ตัวอย่าง 5.2: การหาต้นทุนรวมจากต้นทุนส่วนเหลื่อม

ถ้าต้นทุนส่วนเหลื่อม (marginal cost: MC) ของสินค้าชนิดหนึ่ง อยู่ในรูปของผลผลิต (output: Q) ดังนี้:

$$C'(Q) = 3Q^2 - 4Q + 5$$

และในการผลิตนี้ มีต้นทุนคงที่ (fixed cost) เป็น $C_F = 100$

อยากทราบว่า: ต้นทุนรวม [total cost: C(Q)] จะมีลักษณะเป็นอย่างไร

วิธีทำ:

จาก

$$C'(Q) = \frac{dC}{dQ}$$

$$= 3Q^2 - 4Q + 5$$

เมื่ออินทิเกรตมุ่งต่อ Q จะได้:

$$\int C'(Q)\, dQ = \int \frac{dC}{dQ}\, dQ$$

$$= \int (3Q^2 - 4Q + 5)\, dQ$$

$$C(Q) = Q^3 - 2Q^2 + 5Q + C \qquad //$$

ซึ่งก็คือ ฟังก์ชันของต้นทุนรวม (total cost) ที่อยู่ในรูปของผลผลิตและตัวคงที่ที่ยังไม่ทราบค่า "C" นั่นเอง

อย่างไรก็ตาม ในที่นี้ทราบว่าต้นทุนคงที่คือ $C_F = 100$ ซึ่งต้นทุนคงที่นี้ก็คือ ต้นทุนรวมเมื่อไม่มีการผลิต C(0) หรือก็คือ C เมื่อ Q = 0 นั่นเอง ดังนั้น ค่าคงที่ C ก็จะสามารถหาได้จากการพิจารณาต้นทุนคงที่ดังกล่าว ดังต่อไปนี้:

จาก $$C(Q) = Q^3 - 2Q^2 + 5Q \text{ t } C$$

เมื่อ Q = 0 : $$C(0) = (0)^3 - 2(0)^2 + 5(0) \text{ t } C$$
$$= C$$

แต่ $C(0) = C_F = 100$

นั่นคือ $$C = 100 \quad //$$

ดังนั้น ต้นทุนการผลิตรวมที่ต้องการทราบนี้ คือ:

$$C(Q) = Q^3 - 2Q^2 + 5Q + 100$$ ตอบ //

ตัวอย่าง 5.3: การหาต้นทุนรวมจากต้นทุนส่วนเหลื่อม

ถ้าต้นทุนส่วนเหลื่อมของสินค้าชนิดหนึ่ง คือ:

$$C'(Q) = 2e^{0.2Q}$$

และมีต้นทุนคงที่เป็น:

$$C_F = 100$$

อยากทราบว่า: ต้นทุนรวม จะมีลักษณะเป็นอย่างไร

วิธีทำ:

จาก $$C'(Q) = 2e^{0.2Q}$$

เมื่ออินทิเกรตมุงต่อ Q จะได้:

$$\int C'(Q)\,dQ = \int 2e^{0.2Q}\,dQ$$

$$= \int \frac{2}{0.2} e^{0.2Q}\,d(0.2Q)$$

$$C(Q) = 10e^{0.2Q} + C$$

เมื่อ $Q = 0$: $$C(0) = 10e^{0} + c$$

$$= 10 + c$$

แต่ $C(0) = C_F = 100$

$$C(0) = 10 + C = 100$$

นั่นคือ $$C = 90$$

ดังนั้น ต้นทุนการผลิตรวมที่ต้องการทราบนี้ คือ:

$$C(Q) = 10e^{0.2Q} + 90$$ ตอบ //

ข้อสังเกต:

จากตัวอย่างการหาต้นทุนรวมจากต้นทุนส่วนเหลื่อม จะเห็นได้ว่า ค่าคงที่ของการอินทิเกรต C อาจจะเป็นค่าเดียวกันกับข้อมูลเบื้องต้น (ต้นทุนคงที่) ดังตัวอย่าง 5.2 หรืออาจมีค่าที่แตกต่างออกไป ดังเช่นตัวอย่าง 5.3 ทั้งนี้ ขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชันที่จะถูกอินทิเกรตเป็นสำคัญ แต่จะอย่างไรก็ตาม ค่าคงที่ของการอินทิเกรตจะได้จากข้อมูลเบื้องต้นทั้งสิ้น

ตัวอย่าง 5.4: ตัวอย่างการหาฟังก์ชันของการออม

ถ้าความโน้มเอียงของการออม (marginal prqpensity to saver MPS) ซึ่งอยู่ในรูปของรายได้ (income: Y) คือ:

$$S'(Y) = 0.6 - 0.5Y^{-1/2}$$

และเมื่อรายได้เป็น 25 หน่วยเงินตรา การออมก็จะไม่มี

อยากทราบว่า: ฟังก์ชันของการออม (saving function) มีลักษณะเป็นอย่างไร

วิธีทำ:
จาก ฟังก์ชันของความโน้มเอียงของการออม คือ:

$$S'(Y) = 0.6 - 0.5Y^{-1/2}$$

เมื่ออินทิเกรตมุ่งต่อ Y จะได้:

$$\int S'(Y)\,dY = \int (0.6 - 0.5Y^{-1/2})\,dY$$

$$S(Y) = 0.6Y - Y^{1/2} + C \qquad //$$

แต่เมื่อ $Y = 25$ แล้ว $S(Y) = 0$ นั่นคือ:

$$S(25) = 0$$

ดังนั้น:

$$0.6(25) - (25)^{1/2} t\ C = 0$$

$$c = -10 \qquad //$$

ฉะนั้น ฟังก์ชันของการออมที่ต้องการ คือ:

$$S(Y) = 0.6Y - Y^{1/2} - 10$$ ตอบ //

อนึ่ง สำหรับการหาฟังก์ชันรวมเมื่อทราบฟังก์ชันส่วนเหลื่อม ในเรื่องราวอื่น ๆ เช่น เรื่องเกี่ยวกับรายได้ การผลิต การลงทุน การบริโภค ฯลฯ ก็สามารถที่จะประยุกต์ใช้หลักการและวิธีการของการอินทิเกรต เพื่อให้ได้ฟังก์ชันรวมตามที่ต้องการได้ ทั้งนี้ก็โดยนัยเดียวกันกับหลักการและวิธีการ ดังตัวอย่างที่ได้แสดงไว้แล้วข้างต้นนั่นเอง

4.2 การวิเคราะห์การลงทุนและการสะสมทุน:

การสะสมทุน (capital formation) เป็นกระบวนการของการเพิ่มขึ้นของทุนสะสม (capital stock) อย่างต่อเนื่องตลอดเวลา (continuous over time) ดังนั้น ทุนสะสม จึงสามารถที่จะแสดงในรูปของเวลาในลักษณะของฟังก์ชัน: $K(t)$ และอัตราของการสะสมทุน (rate of capital formation) จะคือ อนุพันธ์ (derivative) ของทุนสะสมในรูป: dK/dt นั่นเอง

อย่างไรก็ตาม อัตราการสะสมทุน ณ เวลาที่ t ใด ๆ จะมีค่าเท่ากับ อัตราของกระแสการลงทุนสุทธิ [rate of net investment flow: $I(t)$] ณ เวลา t นั้น ๆ ดังนั้น ทุนสะสม K และกระแสการลงทุนสุทธิ I ก็จะมีความสัมพันธ์กันในสองลักษณะดังต่อไปนี้ คือ:

(1) $$\frac{dK}{dt} = I(t)$$

(2) $$K(t) = \int I(t)\, dt = \int \frac{dK}{dt}\, dt = \int dK$$

โดยที่: $K(t)$ หมายถึง ทุนสะสม (capital stock)

$\frac{dK}{dt}$ หมายถึง อัตราการสะสมทุน (rate of capital formation)

$I(t)$ หมายถึง อัตราของกระแสการลงทุนสุทธิ หรือก็คือ อัตราการลงทุนสุทธิ (rate of net investment flaw)

ลำดับนี้ จะขอแสดงการประยุกต์อินทิกรัล เพื่อใช้ในการวิเคราะห์เรื่องราวของการลงทุนและการสะสมทุน ดังตัวอย่างต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 5.5

สมมุติว่า กระแสการลงทุนสุทธิ (net investment flow) คือ:

$$I(t) = 3t^{1/2}$$

และ ทุนสะสมเบื้องต้น (initial capital stock) ณ เวลา $t = 0$ คือ: $K(0)$

อยากทราบว่า: กาลวิถี (time path) ของทุนสะสม มีลักษณะเป็นอย่างไร

วิธีทำ:

จาก $$K(t) = \int I(t)\, dt$$

ในที่นี้ $$I(t) = 3t^{1/2}$$

ดังนั้น $$K(t) = \int 3t^{1/2}\, dt$$

นั่นคือ $$K(t) = 2t^{3/2} + C$$ //

และเมื่อ t = 0: $$K(0) = 2(0)^{3/2} + C$$
$$= C$$

ฉะนั้น กาลวิถีของทุนสะสม คือ:
$$K(t) \cdot \square\, 2t^{3/2}\ t\ K(0)$$ wall //

อนึ่ง ในกรณีต้องการทราบจำนวนการสะสมทุน (amount of capital formation) ระหว่างช่วงเวลาใดเวลาหนึ่งโดยเฉพาะ การดำเนินการก็อาจจะกระทำได้โดยอาศัยหลักของอินทิกรัลจำกัดเขตที่กล่าวมาแล้วนั่นเอง เช่น ถ้าต้องการทราบจำนวนการสะสมทุน ตั้งแต่เวลา a ถึงเวลา b ว่าจะเป็นเท่าไร ก็อาจจะหาได้จากอินทิกรัลจำกัดเขต ต่อไปนี้:

จาก กระแสการลงทุนสุทธิ:
$$I(t) = \frac{dK}{dt}$$

ดังนั้น การสะสมทุน ในช่วงเวลา a,b จะสามารถหาได้จากอินทิกรัลจำกัดเขต ต่อไปนี้:

$$\int_a^b I(t)\,dt = K(t)\,3\Big|_a^b$$
$$= K(b) - K(a)$$ //

ตัวอย่าง 5.6

ถ้ากระแสการลงทุนสุทธิเป็นอัตราที่คงที่ ซึ่งมีปีละ 1000 หน่วยเงินตรา เช่นนี้แล้ว การสะสมทุนในช่วงระหว่างปีที่ 2 ถึง ปีที่ 5 จะเป็นเท่าไร

วิธีทำ:

จาก กระแสการลงทุน: $I(t) = 1000$ $\quad : I(t) = \frac{dK}{dt}$

ดังนั้น การสะสมทุนในช่วงระหว่างปีที่ 2 ถึง ปีที่ 5 ก็คือ:

$$\int_2^5 I(t)\,dt = \int_2^5 1000\,dt$$

$$= 1000 \cdot t \Big|_2^5$$

$$= 1000(5) - 1000(2)$$

$$= 5000 - 2000$$

$= 3000$ หน่วยเงินตรา ตอบ //

ตัวอย่าง 5.7

ถ้ากระแสการลงทุนสุทธิเป็นอัตราที่ไม่คงที่ แต่ขึ้นอยู่กับเวลา ในรูป: $I(t) = 6t^{1/2}$ เช่นนี้แล้ว การสะสมทุนในช่วงปีที่ 1 ถึงปีที่ 4 เป็นเท่าไร

วิธีทำ:

จาก กระแสการลงทุน: $I(t) = 6t^{1/2}$ $\quad : I(t) = \frac{dK}{dt}$

ดังนั้น การสะสมทุนในช่วงปีที่ 1 ถึงปีที่ 4 ก็คือ:

$$\int_1^4 6t^{1/2}\,dt = 4t^{1/2} \Big|_1^4$$

$$\int_1^4 6t^{1/2}\,dt = 4(4)^{3/2} - 4(1)^{3/2}$$

$$= 32 - 4$$

$$= 28$$ ตอบ //

หมายเหตุ:

ตัวอย่างนี้อาจจะขยายให้อยู่ในลักษณะทั่วไป เมื่อต้องการจำนวนการสะสมทุน ในช่วงระหว่างเวลา [0,t] และด้วยอัตรากระแสการลงทุน I(t) ใด ๆ ก็ได้ ดังนี้:

$$\int_0^t I(t)\,dt = K(t)\Big]_0^t$$

$$= K(t) - K(0)$$

ดังนั้น กาลวิถีของทุนสะสม (time path of capital K) ก็คือ:

$$K(t) = K(0) + \int_0^t I(t)\,dt$$ //

4.3 การหามูลค่าปัจจุบัน

การหามูลค่าปัจจุบัน (present value) หมายถึง การหามูลค่าของรายได้ (ค่าใช้จ่าย) ที่จะเกิดขึ้นในอนาคต ว่าปัจจุบันมีมูลค่าเป็นเท่าใด ซึ่งรายได้ (ค่าใช้จ่าย) ที่จะเกิดขึ้นในอนาคตมีได้สองลักษณะกรณีตามลักษณะการได้มาของรายได้ (ค่าใช้จ่าย)นั้น ๆ กล่าวคือ:

1) กรณีค่าเดี่ยว (single value)

2) กรณีกระแส (stream or flow)

และแต่ละลักษณะกรณี ก็สามารถคิดเป็นมูลค่าปัจจุบัน ด้วยการคิดลด (discounting) ได้สองรูปแบบด้วยกัน คือ:

ก) แบบเต็มหน่วย (discrete case)

ข) แบบต่อเนื่อง (continuous case)

ดังนั้นสรุปแล้ว การหามูลค่าปัจจุบันมี 2 ลักษณะกรณี โดยแบ่งเป็น 4 รูปแบบดังนี้ คือ:

1. กรณีค่าเดี่ยว:

ก) แบบเต็มหน่วย

ข) แบบต่อเนื่อง

2. กรณีกระแส:

ก) แบบเต็มหน่วย

ข) แบบต่อเนื่อง

ลำดับนี้ จะขอแสดงแนวคิดในการพิจารณาการหามูลค่าปัจจุบันของแต่ละลักษณะกรณีและแต่ละรูปแบบ ดังต่อไปนี้:

4.3.1 มูลค่าปัจจุบัน กรณีค่าเดี่ยว

กรณีค่าเดี่ยว (single value) หมายถึง กรณีที่รายได้ (หรือค่าใช้จ่าย) ที่จะเกิดขึ้นในอนาคตมีเพียงครั้งเดียวเท่านั้น ดังนั้น การคิดมูลค่าปัจจุบันจึงคิดลดมาจากรายได้ (หรือค่าใช้จ่าย) ที่จะเกิดขึ้นในอนาคตซึ่งมีครั้งเดียวนั้น ๆ

อย่างไรก็ตาม ด้วยเหตุที่การคิดลด (discounting) มีได้สองรูปแบบ กล่าวคือ อาจเป็นแบบเต็มหน่วย (discrete) หรือเป็นแบบต่อเนื่อง (continuous) ก็ได้ ในชั้นนี้ จึงขอแสดงแต่ละลักษณะรูปแบบเป็นลำดับกันไป ดังนี้:

ก) มูลค่าปัจจุบัน กรณีค่าเดี่ยวแบบเต็มหน่วย:

กรณีค่าเดี่ยวแบบเต็มหน่วย หมายถึง กรณีที่รายได้ที่จะเกิดขึ้นในอนาคตมีเพียงครั้งเดียว และการคิดลด ก็คิดลดเพียงครั้งเดียวต่อหนึ่งหน่วยเวลา เช่น คิดลดเพียงครั้งเดียวในหนึ่งปี (annually or once a year) เป็นต้น

อนึ่ง ด้วยเหตุที่การคิดลด (discounting) เป็นการกระทำที่ตรงกันข้ามกับการคิดดอกเบี้ยทบต้น (interest compounding) ซึ่งการหาดอกเบี้ยทบต้น เป็นการหารายได้รวมที่จะเกิดขึ้นในอนาคต จากเงินต้น (initial principal or present value) ที่กำหนดจำนวนหนึ่ง สำหรับการคิดลดนั้น การคิดลดเป็นการหามูลค่าปัจจุบัน (เงินต้น) ของเงินรวมที่จะได้ในอนาคต ซึ่งตรงกันข้ามกับการคิดดอกเบี้ยทบต้นดังกล่าว และด้วยเหตุที่ การหาดอกเบี้ยทบต้นกระทำได้ง่ายกว่าการคิดลด เพราะคุ้นเคยกันอยู่โดยทั่วไป ดังนั้น การคิดลดจึงมักนิยมที่จะหามาจากแนวคิดของการคิดดอกเบี้ยทบต้นเป็นเบื้องต้น แล้วจึงผกผันเป็นการคิดลดต่อไป ดังจะเห็นได้จากการพิจารณา ต่อไปนี้:

ถ้า: A หมายถึง มูลค่าปัจจุบัน หรือ เงินต้น (present value or initial principal)

r หมายถึง อัตราดอกเบี้ยในนาม (nominal rate of interest) ซึ่งคิดเป็นร้อยละของเงินต้น ต่อหนึ่งหน่วยเวลา (ปี)

i หมายถึง อัตราดอกเบี้ยแท้จริง (effective rate of interest) ซึ่งคิดเป็นร้อยละของเงินต้น ต่อหนึ่งหน่วยเวลา (ปี)

V หมายถึง มูลค่าในอนาคต รายได้ในอนาคต หรือ เงินรวม (future value)

: เงินรวม = เงินต้น + ดอกเบี้ย

จาก: เงินรวม = เงินต้น + ดอกเบี้ย

ถ้าดอกเบี้ยทบต้น t ปี : เงินรวม = เงินต้น + ดอกเบี้ยปีที่หนึ่ง + · · + ดอกเบี้ยปีที่ t

ซึ่งการหาเงินรวมนี้ สามารถแจกแจงเป็นรายปีได้ ดังนี้:

เงินรวมปีที่ 1:

$$\begin{aligned} V_1 &= A + Ar \\ &= A(1 + r) \\ &= A(1 + i) && : i = r \end{aligned}$$

เงินรวมปีที่ 2:

$$\begin{aligned} V_2 &= A + Ar + (A + Ar)r \\ &= (A + Ar) + (A + Ar)r \\ &= (A + Ar)[1 + r] \\ &= A(1 + r)(1 + r) \\ &= A(1 + i)(1 + i) && : i = r \\ &= A(1 + i)^2 \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน...

เงินรวมปีที่ t ใด ๆ :

$$V_t = A\ 1 + i)^t$$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบัน กรณีค่าเดี่ยวแบบเต็มหน่วย จะคือ :

$$\begin{aligned} A &= \frac{V}{1 + i^{\,t}} && : V = V_t \\ &= V(1 + i)^{-t} && // \end{aligned}$$

ข) มูลค่าปัจจุบัน กรณีค่าเดี่ยวแบบต่อเนื่อง:

กรณีค่าเดี่ยวแบบต่อเนื่อง หมายถึง กรณีที่รายได้ที่จะเกิดขึ้นในอนาคตมีเพียงครั้งเดียว แต่การคิดลด คิดลดต่อเนื่องกันไปหลายครั้งต่อหนึ่งหน่วยเวลา จนเรียกได้ว่า เสมือนคิดลดทุกเสี้ยววินาทีทีเดียว

สำหรับการหามูลค่าปัจจุบัน ก็อาจเริ่มต้นจากการหาเงินรวมที่มีดอกเบี้ยแบบต่อเนื่องก่อน แล้วจึงผกผันเป็นมูลค่าปัจจุบันในภายหลัง ดังที่จะแสดง ต่อไปนี้:

จาก: เงินรวม = เงินต้น + ดอกเบี้ย

ถ้าคิดดอกเบี้ยทบต้น ปีละ m ครั้ง:

เงินรวม = เงินต้น + ดอกเบี้ยครั้งที่ 1 +···+ ดอกเบี้ยครั้งที่ m

หมายเหตุ:

1) เมื่อคิดดอกเบี้ยปีละหลายครั้ง อัตราดอกเบี้ยในนามจะไม่เท่ากับอัตราดอกเบี้ยที่แท้จริง: $r \neq i$

2) เมื่อคิดดอกเบี้ยปีละ m ครั้ง อัตราดอกเบี้ยจะเป็นครั้งละ $\frac{r}{m}$

ซึ่งการหาเงินรวมสิ้นปี สามารถแจกแจงเป็นรายครั้งได้ ดังนี้:

เงินรวมสิ้นปี เมื่อคิดดอกเบี้ยปีละครั้ง:

$$V(1) = A + Ar$$
$$= A(1 t r)$$

เงินรวมสิ้นปี เมื่อคิดดอกเบี้ยปีละสองครั้ง:

$$V(2) = A + A\frac{r}{2} + (A + A\frac{r}{2})\frac{r}{2}$$

$$= (A + A\frac{r}{2})[1 + \frac{r}{2}]$$

$$= A(1 + \frac{r}{2})(1 + \frac{r}{2})$$

$$= A(1 + \frac{r}{2})^2$$

ทำนองเดียวกัน...

เงินรวมสิ้นปี เมื่อคิดดอกเบี้ยปีละ m ครั้ง:

$$V(m) = A(1 + \frac{r}{m})^m$$

ในที่สุด ถ้าคิดดอกเบี้ยปีละนับไม่ถ้วนครั้ง หรือเมื่อ $m \to \infty$:

เมื่อจำนวนครั้งมีหลายครั้งจนนับไม่ถ้วน : $m \to \infty$ หรือก็คือ การคิดดอกเบี้ยทบต้นแบบต่อเนื่อง (continuous compounding) นั่นเอง ซึ่งการหาเงินรวมนี้ อาจดำเนินการได้ด้วยการพิจารณาภายใต้ลิมิต ดังนี้:

จากการคิดดอกเบี้ยปีละ m ครั้ง:

$$V(m) = A(1 + \frac{r}{m})^m$$

เมื่อ $m \to \infty$:

$$\lim_{m \to \infty} V(m) = \lim_{m \to \infty} A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m}$$

$$= A\left\{\lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m}\right\} \qquad //$$

อนึ่งจากการศึกษา Taylor series with remainder และ Maclaurin series[1] ทราบว่า:

$$\lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} = e$$

$$= 2.71828\ldots$$

หมายเหตุ:

การหาค่า "e" อาจพิจารณาภายใต้ลิมิตได้โดยสังเขป ดังนี้:

ถ้า $$f(m) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}$$

เมื่อ m มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ:

$$f(1) = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{1} = 2$$

$$f(2) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{2} = 2.25$$

---

[1] A. C. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3rd.ed., (New York: McGraw-Hill Book Company, 1984), pp.274-276.

$$f(3) = (1 + \frac{1}{3})^3 = 2.37037...$$

$$f(4) = (1 + \frac{1}{4})^4 = 2.44141...$$

เมื่อ $m \to \infty$:

$$\lim_{m \to \infty} f(m) = \lim_{m \to \infty} (1 + \frac{1}{m})^m$$

$$= 2.71828...$$

$$= e$$ //

ทำนองเดียวกัน...

จาก

$$\lim_{m \to \infty} V(m) = A\{\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{r}{m})^m\}$$

$$= A\{\lim_{m \to \infty} [(1 + \frac{r}{m})^m]^{r/r}\}$$

$$= A\{\lim_{m \to \infty} [(1 + \frac{r}{m})^{m/r}]^r\}$$

$$= A\{\lim_{m \to \infty} [(1 + \frac{1}{w})^w]^r\} \quad ; \text{เมื่อ } w = \frac{m}{r}$$

$$= Ae^r \quad ; e = \lim_{w \to \infty} (1 + \frac{1}{w})^w$$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นหนึ่งปี จากการคิดดอกเบี้ยปีละนับไม่ถ้วนครั้ง หรือคิดดอกเบี้ยแบบต่อเนื่อง คือ:

$$V = \lim_{m \to \infty} V(m)$$

$$= Ae^{r} \qquad //$$

และเงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ t ใด ๆ ก็จะคือ[1]:

$$V = \lim_{m \to \infty} V(mxt)$$

$$= Ae^{rt}$$: จำนวนครั้งทบต้น mxt ครั้ง อัตราดอกเบี้ยครั้งละ r/m

ฉะนั้น มูลค่าปัจจุบัน กรณีค่าเดียวแบบต่อเนื่อง ก็จะคือ :

$$A = Ve^{-rt} \qquad //$$

---

[1] เมื่อจำนวนปีของการคิดดอกเบี้ยทบต้นเพิ่มเป็น t ปี ก็เสมือนกับว่า จำนวนครั้งทบต้นเพิ่มขึ้นเป็น mxt = mt ครั้ง โดยที่อัตราดอกเบี้ยต่อครั้งเป็น r/m คงเดิม ดังนั้น:

จาก $$V = \lim_{m \to \infty} V(mxt) = A\{\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{r}{m})^{mxt}\}$$

$$= A\{\lim_{m \to \infty} [(1 + \frac{r}{m})^{m/r}]^{rt}\}$$

$$= Ae^{rt}$$

4.3.2 มูลค่าปัจจุบัน กรณีกระแส

กรณีกระแส (stream or flow) หมายถึง กรณีที่รายได้ (หรือค่าใช้จ่าย) ที่จะเกิดขึ้นในอนาคตมีหลายครั้ง ดังนั้น การคิดมูลค่าปัจจุบันจึงคิดลดมาจากรายได้ที่จะเกิดขึ้นในอนาคตเหล่านั้นรวมกัน เช่น การขายผ่อนส่ง ผู้ขายจะได้รับรายได้เป็นค่างวดผ่อนส่งหลายงวด ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันทั้งหมดจึงคิดมาจากมูลค่าปัจจุบันของค่างวดทุกงวดรวมกัน

อย่างไรก็ตาม ด้วยเหตุที่การคิดลด (discounting) มีได้สองรูปแบบ กล่าวคือ อาจเป็นแบบเต็มหน่วย (discrete) หรือเป็นแบบต่อเนื่อง (continuous) ก็ได้ ในชั้นนี้ จึงขอแสดงแต่ละลักษณะรูปแบบเป็นลำดับกันไป ดังนี้:

ก) มูลค่าปัจจุบัน กรณีกระแสแบบเต็มหน่วย:

กรณีกระแสแบบเต็มหน่วย หมายถึง กรณีที่รายได้ที่จะเกิดขึ้นในอนาคตมีหลายครั้ง และการคิดลดเพื่อหามูลค่าปัจจุบันของรายได้แต่ละครั้งหรือแต่ละงวด คิดลดเพียงครั้งเดียวต่อหนึ่งหน่วยเวลา เช่น คิดลดเพียงครั้งเดียวในหนึ่งปี เป็นต้น

ลักษณะ:

ถ้ารายได้ในอนาคตที่จะเกิดขึ้นในปลายปีที่ t ใด ๆ คือ	R_t
และ อัตราการคิดลดซึ่งคิดเป็นร้อยละต่อปี คือ	i
เช่นนี้แล้ว มูลค่าปัจจุบันของรายได้นี้ คือ:	$R_t(1 + i)^{-t}$

สมมุติต่อไปว่า รายได้ในอนาคตนี้ เกิดขึ้นในลักษณะกระแสของรายได้เป็นเวลา 3 ปี ติดต่อกัน

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของรายได้แต่ละปี คือ:

มูลค่าปัจจุบันของรายได้ปีที่ 1 คือ: $R_1(1 + i)^{-1}$

มูลค่าปัจจุบันของรายได้ปีที่ 2 คือ: $R_2(1 + i)^{-2}$

มูลค่าปัจจุบันของรายได้ปีที่ 3 คือ: $R_3(1 + i)^{-3}$

ฉะนั้น มูลค่าปัจจุบันรวม (tota I present value: Π) ก็คือ:

$$\Pi = \sum_{t=1}^{3} R_t(1 + i)^{-t}$$

ในที่สุด ถ้ารายได้ในอนาคตนี้เกิดขึ้นในลักษณะของกระแสรายได้ติดต่อกันทั้งสิ้นเป็นเวลา b ปี มูลค่าปัจจุบันของรายได้รวมทั้งหมด ก็จะคือ:

$$\Pi = \sum_{t=1}^{b} R_t(1 + i)^{-t} \qquad //$$

ข) มูลค่าปัจจุบัน กรณีกระแสแบบต่อเนื่อง:

กรณีกระแสแบบต่อเนื่อง หมายถึง กรณีรายได้ที่จะเกิดขึ้นในอนาคตมีหลายครั้ง และการคิดลด เพื่อหามูลค่าปัจจุบันของรายได้แต่ละครั้งหรือแต่ละงวด ก็คิดลดต่อเนื่องกันไปหลายครั้งต่อหนึ่งหน่วยเวลา เสมือนหนึ่งคิดลดทุกเสี้ยววินาทีนั่นเอง

ลำดับนี้ จะขอแสดงแนวคิดและข้อพิจารณา ในการหามูลค่าปัจจุบันของรายได้กรณีที่เป็นกระแสแบบต่อเนื่อง ดังนี้:

สมมุติว่า รายได้เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง ในอัตรา $R(t)$ หน่วยเงินตราต่อปี เช่นนี้แล้ว ณ เวลา $t = t_1$ อัตรากระแสรายได้จะเป็น $R(t_1)$ และ ณ เวลา $t = t_2$ อัตรากระแสรายได้จะเป็น $R(t_2)$ แต่ด้วยเหตุที่เวลา t เป็นเวลาต่อเนื่อง ดังนั้นการเปลี่ยนไปของเวลาอาจมีค่าน้อยนิด (infinitesimal) อย่างไรก็ตาม เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไปก็ย่อมทำให้รายได้เปลี่ยนแปลงไปด้วย ดังนั้น ถ้าให้ dt คือ ระยะเวลาที่เปลี่ยนแปลงไป เช่นนี้แล้ว รายได้ที่เปลี่ยนแปลงไปก็คือ $R(t)\cdot dt$ ซึ่งรายได้นี้ก็คือ รายได้ในช่วงเวลา $t, t+dt$ นั่นเอง ที่สุดเมื่อคิดลดในลักษณะต่อเนื่องด้วยอัตรา r ต่อปี มูลค่าปัจจุบันของรายได้นี้ก็จะคือ $R(t)e^{-rt}dt$ และท้ายที่สุด ถ้าช่วงเวลาคิดลดดังกล่าวมีระยะเวลา b ปี ดังนี้แล้ว มูลค่าปัจจุบันรวม ก็จะคือ ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันแบบต่อเนื่อง ซึ่งก็คือการรวมในรูปของอินทิกรัลจำกัดเขต ดังต่อไปนี้:

$$\Pi = \int_0^b R(t)e^{-rt}dt \qquad //$$

ข้อสังเกต:

1. สัญลักษณ์ของรายได้ในอนาคต (future value):

   กรณีที่เป็นค่าเดี่ยว (single value) ใช้สัญลักษณ์ V_t , $V(t)$

   กรณีที่เป็นกระแส (stream or flow) ใช้สัญลักษณ์ R_t , $R(t)$

2. สัญลักษณ์ของอัตราการคิดลด (discounting rate):

   แบบเต็มหน่วย (discrete case) ใช้สัญลักษณ์ i

   แบบต่อเนื่อง (continuous case) ใช้สัญลักษณ์ r

3. สัญลักษณ์ของการรวม (expression of the sum):

   แบบเต็มหน่วย (discrete case) ใช้สัญลักษณ์ Σ

   โดยเริ่มรวมจากปลายปีที่ 1 t → t b

   แบบต่อเนื่อง (continuous case) ใช้สัญลักษณ์ $\int$

   'I""เริ่มรวมตั้งแต่เวลาที่ 0: $t = 0 \rightarrow t = b$

สรุปการหามูลค่าปัจจุบัน:

PRESENT VALUE OF A CASH FLOW :

I. SINGLE VALUE

1.1 Discrete Case:

$$A = V(1 + i)^{-t}$$

1.2 Continuous Case:

$$A = Ve^{-rt}$$

II. STREAM OR FLOW

11.1 Discrete Case:

$$\Pi = \sum_{t=1}^{b} R_t (1 \; t \; i)^{-t}$$

II.2 Continuous Case:

$$\Pi = \int_0^b R(t)e^{-rt}dt$$