ดุลยภาพของระบบเศรษฐกิจ:

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = \rho s$$

หรือ

$$\frac{dI}{dt} - \rho sI = 0$$

โดยที่:

I(t) หมายถึง อัตรากระแสการลงทุน (rate of investment flow)

s หมายถึง ความโน้มเอียงในการออม (marginal propensity to save)

ρ หมายถึง อัตราสมรรถภาพต่อทุน (capacity-capital ratio)

และ t หมายถึง เวลา (time)

จากสมการความสัมพันธ์ของกระแสการลงทุนข้างต้น จะเห็นได้ว่าแท้ที่จริงแล้ว สมการนี้ก็คือ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น ของกรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่ และค่าสมการเป็นค่าคงที่ ในกรณีเอกพันธ์ (first-order linear differential equations with constant coefficient and constant term, case of homogeneous) อันมีลักษณะทั่วไป ดังนี้:

ลักษณะ: $$\frac{dy}{dt} + ay = 0$$: a = ค่าคงที่ใด ๆ

และมี ผลเฉลยหรือกาลวิถีในรูปเฉพาะกรณี (definite solution) เป็น:

$$y(t) = y(0)e^{-at}$$

ดังนั้นโดยนัยเดียวกัน กาลวิถีของกระแสการลงทุนที่จะดำรงดุลยภาพของระบบเศรษฐกิจไว้ตลอดไป ตามแนวคิดของท่านโดมาร์ ก็อาจจะสรุปเปรียบเทียบในลักษณะเดียวกันได้ ดังนี้:

กล่าวคือ:

ถ้า $I(t)$ เปรียบเทียบได้กับ $y(t)$

และ ρs เปรียบเทียบได้กับ $-a$

ดังนั้น กาลวิถีของกระแสการลงทุน ก็จะคือ:

$$I(t) = I(0)e^{\rho st}$$ //

จากผลสรุปข้างต้น จะเห็นได้ว่า ถ้าได้ศึกษาเรื่องเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์มาก่อนแล้ว การหากาลวิถีของกระแสการลงทุน ตามแนวคิดของท่านโดมาร์ ก็จะสามารถกระทำได้โดยง่ายและสะดวกรวดเร็ว

2.3.2 กรณีไร้เอกพันธ์

ในการประยุกต์ สมการเชิงอนุพันธ์กรณีไร้เอกพันธ์ มาใช้กับเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์จุลภาคนั้น ในที่นี้ขอยกตัวอย่าง แสดงการวิเคราะห์แบบจำลองเชิงพลวัตของราคาตลาด (dynamic model of market price) ให้เห็นเป็นสำคัญ โดยลำดับต่อไปนี้:

1) ขอบข่ายการศึกษา (The Framework)

สมมุติว่า ฟังก์ชันการเสนอซื้อ (demand function) และฟังก์ชันการสนองขาย (supply function) ของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ:

การเสนอซื้อ: $Q_d = \alpha - \beta P \qquad (\alpha, \beta > 0)$

การสนองขาย: $Q_s = -\gamma + \delta P \qquad (\gamma, \delta > 0)$

จาก ดุลยภาพของตลาดสินค้า คือ:

$$Q_d = Q_s$$

หรือ $$\alpha - \beta P = -\gamma + \delta P$$: แทนค่า Q_d และ Q_s

ดังนั้น ดุลยภาพของราคาสินค้าชนิดนี้ ก็จะคือ:

$$\bar{P} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta}$$: $\bar{P}$ = P ณ ดุลยภาพ

ข้อพิจารณา:

ถ้าขณะใดขณะหนึ่ง ราคาเบื้องต้น [initial price: P(0)] อยู่ในระดับหรือเท่ากับราคาดุลยภาพ $\bar{P}$ พอดีแล้ว สภาพตลาดก็จะได้ดุลยภาพแล้วเช่นกัน เช่นนี้แล้ว ตลาดก็ไม่มีความจำเป็นใด ๆ ที่จะต้องปรับตัวเข้าสู่ดุลยภาพอีก แต่ถ้าขณะนั้นราคาเบื้องต้นไม่ใช่หรือไม่เท่ากับราคาดุลยภาพ: $P(0) \neq \bar{P}$ ตลาดก็จำเป็นที่จะต้องมีการปรับตัวเพื่อที่จะเข้าสู่ดุลยภาพ อย่างไรก็ตาม เมื่อราคามีการปรับตัวไปตามสภาพของเวลา ปริมาณการเสนอซื้อ (Q_d) และปริมาณการสนองขาย (Q_s) ก็จะมีการปรับตัวตามสภาพของเวลาตามไปด้วย ทั้งนี้ด้วยเหตุว่าปริมาณดังกล่าวขึ้นอยู่กับราคา (P) นั่นเอง ดังนั้นจะเห็นได้ว่า ทั้งราคาและปริมาณต่างก็ขึ้นอยู่กับเวลา หรือเป็นฟังก์ชันของเวลา (function of time) ทั้งสิ้น

ในชั้นนี้ การวิเคราะห์จึงมุ่งประเด็นไปสู่ปัญหาที่ว่า ถ้าเวลาดำเนินไปโดยไม่มีการสิ้นสุด ($t \to \infty$) ราคาจะมีแนวโน้มปรับตัวไปสู่ดุลยภาพ ($\bar{P}$) หรือไม่ หรือกาลวิถีของราคา P(t) จะมีแนวโน้มเข้าสู่ดุลยภาพ $\bar{P}$ หรือไม่ นั่นเอง

2) **การหาผลเฉลย** (Finding the Solution)

การที่จะตอบปัญหาว่า ราคาจะมีแนวโน้มการปรับตัวเข้าสู่ดุลยภาพหรือไม่อย่างไรนั้น จะกระทำได้ก็ต่อเมื่อได้ทราบกาลวิถี (time path) ของราคา P(t) เสียก่อน แต่การที่จะทราบกาลวิถีได้ ก็จำจะต้องทราบลักษณะหรือรูปแบบการเปลี่ยนแปลงของราคา (pattern of price change) ในเบื้องต้นอีกชั้นหนึ่งเสียก่อนด้วย ซึ่งโดยปกติแล้ว การเปลี่ยนแปลงของราคา จะขึ้นอยู่กับการเสนอซื้อและการสนองขายเป็นสำคัญ

ลำดับนี้ จะขอแสดงขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาข้างต้นเป็นลำดับกันไป ดังต่อไปนี้:

(1) การหารูปแบบการเปลี่ยนแปลงของราคา (pattern of price change)

เพื่อให้เข้าใจการพิจารณาได้โดยง่าย ในชั้นนี้จะขอสมมุติว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของราคาในขณะใดขณะหนึ่ง เป็นสัดส่วนโดยตรงกับส่วนเกินของการเสนอซื้อ (excess demand: $Q_d - Q_s$) ของขณะนั้น ซึ่งความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ สามารถแสดงในรูปคณิตศาสตร์ได้ดังนี้ คือ:

$$\frac{dP}{dt} = j(Q_d - Q_s) \qquad : \quad j > 0$$

โดยที่: j คือ สัมประสิทธิ์การปรับตัวของราคา (price adjustment coefficient) ซึ่งเป็นค่าคงที่ที่เป็นบวก ($j > 0$)

อนึ่ง อัตราการเปลี่ยนแปลงของราคาข้างต้น ทำให้เห็นชัดได้ว่า ถ้าตลาดมีดุลยภาพแล้ว การปรับตัวของราคาก็จะไม่เกิดขึ้น กล่าวคือ:

$$\text{ถ้า} \quad Q_d = Q_s \qquad \text{แล้ว} \qquad \frac{dP}{dt} = 0$$

นอกจากนี้ การพิจารณายังทำให้เห็นได้ว่า ดุลยภาพของราคานั้นอาจพิจารณาได้เป็นสองลักษณะคือ ดุลยภาพของราคาลักษณะระยะยาว (intertemporal sense) ซึ่งราคาจะคงที่ตลอดเวลาลักษณะหนึ่ง และดุลยภาพของราคาในลักษณะตลาด (market-clearing sense) ซึ่งราคาดุลยภาพเกิดขึ้นเมื่อการเสนอซื้อเท่ากับการสนองขายอีกลักษณะหนึ่ง โดยแบบจำลองที่กำลังพิจารณานี้ มีดุลยภาพของราคาของทั้งสองลักษณะร่วมกันอยู่ แต่อย่างไรก็ตาม มิใช่ว่าทุกรูปแบบจำลองจะมีลักษณะเช่นนี้เสมอไป

(2) การหากาลวิถีของราคา (time path of price)

จากการที่ได้ทราบแล้วว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของราคา คือ:

$$\frac{dP}{dt} = j(Q_d - Q_s) \qquad : j > 0$$

แทนค่า Q_d และ Q_s:

$$= j[(\alpha - \beta P) - (-\gamma \text{ t } \delta P)]$$

$$= j[\alpha - \beta P \text{ t } \gamma - \delta P]$$

$$= j[(\alpha \text{ t } \gamma) - (\beta \text{ t } \delta)P]$$

$$= j(\alpha \text{ t } \gamma) - j(\beta \text{ t } \delta)P$$

หรือ

$$\frac{dP}{dt} + j(\beta \text{ t } \delta)P = j(\alpha + \gamma) \qquad //$$

อนึ่ง โดยเหตุที่ $j(\beta + \delta)$ ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปร P มีค่าไม่เป็นศูนย์ หรือ $j(\beta + \delta) \neq 0 : j, \beta, \delta > 0$ ดังนั้นสมการข้างต้นนี้ก็คือ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น ของกรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่ และค่าสมการเป็นค่าคงที่ กรณีไร้เอกพันธ์ (first-order linear differential equations with constant coefficient and constant term, case of nonhomogeneous) ในรูปของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรมีค่าที่ไม่เป็นศูนย์ อันมีลักษณะทั่วไป ดังนี้:

จาก สมการเชิงอนุพันธ์กรณีไร้เอกพันธ์ คือ:

$$\frac{dy}{dt} + ay = b$$

และมีผลเฉลยในรูปเฉพาะกรณี $a \neq 0$ (definite solution, case of $a \neq 0$) คือ:

$$y(t) = [y(0) - \frac{b}{a}]e^{-at} + \frac{b}{a}$$

ดังนั้นโดยนัยเดียวกัน กาลวิถีของราคา ก็อาจจะสามารถสรุปเปรียบเทียบในลักษณะเดียวกันได้ดังนี้:

กล่าวคือ: ถ้า y คือ P

a คือ $j(\beta + \delta) \neq 0$

และ b คือ $j(\alpha \; t \; \gamma)$

ฉะนั้น กาลวิถีของราคา (time path of price) ก็คือ:

$$P(t) = [P(0) - \frac{(\alpha \; t \; \gamma)}{(\beta + \delta)}]e^{-j(\beta+\delta)t} \; t \; \frac{(\alpha + \gamma)}{(\beta + \delta)}$$

หรือ

$$P(t) = [P(0) - \bar{p}]e^{-kt} \; t \; \bar{p} \qquad //$$

$$: \bar{p} = \frac{(\alpha+\gamma)}{(\beta+\delta)} \quad \text{และ} \quad k = j(\beta+\delta)$$

(3) การหาเสถียรภาพเชิงพลวัตของดุลยภาพ (dynamic stability of equilibrium)

จากกาลวิถีของราคา คือ: $P(t) = [P(0) - \bar{p}]e^{-kt} + \bar{p}$

ดังนั้น การพิจารณาหาแนวโน้มของกาลวิถีที่ว่า ถ้าเวลาดำเนินไปโดยไม่มีการสิ้นสุดแล้ว ($t \to \infty$) กาลวิถีของราคาจะมีแนวโน้มเข้าสู่ดุลยภาพ: $P(t) \to \bar{p}$ หรือไม่อย่างไรนั้น ก็อาจจะพิจารณาได้โดยง่ายจากสมการข้างต้น กล่าวคือ จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่า โดยเหตุที่ $k > 0$ ดังนั้นเมื่อ $t \to \infty$ จะทำให้ $e^{-kt} \to 0$ และโดยเหตุที่ $P(0)$ และ $\bar{p}$ เป็นค่าคงที่ ฉะนั้น $[P(0) - \bar{p}]e^{-kt} \to 0$ ด้วย เช่นนี้แล้ว $P(t) \to \bar{p}$ หรือก็คือ กาลวิถีของราคาจะมีแนวโน้มเข้าสู่ดุลยภาพนั่นเอง[1] อย่างไรก็ตาม ด้วยเหตุที่การเข้าสู่ดุลยภาพในลักษณะนี้ เป็นการเข้าสู่ดุลยภาพในลักษณะระยะยาว (intertemporal) ดังนั้น ดุลยภาพในลักษณะนี้ จึงเรียกว่าเป็นดุลยภาพที่มี "เสถียรภาพเชิงพลวัต" (dynamically stable)

อนึ่ง การมีเสถียรภาพเชิงพลวัต (dynamic stability) ของราคาโดยทั่วไป อาจจำแนกโดยละเอียดได้เป็นสามลักษณะกรณีด้วยกัน กล่าวคือ: ลักษณะหนึ่งเป็นกรณีที่ $P(0) = \bar{p}$ ซึ่งเป็นผลให้ $P(t) = \bar{p}$ เมื่อเป็นเช่นนี้ กาลวิถีของราคาก็จะมีลักษณะเป็นเส้นตรงขนานกับ

---

[1] การวิเคราะห์ลักษณะแนวโน้มของกาลวิถีข้างต้นนี้ อาจพิจารณาให้กระชับและเด่นชัดด้วยการพิจารณาโดยนัยของลิมิตหรือพิจารณาภายใต้ลิมิตได้อีกโสตหนึ่ง ดังต่อไปนี้:

จากกาลวิถีของราคา คือ:

$$P(t) = [P(0) - \bar{p}]e^{-kt} + \bar{p}$$

ดังนั้น

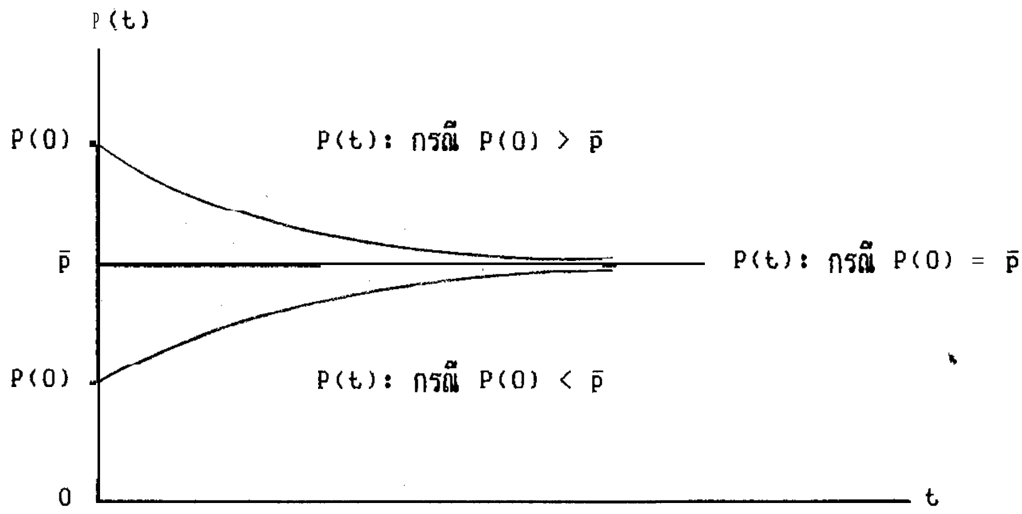
$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \{[P(0) - \bar{p}]e^{-kt} + \bar{p}\}$$

$$= [P(0) - \bar{p}] \lim_{t\to\infty} e^{-kt} \; t \; \bar{p}$$

$$= \bar{p} \qquad : k > 0$$

แนวนอน (horizontal straight line) อีกลักษณะหนึ่งเป็นกรณีที่ $P(0) > \bar{p}$ ซึ่งเป็นผลให้ $[P(0) - \bar{p}]e^{-kt} > 0$ แต่ค่านี้ก็จะลดลงเป็นลำดับเมื่อ t มีค่าเพิ่มมากขึ้น (t เพิ่มมากขึ้น ทำให้ e^{-kt} ลดลง) ดังนั้น กาลวิถีจะโน้มตัวเข้าสู่ดุลยภาพ $\bar{p}$ ด้วยการทอดตัวจากด้านบนลงสู่ดุลยภาพ สำหรับลักษณะสุดท้ายเป็นกรณีที่ $P(0) < \bar{p}$ ซึ่งเป็นลักษณะตรงกันข้ามกับลักษณะที่สอง ดังนั้น กาลวิถีจะมีแนวโน้มเข้าสู่ดุลยภาพ $\bar{p}$ ด้วยการโน้มพุ่งตัวจากด้านล่างขึ้นสู่ดุลยภาพนั่นเอง ดังจะเห็นได้จากรูปประกอบของกาลวิถีในกรณีต่าง ๆ ข้างต้นดังต่อไปนี้:

รูป 6-1: การเข้าสู่ดุลยภาพของกาลวิถี



จากข้อพิจารณาข้างต้นจะเห็นได้ว่า โดยปกติแล้วการที่จะเกิดเสถียรภาพเชิงพลวัตขึ้นได้ (dynamic stability) ก็ต่อเมื่อ การเบี่ยงเบนของกาลวิถี (deviation of the time path: $[P(0) - \bar{p}]e^{-kt}$) จากจุดดุลยภาพจะต้องไม่มี (ดังเช่นกรณีแรก: $P(0) = \bar{p}$ แล้ว $[P(0) - \bar{p}] = 0$ ซึ่งก็คือ $[P(0) - \bar{p}]e^{-kt} = 0$) หรือมิฉะนั้น การเบี่ยงเบนก็จะต้องลดลงโดยตลอด (steadily decrease) ตามช่วงเวลาที่เปลี่ยนไป (ดังเช่นกรณีที่สองที่ว่า: $P(0) > \bar{p}$ แล้ว $[P(0) - \bar{p}] > 0$ และกรณีสุดท้าย: $P(0) < \bar{p}$ แล้ว $[P(0) - \bar{p}] < 0$ ซึ่งเมื่อ $t \to \infty$ จะทำให้ $e^{-kt} \to 0$ ที่สุดจะเป็นผลให้ $[P(0) - \bar{p}]e^{-kt} \to 0$)

ลำดับนี้ ถ้าจะเปรียบเทียบกาลวิถีของราคาในปัญหาที่กำลังพิจารณาอยู่ ซึ่งมีลักษณะเป็น: $P(t) = [P(0) - \bar{P}]e^{-kt} + \bar{P}$ กับกาลวิถีของสมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไปกรณีไร้เอกพันธ์ในรูปแบบเฉพาะกรณีที่ว่า: $Y(t) = [Y(0) - (b/a)]e^{-at} + (b/a)$ ก็จะพบว่า แท้ที่จริงแล้ว $\bar{P}$ เปรียบได้กับ b/a และโดยเหตุที่ b/a หมายถึง ส่วนของอินทิกรัลเฉพาะ (particular integral: Y_p) ดังนั้น $\bar{P}$ ก็คือ อินทิกรัลเฉพาะเช่นกัน สำหรับส่วนที่อยู่ในรูปการยกกำลัง (the exponential term) ซึ่งได้แก่: $[Y(0) - (b/a)]e^{-at}$ ก็จะคือ ฟังก์ชันเติมเต็ม (complementary function: Y_c) เช่นเดียวกันกับรูปทั่วไปนั่นเอง อนึ่ง ในทางเศรษฐศาสตร์ ส่วนของ Y_p นี้ จะหมายถึง ดุลยภาพระยะยาว (intertemporal equilibrium) และส่วนของ Y_c ก็คือ ส่วนเบี่ยงเบนจากดุลยภาพ (deviation from equilibrium) ซึ่งในที่สุด เมื่อจะเกิดเสถียรภาพเชิงพลวัตขึ้นแล้ว ส่วนของฟังก์ชันเติมเต็มจะต้องลดลงโดยลำดับและหายไปในที่สุดเมื่อเวลา t ดำเนินไปโดยไม่สิ้นสุด: $t \to \infty$

อย่างไรก็ตาม สำหรับตัวอย่างการวิเคราะห์แบบจำลองเชิงพลวัตของราคาตลาดที่กำลังพิจารณาอยู่นี้ อินทิกรัลเฉพาะ (particular integral) มีลักษณะเป็นค่าคงที่ในรูปของ $\bar{P}$ ดังนั้น ดุลยภาพที่ได้จึงเป็นดุลยภาพที่มีสภาพเชิงสถิต (stationary equilibrium) ในแนวลักษณะระยะยาว (intertemporal sense) แต่ถ้าอินทิกรัลเฉพาะมิใช่ค่าคงที่แล้ว ดุลยภาพที่ได้ก็จะมีสภาพเคลื่อนไหวไปตามเวลา (moving equilibrium)

อนึ่ง จากการที่ได้วิเคราะห์ลักษณะการมีเสถียรภาพเชิงพลวัตของกาลวิถีของราคาตลาดกรณีที่กำหนดลักษณะฟังก์ชันของการเสนอซื้อและการสนองขาย หรือกำหนดเครื่องหมายของตัวพารามิเตอร์ของฟังก์ชันมาให้แล้วนั้น บัดนี้ จะวิเคราะห์ในอีกแง่มุมหนึ่งที่ว่า ถ้าต้องการที่จะให้กาลวิถีของราคา มีแนวโน้มเข้าสู่ดุลยภาพที่มีเสถียรภาพเชิงพลวัตแล้ว ฟังก์ชันของการเสนอซื้อและการสนองขาย หรือตัวพารามิเตอร์ของฟังก์ชันจะต้องมีลักษณะเป็นเช่นไร ซึ่งในกรณีนี้อาจพิจารณาได้ ดังต่อไปนี้:

จากกาลวิถีของราคา คือ: $P(t) = [P(0) - \bar{P}]e^{-kt} + \bar{P}$

ดังนั้น กาลวิถีนี้จะมีแนวโน้มเข้าสู่ดุลยภาพที่มีเสถียรภาพเชิงพลวัต หรือ: เมื่อ $t \to \infty$ แล้ว $P(t) \to \bar{p}$ ก็ต่อเมื่อ $[P(0) - \bar{p}]e^{-kt} \to 0$ เมื่อ $t \to \infty$ แต่ปกติแล้ว $P(0) \neq \bar{p}$ ฉะนั้น e^{-kt} จะต้องมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เมื่อ $t \to \infty$ จึงจะทำให้ $P(t) \to \bar{p}$ เมื่อ $t \to \infty$ ซึ่งข้อนี้จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ $k > 0$ หรือนั่นคือเมื่อ $j(\beta+\delta) > 0$ เท่านั้น $[j(\beta+\delta) = k]$

เช่นนี้แล้วจึงสรุปได้ว่า เงื่อนไขของการมีเสถียรภาพเชิงพลวัตของดุลยภาพ (dynamic stability of equilibrium) ก็คือ การเสนอซื้อและการสนองขาย จะต้องมีฟังก์ชันในรูปลักษณะที่จะทำให้ตัวพารามิเตอร์ตอบสนองต่อเงื่อนไขที่ว่า:

$$j(\beta+\delta) > 0$$

โดยที่:

j หมายถึง สัมประสิทธิ์การปรับตัวของราคา (the adjustment coefficient of price)

β หมายถึง ค่าลบของความชันของเส้นการเสนอซื้อ (the negative of the slope of the demand curve)

δ หมายถึง ค่าความชันของเส้นการสนองขาย (the slope of the supply curve)

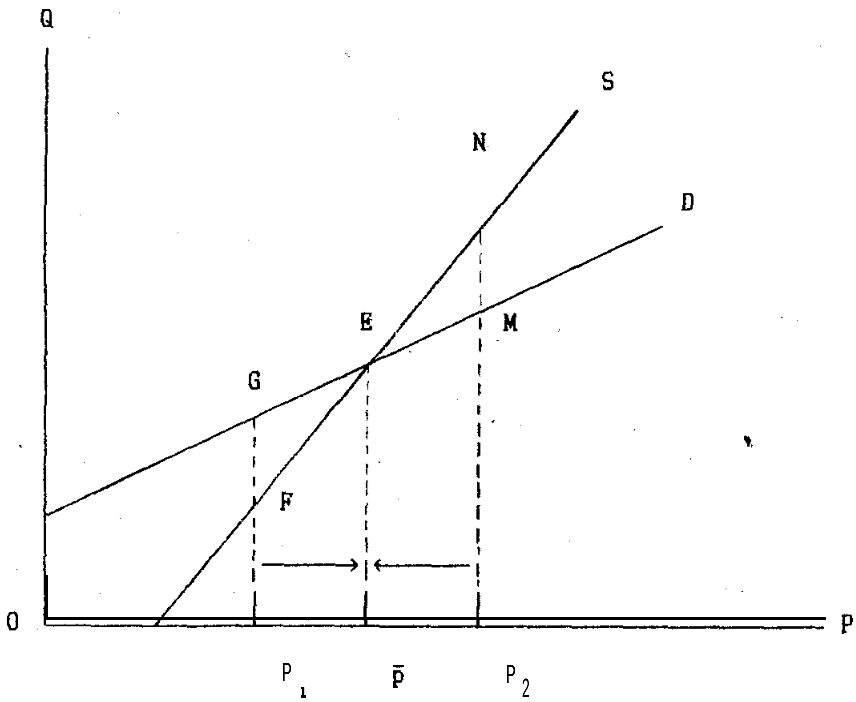
อนึ่ง ในกรณีที่การปรับตัวของราคา (the price adjustment) มีลักษณะที่ปกติแล้ว การปรับตัวของราคานี้ ก็จะมีความสัมพันธ์โดยตรงกับส่วนเกินของการเสนอซื้อ นั่นคือ: $j > 0$ ดังนั้นเสถียรภาพเชิงพลวัตของดุลยภาพ จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ: $(\beta+\delta) > 0$ หรือคือ ก็ต่อเมื่อ:

$$\delta > -\beta$$

ซึ่งหมายความว่า ค่าความชันของเส้นการสนองขาย (δ) จะต้องมากกว่า ค่าความชันของเส้นการเสนอซื้อ ($-\beta$) เสถียรภาพเชิงพลวัตจึงจะเกิดขึ้นได้

ที่สุดแล้ว ถ้าการเสนอซื้อและการสนองขายมีลักษณะปกติ กล่าวคือ เส้นการเสนอซื้อมีค่าความชันเป็นลบ ($-\beta < 0$) แต่เส้นการสนองขายมีค่าความชันเป็นบวก ($\delta > 0$) เสถียรภาพเชิงพลวัตย่อมเกิดขึ้นได้ อย่างไรก็ตาม แม้ว่าค่าความชันของเส้นหนึ่งเส้นใดจะไม่เป็นไปตามปกติ แต่ถ้าค่าความชันของเส้นการเสนอซื้อยังคงน้อยกว่าค่าความชันของเส้นการสนองขายแล้ว เสถียรภาพเชิงพลวัตก็ยังคงเกิดขึ้นได้เช่นกัน เช่นเมื่อ $-\beta = 1/2$ และ $\delta = 1$ เสถียรภาพเชิงพลวัตก็ยังคงเกิดขึ้นได้ แม้ว่าเส้นการเสนอซื้อจะมีค่าความชันผิดปกติ ($-\beta = 1/2 > 0$) ก็ตาม ซึ่งกรณีนี้อาจจะแสดงให้เห็นชัดเจนยิ่งขึ้นด้วยรูปกราฟ ต่อไปนี้:

รูป 6-2: ภาพการเข้าสู่เสถียรภาพเชิงพลวัต



จากรูป 5.2 จะเห็นได้ว่าดุลยภาพตลาดอยู่ที่จุด E ซึ่งเป็นตำแหน่งการเสนอซื้อเท่ากับการสนองขาย และเกิดราคาดุลยภาพที่ $\bar{p}$ แต่ถ้าขณะใดขณะหนึ่งในเบื้องต้น ราคาอยู่ที่ P_1 ก็จะเกิดส่วนเกินของการเสนอซื้อ (excess demand) ขึ้นเป็นจำนวนเท่ากับ GF ซึ่งเมื่อการ

เสนอซื้อมีมากกว่าการสนองขาย ราคาก็จะถูกประมูลให้สูงขึ้น ในทางกลับกัน ถ้าราคาในเบื้องต้นอยู่ที่ P_2 ก็เกิดส่วนเกินของการสนองขาย (excess supply) เป็นจำนวนเท่ากับ NM ซึ่งเมื่อการสนองขายมีมากกว่าการเสนอซื้อ ราคาก็ถูกลดต่ำลง ดังนั้นในขณะใดก็ตามที่ราคามิได้อยู่ที่ดุลยภาพ ก็จะเกิดการปรับตัวของราคาจนกว่าราคาจะมาอยู่ที่ดุลยภาพในที่สุด

โดยสรุปแล้ว จากการพิจารณารูป 5.2 ข้างต้นจะเห็นได้ชัดเจนว่า แม้ว่าเส้นการเสนอซื้อจะมีค่าความชันไม่เป็นไปตามปกติก็ตาม เสถียรภาพเชิงพลวัตก็ยังอาจเกิดขึ้นได้ตราบเท่าที่ค่าความชันของการเสนอซื้อนั้น มีค่าน้อยกว่าค่าความชันของเส้นการสนองขาย ซึ่งข้อนี้เป็นจริงดังคำที่ได้กล่าวไว้ในเบื้องต้นนั่นเอง

3. สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น: กรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นตัวแปรและค่าสมการเป็นตัวแปร

สมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งมีอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง โดยอนุพันธ์นั้นยกกำลังหนึ่ง และมีคุณลักษณะเชิงเส้น โดยมีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตามเป็นตัวแปร และมีค่าสมการเป็นตัวแปร หรือที่เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น ในกรณีที่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นตัวแปร และค่าสมการเป็นตัวแปร (first-order linear differential equations with variable coefficient and variable term) มีลักษณะทั่วไป ดังนี้:

ลักษณะทั่วไป:[1]

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t) \qquad : u \text{ และ } w \text{ เป็นฟังก์ชันของ } t$$

---

[1] แสดงโดยย่อได้เป็น: $\frac{dy}{dt}$ t u y = w

อย่างไรก็ตาม ค่าของสมการ (variable term) ก็อาจมีได้สองลักษณะกรณี คือ:

1. กรณีที่ค่าของสมการเป็นศูนย์ ซึ่งเรียกว่า กรณีเอกพันธ์ (homogeneous case)

2. กรณีที่ค่าของสมการไม่เป็นศูนย์ ซึ่งเรียกว่า กรณีไร้เอกพันธ์ (nonhomogeneous case)

ในลำดับนี้ จะขอกล่าวถึงแต่ละกรณีเป็นลำดับกันไป ดังต่อไปนี้:

3.1 กรณีเอกพันธ์

กรณีเอกพันธ์ (the homogeneous case) เป็นกรณีที่ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น กรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตามเป็นตัวแปร และค่าของสมการก็เป็นตัวแปรเช่นกันนี้นั้น มีค่าของสมการ (variable term) เป็นศูนย์ และมีลักษณะทั่วไป ดังนี้:

ลักษณะ: $$\frac{dy}{dt} \; t \; u(t)y = cl \qquad : w(t) = 0$$

หรืออาจจัดรูปใหม่ได้เป็น: $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -u(t)$$

เมื่อต้องการจะหากาลวิถีของ y (time path of y) ก็สามารถจะดำเนินการได้โดยการอินทิเกรตเข้าไปในสมการข้างต้นมุ่งต่อ t ดังนี้:

7-m $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} \qquad u(t)$$

แล้ว
$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt = \int -u(t)\,dt \qquad \text{: อินทิเกรตมุ่งต่อ } t$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int u(t)dt \qquad \text{: กฎการแทนที่}$$

$$\ln y + c = -\int u(t)dt \qquad \text{: กฎของลอการิทึม}$$

$$\ln y = -c - \int u(t)dt$$

ดังนั้น
$$e^{\ln y} = e^{-c-\int u(t)dt} \qquad \text{: รูป } e \text{ ยกกำลัง}$$

$$y = e^{-c-\int u(t)dt} \qquad \text{: จาก } e^{\ln y} = y$$

$$= e^{-c}\,e^{-\int u(t)dt}$$

$$= Ae^{-\int u(t)dt} \qquad \text{: } A = e^{-c}$$

หรือ
$$y(t) = Ae^{-\int u(t)dt} \qquad \text{: general solution}$$

สมการนี้คือ ผลเฉลยในรูปทั่วไป (general solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ กรณีเอกพันธ์ หรือก็คือ กาลวิถีของ y ที่กำลังพิจารณาอยู่นั่นเอง

อนึ่ง ถ้าจะเปรียบเทียบกับผลเฉลยหรือกาลวิถีของ y ในกรณีเอกพันธ์ เมื่อสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่ ซึ่งได้เคยหาผลเฉลยไว้แล้ว ที่ว่า:

$$y(t) = Ae^{-at}$$

ก็จะเห็นได้ว่า ทั้งสองกรณีนี้นับว่าเป็นอย่างเดียวกัน เพียงแต่ว่าเมื่อสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตาม y เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ t แล้ว พจน์ของ e ยกกำลังก็จะมีลักษณะที่สลับซับซ้อนมากขึ้น จาก e^{-at} กลายเป็น $e^{-\int u(t)dt}$ เท่านั้น ซึ่งแท้ที่จริงแล้ว กำลังของ e ของทั้งสองกรณีก็ได้มาโดยนัยเดียวกันนั่นเอง กล่าวคือ ได้มาจากการอินทิเกรตสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตามเช่นกันทั้งสองกรณี ดังจะเห็นจริงได้จากการเปรียบเทียบ ต่อไปนี้:

กรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตามเป็นค่าคงที่ "a":

เมื่ออินทิเกรตมุ่งต่อ t:

$$\int a\,dt = at \qquad : \text{ละค่าคงที่}$$

สำหรับกรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตามเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ "t":

เมื่ออินทิเกรตมุ่งต่อ t:

$$\int u(t)dt = \int u(t)dt$$

จะเห็นได้ว่า at และ $\int u(t)dt$ ต่างก็ได้มาจากการอินทิเกรตมุ่งต่อ t เช่นเดียวกัน อย่างไรก็ตาม โดยเหตุที่ u(t) เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่มิได้กำหนดไว้ตายตัว ดังนั้น ผลของการอินทิเกรตดังกล่าวจึงยังคงติดอยู่ในรูปเดิม โดยจะดำเนินการใด ๆ ต่อไปมิได้อีกแล้ว

ในลำดับนี้ เพื่อให้มีความเข้าใจได้ชัดเจนในการหาผลเฉลยหรือกาลวิถีของกรณีเอกพันธ์ เมื่อสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตามอยู่ในรูปตัวแปร ดังได้พิจารณามาแล้วข้างต้น จึงขอยกตัวอย่างประกอบ ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 6.4: ตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ เมื่อสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

จงหาค่าของสมการ: $\frac{dy}{dt} + 3t^2y = 0$

วิธีทำ:

จากสมการเอกพันธ์ในรูปมาตรฐานทั่วไป เมื่อสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร คือ:

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = 0 \qquad ; w(t) = 0$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยในรูปทั่วไป (general solution) เป็น:

$$y(t) = Ae^{-\int u(t)dt} \qquad ; \text{general solution}$$

ในที่นี้ สมการที่กำหนด คือ:

$$\frac{dy}{dt} + 3t^2y = 0$$

นั่นคือ: $u(t) = 3t^2$

ดังนั้น $\int u(t)dt = \int 3t^2\,dt$

$$= t^3 + c$$

เช่นนี้แล้ว ผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ที่กำหนด ก็จะคือ:

$$y(t) = Ae^{-(t^3+c)}$$

$$= Ae^{-t^3}e^{-c}$$

$$= Be^{-t^3} \qquad ; B = Ae^{-c}$$

ตอบ //

3.2 กรณีไร้เอกพันธ์

กรณีไร้เอกพันธ์ (the nonhomogeneous case) เป็นกรณีที่ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น กรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นตัวแปร และค่าของสมการเป็นตัวแปรเช่นกันนี้นั้นมีค่าของสมการ (variable term) ไม่เป็นศูนย์ หรือ $w(t) \neq 0$ และมีลักษณะทั่วไป ดังนี้:

ลักษณะ:
$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t) \qquad : w(t) \neq 0$$

อย่างไรก็ตาม การที่จะหาผลเฉลยหรือกาลวิถีของ y ในกรณีนี้ ไม่อาจจะกระทำได้โดยง่ายดังเช่นกรณีที่แล้ว ๆ มา แต่จะต้องอาศัยหลักการเกี่ยวกับ "สมการผลต่างอนุพัทธ์แม่นตรง" (exact differential equations) หรือที่จะขอเรียกง่ายๆ ว่า "**สมการเชิงอนุพันธ์แท้**" เข้าช่วยพิจารณาด้วย ในลำดับนี้ จึงขอแสดงเรื่องเกี่ยวกับสมการผลต่างอนุพัทธ์แม่นตรง หรือสมการเชิงอนุพันธ์แท้ ให้ได้เข้าใจเสียก่อนในเบื้องต้น ดังต่อไปนี้:

สมการเชิงอนุพันธ์แท้ (สมการผลต่างอนุพัทธ์แม่นตรง:Exact Differential Equations)

จากฟังก์ชันสองตัวแปรใด ๆ $F(y,t)$ ซึ่งมีอนุพันธ์รวม (total differential) เป็น:

$$dF(y,t) = \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt$$

เมื่อเทียบอนุพันธ์นี้ให้เท่ากับศูนย์ จะได้:

$$\frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0 ,$$

สมการข้างต้นนี้เรียกว่า "สมการเชิงอนุพันธ์แท้" ทั้งนี้ด้วยเหตุที่ด้านซ้ายมือของสมการคืออนุพันธ์ที่แท้จริงของฟังก์ชัน $F(y,t)$ นั่นเอง

ลำดับนี้ เพื่อให้การทำความเข้าใจเด่นชัดยิ่งขึ้น จึงขอยกตัวอย่างประกอบ ดังต่อไปนี้

ถ้าฟังก์ชันสองตัวแปร คือ: $F(y,t) = y^2t + k$: k = ค่าคงที่ใด ๆ

ดังนั้น อนุพันธ์รวม จะคือ: $dF = 2ytdy + y^2dt$

เช่นนี้แล้ว สมการเชิงอนุพันธ์ ก็จะคือ:

$$Zytdy + y^2dt = 0$$

หรือ $$\frac{dy}{dt} + \frac{y^2}{2yt} = 0$$

จะเห็นได้ว่า สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้ ทั้งนี้เพราะว่า ด้านซ้ายมือคือ อนุพันธ์ของฟังก์ชันเดิมที่แท้จริง ซึ่งได้จากการหาอนุพันธ์รวมโดยตรง

จากการพิจารณาข้างต้นจะสรุปได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไปใด ๆ ซึ่งอยู่ในรูป:

$$Mdy \; t \; Ndt = 0$$

จะเรียกว่าเป็น "สมการเชิงอนุพันธ์แท้" ก็ต่อเมื่อ:

$$M = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \text{และ} \quad N = \frac{\partial F}{\partial t}$$

อย่างไรก็ตาม จากทฤษฎีของยังค์ (Young's Theorem) ที่ว่า:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}$$

ดังนั้น จึงอาจกล่าวได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ใด ๆ จะเรียกว่าเป็น สมการเชิงอนุพันธ์แท้ ก็ต่อเมื่อ:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} \qquad //$$

ทั้งนี้เพราะว่า:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y}$$

และ

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t}$$

โดยสรุปแล้ว อาจจะกล่าวโดยนัยกลับกันได้ว่า ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ใดมี:-

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} \qquad //$$

สมการเชิงอนุพันธ์นั้นก็จะคือ "สมกการเชิงอนุพันธ์แท้" เช่นนี้แล้ว เงื่อนไขดังกล่าวนี้ก็จะถือได้ว่าเป็นเงื่อนไขในการทดสอบความเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้ นั่นเอง

ในที่นี้ ถ้านำเงื่อนไขการทดสอบความเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้ข้างต้นนี้ มาทดสอบกับสมการเชิงอนุพันธ์ของตัวอย่างที่ว่า:

$$2ytdy \ t \ y^2dt = 0$$

ซึ่ง $M = 2yt$ แล้ว $\frac{\partial M}{\partial t} = 2y$ //

และ $N = y^2$ แล้ว $\frac{\partial N}{\partial y} = 2y$ //

นั่นคือ
$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

ดังนั้น จากการทดสอบข้างต้นนี้แสดงว่า สมการเชิงอนุพันธ์ในตัวอย่างนี้ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้ นั่นเอง

ในที่สุดนี้ จะเห็นได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์แท้ จะมีลักษณะทั่วไปเป็น:

$$dF(y,t) = 0$$

ฉะนั้น ผลเฉลยในรูปทั่วไป (general solution) ก็จะมีลักษณะเป็น:

$$F(y,t) = c$$

เช่นนี้แล้ว ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แท้ ก็อาจจะกระทำได้โดยง่าย เพียงแต่หาสมการดั้งเดิม (primitive function): $F(y,t)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าว แล้วจึงเทียบค่าสมการดั้งเดิมนั้นเข้ากับค่าคงที่ใด ๆ ตัวหนึ่ง (an arbitrary constant) เท่านั้น ก็เป็นอันสำเร็จผลดังต้องการ

ในที่นี้ จะขอแสดงวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปทั่วไป ดังต่อไปนี้:

วิธีการหาผลเฉลย (Method of Solution)

จากสมการเชิงอนุพันธ์แท้:

$$Mdy + Ndt = 0$$

ซึ่ง $$M = \frac{\partial F}{\partial y}$$

หรือ $$\frac{\partial F}{\partial y} = M$$

ดังนั้น เมื่ออินทิเกรตมุ่งต่อ y จะได้:

$$F(y,t) = \int Mdy + \psi(t) \qquad : \psi = \text{psi}$$

ในที่นี้ M เป็นอนุพันธ์บางส่วน (partial derivative) ของสมการดั้งเดิม F(y,t) ที่มุ่งต่อ y เท่านั้น ซึ่งหมายความว่า ในการหาค่าอนุพันธ์บางส่วนของ F(y,t) มุ่งต่อ y นั้น พจน์ที่อยู่ในรูปของ t และค่าคงที่ก็จะหายไป ทั้งนี้เพราะว่า t ก็เปรียบเสมือนค่าคงที่เช่นกัน แต่เมื่อย้อนกลับเข้าไปอินทิเกรต M มุ่งต่อ y บ้าง พจน์ซึ่งอยู่ในรูปของ t และค่าคงก็จะต้องหวนกลับคืนมาตามที่เคยเป็นอยู่ดังเดิม ดังนั้น ผลจากการอินทิเกรตกลับเข้าไปใน M มุ่งต่อ y จึงต้องปรากฏพจน์ที่อยู่ในรูปของ t และค่าคงที่ตามที่มีอยู่ดังเดิมด้วย ในที่นี้ พจน์ในรูปของ t ดังกล่าวไม่ปรากฏรูปแบบที่ชัดเจนเฉพาะตัว จึงได้แสดงไว้ในรูปทั่วไปเป็น $\psi(t)$ ดังที่ปรากฏอยู่ในสมการข้างต้นนั้น

ดังนั้น ปัญหาที่ปรากฏขึ้นหลังจากการอินทิเกรตเข้าไปใน M ก็คือ การหาพจน์ดั้งเดิมที่อยู่ในรูปของ $\psi(t)$ นั่นเอง อย่างไรก็ตาม วิธีที่จะหาพจน์ $\psi(t)$ นั้นสามารถกระทำได้โดยผ่านข้อเท็จจริงเกี่ยวกับค่าของ N เป็นสำคัญ ซึ่งสามารถที่จะแสดงให้เห็นเป็นลำดับได้ ดังนี้:

จาก
$$N = \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\int Mdy + \psi(t)\right] \quad : \int Mdy+\psi(t) = F$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int Mdy + \frac{\partial}{\partial t}\psi(t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int Mdy + \psi'(t) \quad : \psi'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\psi(t)$$

ดังนั้น
$$\psi'(t) = N - \frac{\partial}{\partial t}\int Mdy$$

เมื่ออินทิเกรตมุ่งต่อ t:
$$\int \psi'(t)dt = \int (N - \frac{\partial}{\partial t}\int Mdy)dt$$

ฉะนั้น
$$\psi(t) = \int Ndt - \int (\frac{\partial}{\partial t}\int Mdy)dt$$

ผลที่ได้ข้างต้นนี้คือ พจน์ในรูปของ t ที่ต้องการ ดังนั้นเมื่อแทนค่า $\psi(t)$ ใน $F(y,t)$ จะได้:

$$F(y,t) = \int Mdy + \left[\int Ndt - \int (\frac{\partial}{\partial t}\int Mdy)dt\right]$$

และจากผลเฉลยในรูปทั่วไป (general solution):

$$F(y,t) = c$$

ดังนั้น ที่สุดแล้ว:

$$\int M dy \; t \; [\int N dt - \int (\frac{\partial}{\partial t}\int M dy) dt] = c$$

ผลเฉลยรูปทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แท้ข้างต้นนี้ ได้ละค่าคงที่ของการอินทิเกรตของพจน์ทั้งสามซึ่งอยู่ทางด้านซ้ายมือไว้โดยมิได้เขียนให้ปรากฎอยู่ด้วย ทั้งนี้เพราะว่าถึงแม้จะแสดงค่าคงที่ดังกล่าวไว้ ค่าคงที่เหล่านั้นก็จะไปรวมกับค่าคงที่ c ทางด้านขวามือทั้งหมด ซึ่งในที่สุดก็จะไม่ปรากฏค่าคงที่เหล่านั้นโดยเด่นชัดเช่นกัน ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า ผลเฉลยข้างต้นได้รวมค่าคงที่ของการอินทิเกรตของทุกพจน์ไว้กับค่าคงที่ c แล้วก็ได้

ลำดับนี้ จะขอแสดงวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แท้ ในรูปแบบของตัวอย่างที่มีสมการเฉพาะตัว อันจะก่อให้เกิดความเข้าใจที่ถ่องแท้อีกชั้นหนึ่ง ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 6.5: ตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แท้

จงหาค่าของสมการเชิงอนุพันธ์แท้: $2ytdy + y^2 dt = 0$

วิธีทำ:

จากสมการเชิงอนุพันธ์แท้ที่กำหนด:

$$Zytdy \; t \; y^2 dt = 0$$

เมื่อเทียบกับสมการเชิงอนุพันธ์แท้ลักษณะมาตรฐานทั่วไป ที่ว่า:

$$Mdy \; t \; Ndt = 0$$

จะพบว่า: $M = \frac{\partial F}{\partial y} = 2yt$

และ $N = \frac{\partial F}{\partial t} = y^2$

ในที่นี้ เพื่อให้การพิจารณาหาค่าของสมการที่เป็นปัญหานี้ เห็นได้เด่นชัดขึ้น จึงขอดำเนินการเป็นลำดับขั้นตอน ดังต่อไปนี้:

ขั้นที่หนึ่ง: ดำเนินการหาสมการดั้งเดิม F(y,t) จาก M

จาก $\frac{\partial F}{\partial y} = M = 2yt$

ดังนั้น เมื่ออินทิเกรตมุ่งต่อ y จะได้สมการดั้งเดิม:

$$F(y,t) = \int 2yt\,dy + \psi(t)$$

$$= y^2t + \psi(t)$$

ข้อสังเกต: สมการดั้งเดิมที่ได้นี้ ยังมีพจน์ ψ(t) ปรากฏอยู่

ขั้นที่สอง: ถอดสมการหาค่า ψ(t) จากสมการดั้งเดิม F(y,t) โดยผ่าน N

จาก $F(y,t) = y^2t\ t\ \psi(t)$

เมื่อหาอนุพันธ์มุ่งต่อ t จะได้: $\frac{\partial F}{\partial t} = y^2 + \psi'(t)$: $\psi'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\psi(t)$

แต่ $\frac{\partial F}{\partial t} = N$

ดังนั้น $N = y^2\ t\ \psi'(t)$ //

และโดยเหตุที่ $N = y^2$ //

เช่นนี้แล้ว $y^2 = y^2 + \psi'(t)$

ฉะนั้น $\psi'(t) = 0$

และเมื่ออินทิเกรตมุ่งต่อ t จะได้:

$$\psi(t) = \int \psi'(t)dt$$

$$= \int 0\ d\ t \qquad : \psi'(t) = 0$$

$$= k \qquad : k = \text{ค่าคงที่}$$

ข้อสังเกต: $\psi(t)$ ที่ได้ในที่นี้เป็นค่าคงที่

ขั้นที่สาม: ถอดหาค่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่ต้องการ โดยการแทนค่า $\psi(t)$ ที่ได้จากขั้นที่สอง ลงในสมการตั้งเดิม $F(y,t)$ ที่ได้มาจากขั้นที่หนึ่ง

จาก $F(y,t) = y^2t\ t\ \psi(t)$

แทนค่า $\psi(t)$ ที่ได้จากขั้นที่สอง:

ดังนั้น $F(y,t) = y^2t\ t\ k \qquad : k = \psi(t)$

แต่ด้วยเหตุที่ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แท้ คือ:

$$F(y,t) = c$$

เช่นนี้แล้ว $y^2t + k = c$

และด้วยเหตุที่ ค่าคงที่ k สามารถที่จะรวมกับค่าคงที่ c ได้

ฉะนั้น $y^2t = c$: ค่าคงที่ k รวมเข้ากับ c

นั่นคือ $y = ct^{-1/2}$: c = ค่าคงที่ใด ๆ

หรือ $y(t) = ct^{-1/2}$: y(t) = y

ในที่สุด ค่าที่ได้นี้ก็คือ "ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แท้" ที่กำหนดนั่นเอง

ตอบ //

ตัวอย่าง 6.6: ตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

จงหาค่าของสมการเชิงอนุพันธ์: $(3t - 2y)dy + (2t + 3y)dt = 0$

วิธีทำ:

ข้อพิจารณา: สมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดข้างต้น มิได้กำหนดว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้ ดังนั้น จึงควรที่จะทดสอบดูเสียก่อน ดังนี้:

จาก $(3t - 2y)dy + (2t + 3y)dt = 0$

ถ้าให้ $M = 3t - 2y$

และ $N = 2t + 3y$

ดังนั้น $\frac{a\,n}{\partial t} = 3$

และ $\frac{\partial N}{\partial y} = 3$

นั่นคือ $$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} = 3$$

แสดงว่า สมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แท้ ดังนั้น จึงสามารถดำเนินการหาค่าสมการได้ ซึ่งการหาค่าสมการก็อาจจะดำเนินการเป็นลำดับขั้นตอน ดังเช่นที่ได้เคยดำเนินการมาแล้วในตัวอย่าง 6.5 อันมีขั้นตอนการดำเนินงาน ดังต่อไปนี้:

ขั้นที่หนึ่ง: ดำเนินการหาสมการดั้งเดิม F(y,t) จาก M

จาก $$\frac{\partial F}{\partial y} = M = 3t - 2y$$

ดังนั้น เมื่ออินทิเกรตมุ่งต่อ y จะได้สมการดั้งเดิม:

$$F(y,t) = \int (3t - 2y)dy + \psi(t)$$

$$= 3ty - y^2 + \psi(t)$$

ข้อสังเกต: สมการดั้งเดิมที่ได้นี้ ยังมีพจน์ $\psi(t)$ ปรากฏอยู่