)$$

อยากทราบว่า:

(ก) กาลวิถี (time path) ของราคาสินค้าชนิดนี้มีลักษณะเป็นอย่างไร

(ข) ราคาดุลยภาพมีเสถียรภาพเชิงพลวัตหรือไม่ อย่างไร