บทที่ 6

สมการเชิงอนุพันธ์

(Differential Equations)

บทที่ 6
สมการเชิงอนุพันธ์
(Differential Equations)

เค้าโครงเรื่อง :

1. ความทั่วไป

2. สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น กรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่และค่าของสมการเป็นค่าคงที่

   2.1 กรณีเอกพันธ์

   2.2 กรณีไร้เอกพันธ์

   2.3 การประยุกต์ทางเศรษฐศาสตร์

3. สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น กรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นตัวแปรและค่าของสมการเป็นตัวแปร

   3.1 กรณีเอกพันธ์

   3.2 กรณีไร้เอกพันธ์

   3.3 การประยุกต์ทางเศรษฐศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อศึกษาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์นี้จบแล้ว นักศึกษาสามารถ :

1. อธิบายความหมายของสมการเชิงอนุพันธ์ได้อย่างถูกต้อง
2. อธิบายความแตกต่างของสมการเชิงอนุพันธ์แต่ละลักษณะได้
3. อธิบายและหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในแต่ละลักษณะกรณีได้อย่างถูกต้อง
4. ประยุกต์ความรู้ความเข้าใจ เรื่องราวเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ ให้ไปใช้กับปัญหาทางเศรษฐกิจที่เกิดขึ้น ในทางทฤษฎี และในทางปฏิบัติปัจจุบัน ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม

บทที่ 6
สมการเชิงอนุพันธ์
(Differential Equations)

1. ความทั่วไป:

สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) หมายถึง สมการที่มีอนุพันธ์ (derivative : dy/dt) หรือผลต่างอนุพัทธ์ (differential : dy) ปรากฏอยู่ ซึ่งอนุพันธ์นี้จะเป็นครั้งที่เท่าใดก็ได้ โดยที่อันดับครั้งสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏอยู่ จะแสดงอันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ๆ เช่นถ้า อนุพันธ์สูงสุดที่ปรากฏอยู่เป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (dy/dt) ก็เรียกสมการนั้นว่า สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (first-order differential equations) แต่ถ้าอนุพันธ์สูงสุดที่ปรากฏอยู่เป็นอันดับที่ n (d^ny/dt^n) ใด ๆ สมการนั้นก็เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n (n^{th}-order differential equations)

ในขณะเดียวกัน สมการเชิงอนุพันธ์นี้ จะมีอนุพันธ์ในรูปยกกำลังเท่าไรก็ได้เช่นกัน กล่าวคือ อาจจะเป็นกำลังหนึ่ง เช่น dy/dt หรือ d^ny/dt^n และกำลัง m ใด ๆ เช่น $(dy/dt)^m$ หรือ $(d^ny/dt^n)^m$ โดยระดับกำลังสูงสุดที่ปรากฏอยู่ จะแสดงระดับ (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ๆ เช่นถ้า ระดับกำลังสูงสุดที่ปรากฏอยู่เป็นระดับกำลังหนึ่ง ก็เรียกสมการนี้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ระดับที่หนึ่ง (first-degree differential equations) และโดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้าตัวแปรตาม y ยกกำลังหนึ่งด้วย และไม่ปรากฏว่าพจน์ใดอยู่ในรูปผลคูณของ y(dy/dt) แล้ว สมการนั้นก็จะมีลักษณะเชิงเส้น (linear) ด้วย ดังนั้นถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ใดมีอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอนุพันธ์นั้นยกกำลังหนึ่ง โดยมีตัวแปรตาม y ยกกำลังหนึ่งด้วย และไม่มีพจน์ใดอยู่ในรูปผลคูณของตัวแปรตามกับอนุพันธ์แล้ว สมการนั้นก็เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น (first-order linear differential equations) ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้นที่กล่าวถึงนี้ จะมีรูปสมการในลักษณะทั่วไป ดังต่อไปนี้

รูปสมการลักษณะทั่วไป:

$$\frac{dy}{dt} \text{ t } u(t)y = w(t)$$

ในที่นี้ y คือ ตัวแปรตาม และ t คือ ตัวแปรอิสระ โดยที่ u และ w เป็นฟังก์ชันของ t และทั้งนี้ u และ w จะเป็นฟังก์ชันของ t ในรูปแบบใดก็ได้ กล่าวคือ อาจจะเป็นฟังก์ชันของ t ในรูปยกกำลัง (power function) เช่น t^2 หรือในรูปฟังก์ชันยกกำลังด้วยตัวแปร (exponential function) เช่น e^t หรือแม้แต่รูปที่สลับซับซ้อนอื่น ๆ รวมถึงอาจเป็นค่าคงที่ (constant) เสียเลยก็ได้เช่นกัน อนึ่ง ถ้าฟังก์ชัน "u" ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตาม y เป็นค่าคงที่ สมการเชิงอนุพันธ์นี้ ก็จะเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ กรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่ (differential equations with constant coefficient) และถ้าฟังก์ชัน "w" ซึ่งเป็นค่าของสมการ เป็นค่าคงที่ด้วย ก็จะเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ กรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่ และค่าสมการเป็นค่าคงที่ (differential equations with constant coefficient and constant term)

2. สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น: กรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่และค่าสมการเป็นค่าคงที่

สมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งมีอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง โดยอนุพันธ์นั้นยกกำลังหนึ่ง และมีคุณลักษณะเชิงเส้น โดยมีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตามเป็นค่าคงที่ และมีค่าสมการเป็นค่าคงที่ด้วย หรือที่เรียกกันว่า สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น กรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่ และค่าสมการเป็นค่าคงที่ (first-order linear differential equations with constant coefficient and constant term) มีลักษณะทั่วไป ดังนี้:

ลักษณะทั่วไป: $$\frac{dy}{dt} + ay = b \qquad : a,b = \text{ค่าคงที่}$$

อย่างไรก็ตาม ค่าคงที่ของสมการก็อาจจะมีได้สองลักษณะกรณี คือ:

1. กรณีที่ค่าคงที่ของสมการเป็นศูนย์ ซึ่งอาจจะเรียกว่า กรณีเอกพันธ์ (homogeneous case)

2. กรณีที่ค่าคงที่ของสมการไม่เป็นศูนย์ ซึ่งอาจเรียกว่า กรณีไร้เอกพันธ์ (nonhomogeneous case)

ในลำดับนี้ เพื่อให้เข้าใจได้ดียิ่งขึ้น จะขอกล่าวถึงแต่ละกรณีเป็นลำดับกันไป ดังต่อไปนี้:

2.1 กรณีเอกพันธ์

กรณีเอกพันธ์ (the homogeneous case) หมายถึง กรณีที่สมการเชิงอนุพันธ์มีค่าคงที่ของสมการเป็นศูนย์

ในที่นี้ กรณีเอกพันธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น เมื่อสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่และค่าสมการเป็นค่าคงที่ (first-order linear differential equations with constant coefficient and constant term) มีลักษณะทั่วไป ดังนี้:[1]

ลักษณะ: $$\frac{dy}{dt} + ay = 0$$; a = ค่าคงที่ใด ๆ

---

[1] สมการนี้เรียกว่าเป็น "เอกพันธ์" (homogeneous) ด้วยเหตุผลที่ว่า ทุก ๆ พจน์ (term) อยู่ในรูปกำลังหนึ่ง (first degree) ของตัวแปรตาม y หรือ dy/dt ทั้งสิ้น แม้กระทั่งค่าคงที่ที่เป็นศูนย์ ก็ถือได้ว่าอยู่ในรูปยกกำลังหนึ่งของ y ทั้งนี้ด้วยเหตุที่ว่า $0y = 0$

อนึ่ง สมการข้างต้น อาจจัดรูปใหม่ได้เป็น:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -a$$

ซึ่งเมื่อต้องการจะหาวิถีการเคลื่อนไหว หรือกาลวิถีของ y (time path of y) ก็จะสามารถดำเนินการได้โดยง่าย ด้วยการอินทิเกรตเข้าไปในสมการข้างต้นมุ่งต่อ t ดังนี้:

จาก $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -a$$

แล้ว $$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt = \int -a\,dt \qquad \text{: อินทิเกรตมุ่งต่อ } t$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int a\,dt \qquad \text{: กฎการแทนที่}$$

$$\ln y + c_1 = -at + c_2 \qquad \text{: กฎของลอการิทึม}$$

$$\ln y = -at + c \qquad : c = c_2 - c_1$$

ดังนั้น $$e^{\ln y} = e^{-at+c} \qquad \text{: รูป } e \text{ ยกกำลัง}$$

$$y = e^{-at}\cdot e^{c} \qquad \text{: จาก } e^{\ln y} = y$$

หรือ $$y(t) = Ae^{-at} \qquad : A = e^{c}$$

ฉะนั้น กาลวิถีของ y ในรูปผลเฉลยทั่วไป (general solution) ก็คือ:

$$y(t) = Ae^{-at}$$

และเมื่อ $t = 0$:

$$y(0) = Ae^{0}$$

ดังนั้น กาลวิถีของ y ในรูปผลเฉลยเฉพาะกรณี (definite solution) ก็จะคือ:

$$y(t) = y(0)e^{-at} \qquad //$$

หมายเหตุ:

การที่ $y(t) = Ae^{-at}$ เรียกว่าเป็นผลเฉลยในรูปแบบทั่วไป (general solution) ด้วยเหตุที่ว่า ค่าคงที่ A เป็นค่าคงที่ใด ๆ ไม่เฉพาะเจาะจง (arbitrary constant) แต่ $y(t) = y(0)e^{-at}$ เป็นผลเฉลยรูปแบบเฉพาะเจาะจง (particular solution) ก็ด้วยเหตุที่ ค่าคงที่ A มีค่าเฉพาะตัว และโดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อ A = y(0) ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะเมื่อเวลาเบื้องต้น: t=0 ดังนั้น ผลเฉลยในรูปแบบเฉพาะเจาะจงนี้ อาจจะเรียกให้เด่นชัดและรัดกุมยิ่งขึ้นว่าเป็น ผลเฉลยในรูปแบบเฉพาะกรณี (definite solution) ก็ได้

อนึ่ง เป็นที่น่าสังเกตว่า ผลสรุปสุดท้ายของสมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้นนี้ มีฟังก์ชันอยู่ในรูป y(t) ซึ่งถ้า t หมายถึง เวลาใด ๆ ที่มิได้กำหนดเฉพาะแน่นอนตายตัวแล้ว ผลที่ได้นั้นก็จะหมายถึง เรื่องเกี่ยวกับกาลวิถี (time path) แต่ถ้า t เป็นค่าเฉพาะเจาะจง หรือเป็นค่าที่สามารถทราบได้ ผลสรุปสุดท้ายของสมการนั้น ก็อาจจะสามารถคำนวณสรุปได้ค่าเป็นตัวเลข (numerical value) โดยไม่มีอนุพันธ์หรือรูปแบบอื่นใดของอนุพันธ์ปะปนอยู่เลย

2.1 กรณีไร้เอกพันธ์

กรณีไร้เอกพันธ์ (the nonhomogeneous case) หมายถึง กรณีที่สมการเชิงอนุพันธ์มีค่าคงที่ของสมการไม่เป็นศูนย์ (nonzero constant)

ในที่นี้ กรณีไร้เอกพันธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น เมื่อสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่และค่าสมการเป็นค่าคงที่ (first-order linear differential equations with constant coefficient and constant term) มีลักษณะทั่วไป ดังนี้:

ลักษณะ: $$\frac{dy}{dt} + ay = b \qquad : a,b = \text{ค่าคงที่ใด ๆ}$$

จากรูปทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์กรณีไร้เอกพันธ์ข้างต้นนี้ อาจพิจารณาได้ว่า แท้ที่จริงแล้ว สมการนี้มีส่วนประกอบเป็น: สมการเอกพันธ์กับส่วนของค่าคงที่ของสมการร่วมกัน ดังนั้น อาจจะกล่าวได้ว่า สมการเอกพันธ์ เป็นเพียงส่วนสมการลดรูป (reduced equation) ของสมการไร้เอกพันธ์เต็มรูป (complete equation) นั่นเอง เช่นนี้แล้ว ผลเฉลยของสมการไร้เอกพันธ์ ก็จะประกอบด้วย ส่วนผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ อันเป็นฟังก์ชันเติมเต็ม (complementary function: y_c) ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของผลเฉลยเต็มรูป กับอีกส่วนหนึ่งซึ่งเป็นอินทิกรัลเฉพาะ (particular integral: y_p) ซึ่งได้จากผลเฉลยเฉพาะกรณีของสมการไร้เอกพันธ์เต็มรูปนั่นเอง

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการไร้เอกพันธ์ จึงอาจหาได้จากผลเฉลยในรูปทั่วไป (general solution) ของสมการไร้เอกพันธ์ลดรูป (reduced equation) กับ ผลเฉลยเฉพาะกรณีของสมการไร้เอกพันธ์เต็มรูปประกอบกัน ซึ่งค่าของผลเฉลยดังกล่าว จะพิจารณาได้เป็นลำดับดังต่อไปนี้:

จากสมการไร้เอกพันธ์เต็มรูป (complete equation):

$$\frac{dy}{dt} + ay = b$$

จะได้สมการไร้เอกพันธ์ลดรูป หรือก็คือ สมการเอกพันธ์ เป็น:

สมการไร้เอกพันธ์ลดรูป (reduced equation):

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยทั่วไป (general solution) ของสมการเอกพันธ์ หรือก็คือ ฟังก์ชันเติมเต็ม (complementary function: y_c) ของสมการไร้เอกพันธ์ ดังนี้:

$$y_c = Ae^{-at} \qquad //$$

สำหรับส่วนที่เป็นอินทิกรัลเฉพาะ (particular integral) ซึ่งก็คือ ผลเฉลยเฉพาะกรณี (definite solution) ของสมการไร้เอกพันธ์เต็มรูป สามารถหาได้สองลักษณะกรณี กล่าวคือ อาจหาได้จากรูปแบบสมการค่าคงที่ ซึ่งก็จะได้ผลเฉลยเป็นค่าคงที่ (constant solution) หรืออาจจะหาได้จากรูปสมการที่มิใช่ค่าคงที่ ซึ่งก็จะได้ผลเฉลยที่มิใช่ค่าคงที่ (non-constant solution) อย่างไรก็ตาม แต่ละลักษณะก็จะเหมาะสมในแต่ละกรณีแตกต่างกันไป ในที่นี้ จะแสดงให้เห็นแต่ละลักษณะเป็นลำดับกันไป ดังนี้:

ในกรณีที่สมการอยู่ในรูปค่าคงที่ กล่าวคือ:

ถ้า $y = k$: k = ค่าคงที่ใด ๆ

แล้ว $\frac{dy}{dt} = 0$

และจาก สมการไร้เอกพันธ์เต็มรูป (complete equation):

$$\frac{dy}{dt} + ay = b$$

และแล้ว $ay = b$ $: \frac{dy}{dt} = 0$

ดังนั้น $y_p = \frac{b}{a}$ //

ในที่นี้ ผลเฉลย y_p จะเป็นค่าคงที่ (constant solution) แต่ทั้งนี้ ผลเฉลยข้างต้นจะเป็นจริงได้ ก็ต่อเมื่อ a ไม่ใช่ศูนย์ $(a \neq 0)$ เท่านั้น

ในที่สุด เมื่อรวมฟังก์ชันเติมเต็มเข้ากับอินทิกรัลเฉพาะ จะได้ผลเฉลยทั่วไป (general solution) ของสมการไร้เอกพันธ์ กรณีที่ $a \neq 0$ ดังนี้:

$$y_t = y_c + y_p$$

$$= Ae^{-at} + \frac{b}{a}$$

: general solution, case of $a \neq 0$

ถ้า A มีค่าเฉพาะตัว โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อเป็นกรณีเฉพาะเวลาเบื้องต้น: $t=0$ จะได้ค่าของ A ดังนี้:

จาก $y(t) = Ae^{-at} + \frac{b}{a}$

เมื่อ $t = 0$: $y(0) = A + \frac{b}{a}$

และแล้ว $A = y(0) - \frac{b}{a}$

ดังนั้น $y(t) = [y(0) - \frac{b}{a}]e^{-at} + \frac{b}{a}$

: definite solution, case of $a \neq 0$

ผลเฉลยข้างต้นนี้เป็นผลเฉลยของ สมการไร้เอกพันธ์ในรูปแบบเฉพาะกรณี (definite solution, case of $a \neq 0$) ซึ่งพิจารณามาจากผลเฉลยในรูปแบบทั่วไป (general solution) ที่ประกอบเงื่อนไขเบื้องต้นแล้ว

ลำดับนี้ เพื่อให้มีความเข้าใจได้เด่นชัดขึ้น จึงขอยกตัวอย่าง การหาผลเฉลยของสมการไร้เอกพันธ์บางประการมาประกอบด้วย ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 6.1: ตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการไร้เอกพันธ์

จงหาค่าของสมการ: $\frac{dy}{dt} + 3y = 9$ เมื่อมีเงื่อนไขเบื้องต้นเป็น $y(0) = 10$

วิธีทำ:

จากรูปสมการไร้เอกพันธ์มาตรฐานทั่วไป:

$$\frac{dy}{dt} + ay = b$$

ในที่นี้ สมการที่กำหนด คือ:

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 9$$

นั่นคือ: $a = 3$ และ $b = 9$ โดยมี $y(0) = 10$

เมื่อ $a \neq 0$ จะได้ผลเฉลยในรูปเฉพาะกรณี (definite solution, case of $a \neq 0$) เป็น:

$$y(t) = [y(0) - \frac{b}{a}]e^{-at} + \frac{b}{a}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการไร้เอกพันธ์ที่กำหนด ก็จะคือ:

$$y(t) = [10 - \frac{9}{3}]e^{-3t} + \frac{9}{3}$$

$$= 7e^{-3t} \ t \ 3$$ ตอบ //

ตัวอย่าง 6.2: ตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ ด้วยรูปแบบของสมการไร้เอกพันธ์

จงหาค่าของสมการ: $\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ เมื่อมีเงื่อนไขเบื้องต้นเป็น $y(0) = 1$

วิธีทำ:

จาก สมการที่กำหนด คือ:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

ทำนองเดียวกันกับ ตัวอย่าง 6.1 เมื่อเทียบกับสมการไร้เอกพันธ์มาตรฐาน จะพบว่า: $a = 2$ และ $b = 0$ โดยมี $y(0) = 1$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการที่กำหนด ก็จะคือ:

$$y(t) = [1 - 0]e^{-2t} + 0$$

$$= e^{-at}$$ ตอบ //

ข้อสังเกต:

ตัวอย่าง 6.1 คือปัญหาของสมการไร้เอกพันธ์ที่แท้จริง แต่ตัวอย่าง 6.2 เป็นปัญหาของสมการเอกพันธ์ อย่างไรก็ตาม ปัญหาทั้งสองก็สามารถหาผลเฉลยในรูปแบบของสมการไร้เอกพันธ์ที่แท้จริงได้ ที่เป็นเช่นนี้ก็ด้วยเหตุว่า สมการเอกพันธ์ แท้ที่จริงก็คือ สมการไร้เอกพันธ์เมื่อค่าคงที่ของสมการเป็นศูนย์ ($b = 0$) นั่นเอง

อนึ่ง รูปแบบผลเฉลยของสมการไร้เอกพันธ์ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น เป็นกรณีเฉพาะแบบเมื่อสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่ที่ไม่ใช่ศูนย์ ($a \neq 0$) เท่านั้น แต่ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่ที่เป็นศูนย์ ($a = 0$) การหาผลเฉลยโดยรูปแบบดังกล่าวข้างต้น ก็จะกระทำมิได้

ในกรณีที่ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่ที่เป็นศูนย์ ($a = 0$) สมการเชิงอนุพันธ์ ก็จะมีรูปแบบ ดังนี้ คือ:

$$\frac{dy}{dt} = b$$

และแล้ว การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ก็จะกระทำได้โดยง่าย ด้วยการอินทิเกรตโดยตรงเข้าไปในสมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้นนั้น ที่สุดก็จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าว ต่อไปนี้:

จาก $$\frac{dy}{dt} = b$$

แล้ว $$\int \frac{dy}{dt}\, dt = \int b\, dt$$

ดังนั้น $$y(t) = bt + c$$ 4

ผลเฉลยที่ได้ข้างต้นนี้ ประกอบด้วย ฟังก์ชันเติมเต็ม (complementary function: y_c) และอินทิกรัลเฉพาะ (particular integral: y_p) เช่นเดียวกันกับรูปแบบผลเฉลยของสมการไร้เอกพันธ์ที่ได้กล่าวมาแล้วนั่นเอง ดังที่จะเห็นจริงได้จากการพิจารณา ต่อไปนี้:

จากฟังก์ชันเติมเต็ม (complementary function: y_c) ของสมการไร้เอกพันธ์ทั่วไป:

$$y_c = Ae^{-at}$$

เมื่อ $a = 0$:
$$y_c = Ae^0$$
$$= A \qquad : A = \text{ค่าคงที่ใด ๆ}$$

สำหรับ อินทิกรัลเฉพาะ (particular integral: y_p) ในกรณีนี้นั้น ไม่สามารถที่จะพิจารณาในลักษณะของสมการในรูปค่าคงที่ ($y = k$) ดังเช่นที่แล้วมา เหตุที่เป็นดังนี้เพราะว่า เมื่อ $a = 0$ จะไม่สามารถหา y ได้ ดังนั้น จึงจำเป็นที่จะต้องหาอินทิกรัลเฉพาะ ในรูปผลเฉลยที่มิใช่ค่าคงที่ (nonconstant solution) ซึ่งจะสามารถดำเนินการได้ ดังนี้:

ในกรณีที่สมการไม่อยู่ในรูปค่าคงที่ กล่าวคือ:

ถ้า
$$y = kt$$

แล้ว
$$\frac{dy}{dt} = k$$

และจาก สมการไร้เอกพันธ์เต็มรูป (complete equation):

$$\frac{dy}{dt} = b$$

และแล้ว $k = b$; $\frac{dy}{dt} = k$

แต่จาก $y = kt$

ดังนั้น $y_p = bt$ //

ในที่สุด เมื่อรวมฟังก์ชันเติมเต็มเข้ากับอินทิกรัลเฉพาะ จะได้ผลเฉลยทั่วไป (general solution) ของสมการไร้เอกพันธ์ กรณีที่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นศูนย์ ดังต่อไปนี้:

จาก $y(t) = y_c + y_p$

ดังนั้น $y(t) = Atbt$. : แทนค่า y_c และ y_p

; general solution, case of a = 0

โดยเหตุที่ A หมายถึง ค่าคงที่ใด ๆ เช่นเดียวกันกับ c ซึ่งเป็นค่าคงที่ใด ๆ เหมือนกัน ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปที่ได้จากการอินทิเกรตโดยตรง ที่ว่า:

$$y(t) = b\,t\,t\,c$$

ก็จะคือ ผลเฉลยที่ประกอบด้วย ฟังก์ชันเติมเต็มและอินทิกรัลเฉพาะรวมกัน ดังที่ได้แสดงให้เห็นโดยเด่นชัดแล้วนั่นเอง

อนึ่ง จะสังเกตเห็นได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ กรณีที่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรมีค่าเป็นศูนย์นี้ ฟังก์ชันเติมเต็มจะอยู่ในรูปของค่าคงที่ แต่อินทิกรัลเฉพาะจะอยู่ในรูปตัวแปร: t ซึ่งตรงกันข้ามกับ ผลเฉลยของกรณีที่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรมีค่าไม่เป็นศูนย์ ซึ่งมีฟังก์ชันเติมเต็มอยู่ในรูปของตัวแปร: t แต่อินทิกรัลเฉพาะกลับอยู่ในรูปของค่าคงที่

สำหรับ กรณีที่ค่าคงที่ A มีค่าเฉพาะตัว โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อเป็นกรณีเฉพาะเวลาเบื้องต้น: $t = 0$ จะได้ค่าของ A ดังนี้:

จาก $$y(t) = A + bt$$

เมื่อ $t = 0$: $$y(0) = A$$

ดังนั้น $$y(t) = y(0) + bt$$

: definite solution, case of $a = 0$

ผลเฉลยข้างต้นนี้เป็นผลเฉลยของ สมการไร้เอกพันธ์ในรูปแบบเฉพาะกรณี ในลักษณะที่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรมีค่าเป็นศูนย์ (definite solution, case of $a = 0$) ซึ่งได้มาจากการพิจารณาผลเฉลยในรูปแบบทั่วไป (general solution) ที่ประกอบเงื่อนไขเบื้องต้นแล้ว

ลำดับนี้ เพื่อให้มีความเข้าใจได้เด่นชัดขึ้น จึงขอยกตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการไร้เอกพันธ์ กรณีที่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรมีค่าเป็นศูนย์มาประกอบด้วย ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 6.3: ตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการไร้เอกพันธ์ กรณี $a = 0$

จงหาค่าของสมการ: $\frac{dy}{dt} = 2$ เมื่อมีเงื่อนไขเบื้องต้นเป็น $y(0) = 10$

วิธีทำ:

จากรูปสมการไร้เอกพันธ์มาตรฐานทั่วไป กรณีที่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรมีค่าเป็นศูนย์:

$$\frac{dy}{dt} = b$$

ในที่นี้ สมการที่กำหนด คือ:

$$\frac{dy}{dt} = 2$$

นั่นคือ: $b = 2$ โดยมี $y(0) = 10$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยในรูปเฉพาะกรณี (definite solution, case of $a = 0$) เป็น:

$$y(t) = y(0) + bt$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการที่กำหนด ก็จะคือ:

$$y(t) = 10 + 2t$$ ตอบ //

อนึ่ง ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ในรูปแบบกรณีต่าง ๆ ที่ได้วิเคราะห์มาโดยลำดับแล้วนี้ สามารถที่จะทดสอบความถูกต้องได้ โดยวิธีการหาอนุพันธ์ (differentiation) เพื่อย้อนกลับไปสู่สมการเชิงอนุพันธ์ดั้งเดิมได้ ทั้งนี้ด้วยเหตุที่ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ได้จากการอินทิเกรต (integration) ของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ๆ ดังนั้นเมื่อดำเนินการหาอนุพันธ์ (differentiate) ผ่านเข้าไปในผลเฉลยดังกล่าวแล้ว ก็จะย้อนกลับไปสู่ สมการเชิงอนุพันธ์ดั้งเดิม นั่นเอง

ในลำดับนี้ เพื่อเป็นการยืนยันความถูกต้องของแนวคิดดังกล่าว จะขอแสดงวิธีการทดสอบความถูกต้องของผลเฉลยเพื่อเป็นตัวอย่าง ดังนี้:

จาก สมการเชิงอนุพันธ์ กรณีไร้เอกพันธ์ คือ:

$$\frac{dy}{dt} + ay = b$$

และ ผลเฉลยในรูปเฉพาะกรณี $a \neq 0$ (definite solution, case of $a \neq 0$) คือ:

$$y(t) = [y(0) - \frac{b}{a}]e^{-at} + \frac{b}{a}$$

แล้ว อนุพันธ์มุ่งต่อ t จะคือ:

$$\frac{dy}{dt} = -a[y(0) - \frac{b}{a}]e^{-at}$$

$$= -a\{[y(0) - \frac{b}{a}]e^{-at} + \frac{b}{a} - \frac{b}{a}\}$$

$$= -a\{y(t) - \frac{b}{a}\}$$: แทนค่า $y(t)$

: โดย $y(t) = [y(0) - \frac{b}{a}]e^{-at} + \frac{b}{a}$

$$= -ay(t) + b$$

หรือ $$\frac{dy}{dt} = -ay + b$$: $y = y(t)$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dt} + ay = b$$: สมการเชิงอนุพันธ์ดั้งเดิม

ผลจากการทดสอบนี้แสดงให้เห็นว่า เมื่อดำเนินการหาค่าอนุพันธ์ (differentiate) ผ่านเข้าไปในผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แล้ว ก็ได้สมการเชิงอนุพันธ์ดั้งเดิมจริง ดังนั้น ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่หาได้มานั้นเป็นผลเฉลยที่ถูกต้องจริง นอกจากนี้ การทดสอบข้างต้นยังแสดงให้เห็นต่อไปได้ว่า ผลเฉลยดังกล่าวเป็นไปตามเงื่อนไขเบื้องต้นที่กำหนดด้วย ซึ่งจะเห็นจริงได้ ดังต่อไปนี้:

จาก ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ในรูปเฉพาะกรณี $a \neq 0$ คือ:

$$y(t) = [y(0) - \frac{b}{a}]e^{-at} + \frac{b}{a}$$

เมื่อ $t = 0$:

$$y(0) = [y(0) - \frac{b}{a}]e^{0} + \frac{b}{a}$$

$$= [y(0) - \frac{b}{a}] \; t \; \frac{b}{a}$$

$$= y(0)$$

ผลของการทดสอบนี้แสดงว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ตอบสนองและเป็นไปตามเงื่อนไขเบื้องต้นที่กำหนดจริง ทั้งนี้ด้วยเหตุที่ว่า เมื่อนำเงื่อนไขเบื้องต้นที่กำหนด คือ $t = 0$ แทนลงในผลเฉลยดังกล่าว จะทำให้ด้านขวามือเท่ากับด้านซ้ายมือจริง

จากการได้ศึกษาเรื่องเกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์มาโดยลำดับแล้วนั้น จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้จากผลของการอินทิเกรตฟังก์ชันที่กำหนดนั่นเอง ดังนั้น เมื่อได้ผลเฉลยสุดท้ายของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ต้องการแล้ว ก็ย่อมสามารถทดสอบความถูกต้องของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ๆ ได้ด้วย ซึ่งเมื่อได้ดำเนินการทดสอบความถูกต้องโดยสมบูรณ์แล้ว ย่อมเชื่อมั่นได้ว่า ผลเฉลยที่ได้มานั้นเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดมาแต่ดั้งเดิมโดยแท้จริง

2.3 การประยุกต์ในทางเศรษฐศาสตร์บางประการ

การนำความรู้ในเรื่องเกี่ยวกับ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น กรณีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นค่าคงที่ และค่าสมการเป็นค่าคงที่ (first-order linear differential equations with constant coefficient and constant term) ทั้งในกรณีเอกพันธ์ (honogeneous case) และกรณีไร้เอกพันธ์ (nonhonogeneous case) มาประยุกต์ใช้กับเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์นั้น สามารถที่จะกระทำได้ทั้งในขอบข่ายของ เศรษฐศาสตร์มหภาค (macoeconomics) และเศรษฐศาสตร์จุลภาค (microeconomics) สำหรับในที่นี้ ขอเสนอตัวอย่างการประยุกต์ความรู้ที่เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าว ในกรณีเอกพันธ์กับเรื่องราวบางประการของเศรษฐศาสตร์มหภาค และกรณีซึ่งไร้เอกพันธ์กับเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์จุลภาคเป็นลำดับกันไป เพื่อเป็นแนวทางในการประยุกต์ความรู้เรื่องเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์นี้ในเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์ที่เกี่ยวข้องต่อไป

2.3.1 กรณีเอกพันธ์

การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์กรณีเอกพันธ์ มาใช้กับเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์มหภาคเรื่องหนึ่งที่มีลักษณะเหมาะสม เห็นจะได้แก่ เรื่องเกี่ยวกับการวิเคราะห์ความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ โดยเฉพาะรูปแบบจำลองของท่านโดมาร์ (Domar growth model) ซึ่งการวิเคราะห์ดังกล่าว ได้เคยพิจารณามาแล้วในบทก่อน อย่างไรก็ตาม ในที่นี้จะขอแสดงโดยสรุปอีกครั้งหนึ่ง เพื่อให้เห็นลักษณะการนำความรู้เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวมาประยุกต์ใช้โดยกระทัดรัดและชัดเจนขึ้น ดังต่อไปนี้

จากหลักพื้นฐานแนวคิดการวิเคราะห์ ความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ ในรูปลักษณะของแบบจำลองของท่านโดมาร์ ซึ่งได้แสดงโดยละเอียดไว้แล้วในบทก่อน อาจสรุปได้ว่า ปัญหาการวิเคราะห์ความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ ก็คือ การหารูปแบบกาลวิถีของกระแสการลงทุนที่จะดำรงดุลยภาพของระบบเศรษฐกิจไว้ตลอดไป โดยมีเงื่อนไขความสัมพันธ์ของกระแสการลงทุนกับเวลาที่จะดำรงดุลยภาพดังกล่าว แสดงได้ด้วยสมการต่อไปนี้