ดังนั้น $$\int \frac{6x^2 + 4}{x^3 + 2x}\, dx = \int \frac{2}{u} \frac{du}{dx}\, dx$$

$$= \int \frac{2}{u}\, du$$

$$= 2 \int \frac{1}{u}\, du$$

$$= 2 \ln u + c$$

$$= 2 \ln (x^3 + 2x) + c \qquad //$$

กฎที่ VII: กฎการอินทิเกรตโดยการแบ่งส่วน (the integration by part)

$$\int v\, du = uv - \int u\, dv$$

กฎนี้ได้มาจาก:

จาก $$d(uv) = v\, du + u\, dv$$

$$\int d(uv) = \int v\, du + \int u\, dv$$

หรือ $$uv = \int v\, du + \int u\, dv$$: ละค่าคงที่

ดังนั้น $$\int v\, du = uv - \int u\, dv \qquad //$$

ตัวอย่าง:

1) จงหาค่าของ: $\int x(x+1)^{1/2}\,dx$

ข้อพิจารณา: การอินทิเกรตฟังก์ชันข้างต้นนี้ ไม่สามารถกระทำได้โดยตรง และก็ไม่สามารถดำเนินการโดยวิธีการของกฎการแทนที่ จึงดำเนินการโดยวิธีการแบ่งส่วน ดังนี้:

จาก $$\int v\,du = uv - \int u\,dv$$

ในที่นี้: $$\int x(x\ t\ 1)^{1/2}\,dx$$

ถ้าให้ $v = x$

แล้ว $dv = dx$

และถ้า $du = (x\ t\ 1)^{1/2}\,dx$: du ควรใช้แทนกลุ่มที่ซับซ้อน

หรือ $$\frac{du}{dx} = (x\ t\ 1)^{1/2}$$

แล้ว $$\int \frac{du}{dx}\,dx = \int (x\ t\ 1)^{1/2}\,dx$$

$$\int du = \int (x\ t\ 1)^{1/2}\,d(x\ t\ 1)$$

$$u = \frac{2}{3}(x\ t\ 1)^{3/2}$$:ละค่าคงที่

ดังนั้นจาก:

$$\int x(x+1)^{1/2}\,dx = \int v\,du$$

$$= uv - \int u\,dv \qquad : \int vdu = uv - \int udv$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}x - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}x - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + c \qquad //$$

2) จงหาค่าของ: $\int \ln x\,dx$

ข้อพิจารณา: การอินทิเกรตฟังก์ชันข้างต้นนี้ ไม่สามารถกระทำได้โดยตรงด้วยกฎที่ III: กฎของลอการิทึม (logarithmic rule) และก็ไม่สามารถ สามารถดำเนินการโดยวิธีการของกฎการแทนที่ จึงดำเนินการโดยวิธี การแบ่งส่วน ดังนี้:

จาก $$\int v\,du = uv - \int u\,dv$$

ในที่นี้: $$\int \ln x\,dx$$

ถ้าให้ $v = \ln x$

แล้ว $dv = \frac{1}{x}\, dx$

และถ้า $du = dx$

หรือ $\frac{du}{dx} = 1$

แล้ว $\int \frac{du}{dx}\, dx = \int 1\, dx$

$u = x$:ละค่าคงที่

ดังนั้นจาก:

$$\int \ln x\, dx = \int v\, du$$

$$= uv - \int u\, dv$$

$$= x \ln x - \int x \left(\frac{1}{x}\, dx \right)$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x\ t\ c$$

$$= x(\ln x - 1) + c$$ //

3) จงหาค่าของ: $\int xe^x \, dx$

ข้อพิจารณา: การอินทิเกรตฟังก์ชันข้างต้นนี้ไม่สามารถกระทำได้โดยตรง จึงดำเนินการโดยวิธีการแบ่งส่วน ดังนี้:

จาก $$\int v \, du = uv - \int u \, dv$$

ในที่นี้: $$\int xe^x \, dx$$

ถ้าให้ $v = x$

แล้ว $dv = dx$

และถ้า $du = e^x \, dx$: du ควรใช้แทนกลุ่มที่ซับซ้อน

แล้ว $\int du = \int e^x \, dx$

$u = e^x$: ละค่าคงที่

ดังนั้นจาก:

$$\int xe^x \, dx = \int v \, du$$

$$= uv - \int u \, dv$$

$$\int xe^{x}\,dx = e^{x}x - \int e^{x}\,dx$$

$$= e^{x}x - e^{x} + c$$

$$= e^{x}(x - 1) + c$$

4) $$\int 2x(x^{2} + 1)\,dx = \int (2x^{3} + 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^{4} + x^{2} + c \qquad //$$

ถ้าดำเนินการโดย กฎการอินทิเกรตโดยการแบ่งส่วน (integration by part) จะสามารถดำเนินการได้ ดังนี้:

จาก $\int v\,du = uv - \int u\,dv$

ในที่นี้: $\int 2x(x^{2} + 1)\,dx$

ถ้าให้ $v = 2x$

แล้ว $dv = 2\,dx$

และถ้า $du = (x^{2} + 1)\,dx$: du ควรใช้แทนกลุ่มที่ซับซ้อน

หรือ $\frac{du}{dx} = (x^{2} + 1)$

แล้ว $\int \frac{du}{dx}\, dx = \int (x^2 \;\, t \;\, 1)\, dx$

นั่นคือ $u = \frac{1}{3}x^3 + x$:ละค่าคงที่

ดังนั้นจาก:

$$\int 2x(x^2 \;\, t \;\, 1)\, dx = \int v\, du$$

$$= uv - \int u\, dv$$

$$= (\frac{1}{3}x^3 + x)\; 2x - \int (\frac{1}{3}x^3 + x)\; 2dx$$

$$= \frac{2}{3}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{6}x^4 - x^2 - c$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + x^2 - c$$ //

ข้อสังเกต:

1) ตัวอย่างนี้ได้เคยดำเนินการโดยกฎการแทนที่มาแล้ว
2) ปัญหาการอินทิเกรตที่สามารถดำเนินการได้โดยวิธีการแทนที่ จะสามารถดำเนินการโดยกฎการอินทิเกรตโดยการแบ่งส่วนได้ด้วย
3) ปัญหาการอินทิเกรตที่สามารถดำเนินการได้โดยกฎการอินทิเกรตโดยการแบ่งส่วน อาจจะไม่สามารถดำเนินการโดยวิธีการแทนที่ก็ได้

3.2 อินทิกรัลจำกัดเขต

อินทิกรัลจำกัดเขต (definite integrals) หมายถึง อินทิกรัลซึ่งได้กำหนดเขตค่าโดเมน (domain) ของ x ไว้แล้ว อันเป็นผลทำให้อินทิกรัลที่ได้นั้น มีค่าที่จำกัดแน่นอน กล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า อินทิกรัลจำกัดเขต หมายถึง การรวมค่าของฟังก์ชัน โดยได้กำหนดช่วงเขตค่าของการรวมว่าจะรวมค่าของฟังก์ชัน ตั้งแต่ x มีค่าเท่าไรถึงเท่าไร อันมีผลให้สามารถที่จะหาค่าผลรวมที่จำกัดและแน่นอนตายตัวนั้นได้

สำหรับการอินทิเกรต ก็กระทำเช่นเดียวกันกับอินทิกรัลไม่จำกัดเขต แล้วแทนค่าขีดจำกัดล่าง (lower limit) และขีดจำกัดบน (upper limit) ของ x ตามที่กำหนด จากนี้จึงดำเนินการคำนวณผลสำเร็จ จนได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ เช่น ต้องการรวมค่าของฟังก์ชัน f(x) จาก x มีค่าตั้งแต่ a ถึง b ก็จะสามารถแสดงได้ ดังนี้:

ลักษณะ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$= [F(b) + c] - [F(a) + c]$$

$$= F(b) - F(a)$$

หมายเหตุ:

a เรียกว่า ขีดจำกัดล่างของการอินทิเกรต (lower limit of integration)
b เรียกว่า ขีดจำกัดบนของการอินทิเกรต (upper limit af integration)

$\Big]_a^b$ ซึ่งเป็นสัญลักษณ์ของการรวม อาจเขียนเป็น $\Big|_a^b$ หรือ $\Big[\cdots\Big]_a^b$ ก็ได้

ตัวอย่าง:

1) จงหาค่าของ $\int_1^3 4x^3 \, dx$

วิธีทำ:

จาก $$\int_1^3 4x^3 \, dx = x^4 \Big]_1^3$$

$$= (3)^4 - (1)^4$$

$$= 81 - 1$$

$$= 80$$

ตอบ //

2) จงหาค่าของ $\int_0^5 (\frac{1}{1+x} \text{ t } 2x) \, dx$

วิธีทำ:

จาก $$\int_0^5 (\frac{1}{1+x} + 2x) \, dx = \int_0^5 (\frac{1}{1+x}) \, dx + \int_0^5 2x \, dx$$

$$= \int_0^5 (\frac{1}{1+x}) \, d(1+x) \text{ t } \int_0^5 2x \, dx$$

$$\int_0^5 \left(\frac{1}{1+x} + 2x\right) dx = \ln|1+x| \Big]_0^5 + x^2 \Big]_0^5$$

$$= [\ln 6 - \ln 1] + [(5)^2 - 0]$$

$$= \ln 6 + 7.5 \qquad \because \ln 1 = 0$$

ตอบ //

3) จงหาค่าของ $\int_1^2 (3x^2 - 2)^2 (6x)\, dx$

วิธีทำ:

ถ้าให้ $u = 3x^2 - 2$

แล้ว $\frac{du}{dx} = 6x$

ดังนั้น $du = (6x)dx$

และ

จาก $u = 3x^2 - 2$

เมื่อ $x = 1$ แล้ว $u = 1$

เมื่อ $x = 2$ แล้ว $u = 10$

ดังนั้นจาก:

$$\int_1^2 (3x^2 - 2)^2 (6x)\, dx = \int_1^{10} u^2\, du$$

$$\int_{1}^{2} (3x^2 - 2)^2 (6x)\, dx = \frac{1}{3} u^3 \Big]_{1}^{10}$$

$$= \frac{1}{3} [(10)^3 - (1)^3]$$

$$= \frac{1}{3} [1000 - 1]$$

$$= \frac{1}{3} [999]$$

$$= 333 \qquad \text{ตอบ} //$$

ข้อสังเกต:

1. อินทิกรัลจำกัดเขตทำให้ค่าของอินทิกรัลที่ได้เป็นค่าอิสระไม่ขึ้นกับค่าคงที่ c

2. ถ้าขีดจำกัดล่างหรือขีดจำกัดบนของการอินทิเกรต มิใช่ค่าคงที่ที่แน่นอนตายตัว แต่เป็นค่าตัวแปร x อินทิกรัลจำกัดเขตนี้ ก็จะคืออินทิกรัลไม่จำกัดเขตนั่นเอง ดังจะเห็นได้ ดังนี้คือ:

$$\int_{a}^{x} f(x)\, dx = F(x) - F(a) \qquad : \text{อินทิกรัลจำกัดเขต}$$

$$= F(x) + c \qquad : \text{อินทิกรัลไม่จำกัดเขต}$$

อนึ่ง ด้วยเหตุที่อินทิกรัลจำกัดเขตเป็นอินทิกรัลที่กำหนดช่วงโดเมนของ x ซึ่งเป็นผลให้อินทิกรัลนี้ มีคุณสมบัติเฉพาะตัวบางประการที่เกี่ยวเนื่องกับขอบเขตค่าของการอินทิเกรต อันจะเป็นประโยชน์ต่อการดำเนินการต่อไป ลำดับนี้ จึงขอแสดงคุณสมบัติดังกล่าว ดังต่อไปนี้:

คุณสมบัติบางประการของอินทิกรัลจำกัดเขต:

คุณสมบัติที่ : คุณสมบัติของการสลับขอบเขตค่าของการอินทิเกรต

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

คุณสมบัติที่ II: คุณสมบัติของการเหมือนกันของขอบเขตค่าของการอินทิเกรต

$$\int_a^a f(x\ \ dx = F(a)\quad F(a)$$

$$= 0$$

คุณสมบัติที่ III: คุณสมบัติการกระจายการอินทิเกรต

$$\int_a^d f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx + \int_c^d f(x)\ dx$$

คุณสมบัติที่ V: คุณสมบัติการอินทิเกรตฟังก์ชันที่เป็นลบ

$$\int_a^b -f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$$

คุณสมบัติที่ V: คุณสมบัติการคูณฟังก์ชันที่จะถูกอินทิเกรตด้วยค่าคงที่

$$\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

คุณสมบัติที่ VI: คุณสมบัติการกระจายการอินทิเกรตของฟังก์ชันผลรวม

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$

คุณสมบัติที่ VII: คุณสมบัติการอินทิเกรตโดยการแบ่งส่วน (integration by part)

$$\int_{x=a}^{x=b} v\,du = uv \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} u\,dv \qquad ; u(x), v(x)$$

3.3 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ:

อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integrals) หมายถึง อินทิกรัลจำกัดเขตที่ได้กำหนดเขตค่าโดเมน (domain) ของ x ไว้แล้ว แต่อินทิกรัลที่ได้ มีค่าไม่จำกัดหรือไม่แน่นอน ทั้งนี้อาจเกิดจากสาเหตุใดสาเหตุหนึ่งหรือจากทั้งสองสาเหตุต่อไปนี้:

1) ขอบเขตค่าของการอินทิเกรตมีค่าไม่จำกัดหรือไม่แน่นอน (infinite limits of integration)
2) ฟังก์ชันที่จะถูกอินทิเกรตให้ที่ค่าไม่จำกัดหรือไม่แน่นอน (infinite integrand)

ดังนั้นการหาค่าของอินทิกรัลนี้ จะกระทำได้ก็ต่อเมื่อ ได้แปลงอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integrals) ให้กลับกลายเป็นอินทิกรัลตรงแบบ (proper integrals) เสียก่อนเท่านั้น ซึ่งการแปลงอินทิกรัลไม่ตรงแบบให้เป็นอินทิกรัลที่ตรงแบบ และการหาค่าของอินทิกรัลอาจจะดำเนินการได้ด้วยการพิจารณาภายใต้เงื่อนไขของลิมิต (the concept of limits) กล่าวคือ ถ้าลิมิตของอินทิกรัลนั้นมีจริงและสามารถหาได้ (limit exists) อินทิกรัลนั้น ก็จะให้ค่าที่จำกัดและแน่นอนตายตัว โดยค่าของอินทิกรัลจะโน้มเข้าหาค่าจำเพาะค่าใดค่าหนึ่งโดยเฉพาะ ซึ่งลักษณะการโน้มเข้าหาค่าจำเพาะนี้ เรียกกันว่า "convergent" แต่ถ้าลิมิตของอินทิกรัลนั้น ไม่มีอยู่จริงและไม่สามารถที่จะหาได้ (limit does not exist) อินทิกรัลนั้นก็จะให้ค่าไม่จำกัดและไม่แน่นอน เพราะค่าของอินทิกรัลจะไม่โน้มเข้าหาค่าจำเพาะค่าใดค่าหนึ่งโดยเฉพาะแต่อย่างใด ซึ่งลักษณะเช่นนี้ เรียกกันว่า "divergent"

ลำดับนี้ จะขอแสดงลักษณะและวิธีการหาค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ ในแต่ละประเภทให้เห็นเด่นชัดเป็นลำดับกันไป ดังต่อไปนี้:

3.3.1 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ-อันเกิดจากขอบเขตค่าของการอินทิเกรตมีค่าไม่จำกัด

(improper integrals with infinite limits of integration)

ลักษณะ:

1) $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$

2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

และ 3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

อินทิกรัลข้างต้นนี้ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบอันเกิดจากขอบเขตค่าของการอินทิเกรตมีค่าไม่จำกัด ทั้งนี้เพราะว่า ∞ และ -∞ มิใช่จำนวน แต่เป็นเพียงสัญลักษณ์แทนคำว่า "อนันต์" (infinity) ดังนั้น อินทิกรัลเหล่านี้จึงไม่สามารถที่จะหาค่าที่แน่นอนได้ จนกว่าจะแปลงให้เป็นอินทิกรัลที่ตรงแบบด้วยการพิจารณาภายใต้ลิมิต ดังต่อไปนี้

1) $$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$$

2) $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$$

และ 3 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty\,:\,b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$$

อนึ่ง การพิจารณาภายใต้ลิมิตของอินทิกรัลข้างต้นนี้ กล่าวได้ว่า ถ้าลิมิตของอินทิกรัลใดมีมีจริงและหาได้ อินทิกรัลไม่ตรงแบบนั้นก็จะให้ค่าที่จำกัดแน่นอนตายตัว แต่ถ้าอินทิกรัลใดมีลิมิตที่ไม่เป็นจริงและหาค่าไม่ได้ อินทิกรัลไม่ตรงแบบนั้นก็จะให้ค่าที่ไม่จำกัดไม่แน่นอนเช่นกัน

ในที่นี้ จะขอแสดงตัวอย่างการหาค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง:

1) จงหาค่าของ $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

วิธีทำ:

จาก $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\left(-\frac{1}{b}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right)\right]$$

$$= 1$$: convergent //

2) จงหาค่าของ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$

วิธีทำ:

จาก $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln x\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\ln b - 0]$$

$$= \infty$$: divergent //

หมายเหตุ: ถ้า $0 < y < 1$ แล้ว $\ln y < 0$

$y = 1$ แล้ว $\ln y = 0$

$y > 1$ แล้ว $\ln y > 0$

ดังนั้น $\ln y \to \infty$ เมื่อ $y \to \infty$

$\ln y \to -\infty$ เมื่อ $y \to 0$

3.3.2 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ-อันเกิดจากฟังก์ชันที่จะถูกอินทิเกรตให้ค่าไม่จำกัด
(improper integrals with infinite integrand)

อินทิกรัลไม่ตรงแบบ อันเกิดจากฟังก์ชันที่จะถูกอินทิเกรตให้ค่าที่ไม่จำกัด หมายถึง อินทิกรัลจำกัดเขต ซึ่งมีฟังก์ชันที่จะถูกอินทิเกรตให้ค่าไม่จำกัด (infinite value) ในช่วงโดเมนของ x ช่วงใดช่วงหนึ่ง อันเป็นผลทำให้อินทิกรัลที่ได้มีค่าที่ไม่จำกัดตามไปด้วย ดังนั้น การหาค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบข้างต้น จึงเป็นไปไม่ได้ จนกว่าจะเปลี่ยนรูปให้เป็นอินทิกรัลที่ตรงแบบเสียก่อนเท่านั้น ซึ่งอาจดำเนินการแปรรูปด้วยการพิจารณาภายใต้ลิมิต ดังลักษณะทั่วไปต่อไปนี้:

ลักษณะ:

1) $$\int_0^b f(x)\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^b f(x)\,dx$$

2) $$\int_a^0 f(x)\,dx = \lim_{b\to 0}\int_a^b f(x)\,dx$$

และ 3) $$\int_{-a}^b f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-a}^{b} f(x)\ dx = \lim_{p \to 0^-} \int_{-a}^{p} f(x)\ dx \quad t \quad \lim_{p \to 0^+} \int_{p}^{b} f(x)\ dx$$

อนึ่ง ถ้าลิมิตของอินทิกรัลใดข้างต้นนี้ มีจริงและหาได้ (limit exists) อินทิกรัลนั้นก็จะสามารถประเมินหาค่าที่แน่นอนได้ ในทางกลับกัน ถ้าลิมิตของอินทิกรัลใดไม่มีอยู่จริงหาไม่ได้ (limit does not exist) อินทิกรัลนั้นก็จะไม่สามารถประเมินหาค่าที่แน่นอนได้

ตัวอย่าง:

1) จงหาค่าของ: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\ dx$

ข้อพิจารณา:

จากอินทิกรัลข้างต้น จะเห็นได้ว่า เมื่อ: $x \to 0^+$ ฟังก์ชันที่จะต้องถูกอินทิเกรตจะให้ค่าที่ไม่จำกัด นั่นคือ: $1/x^2 \to \infty$ (ค่าไม่จำกัด) ดังนั้น อินทิกรัลนี้ จึงเป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ ฉะนั้นจึงต้องดำเนินการภายใต้ลิมิต ดังต่อไปนี้:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\ dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2}\ dx$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg]_a^1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0^+} [(-\frac{1}{1}) - (-\frac{1}{a})]$$

$$= \lim_{a\to 0^+} [-1 + \frac{1}{a}]$$

$$= \infty$$

: divergent //

2) จงหาค่าของ $\int_0^9 x^{-1/2}\,dx$

ข้อพิจารณา:

จากอินทิกรัลข้างต้น จะเห็นได้ว่า เมื่อ: $x \to 0^+$ ฟังก์ชันที่จะต้องถูกอินทิเกรตจะให้ค่าที่ไม่จำกัด นั่นคือ: $x^{-1/2} \to \infty$ (ค่าไม่จำกัด) ดังนั้น อินทิกรัลนี้ จึงเป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ ฉะนั้นจึงต้องดำเนินการภายใต้ลิมิต ดังต่อไปนี้:

$$\int_0^9 x^{-1/2}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^9 x^{-1/2}\,dx$$

$$= \lim_{a\to 0^+} (2x^{1/2}) \Big]_a^9$$

$$\int_0^9 x^{-1/2}\,dx = \lim_{a\to 0^+} [2(9)^{1/2} - 2(a)^{1/2}]$$

$$= \lim_{a\to 0^+} [6 - 2(a)^{1/2}]$$

$$= 6 - 0$$

$$= 6$$

: convergent //

31 จงหาค่าของ $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^3}\,dx$

ข้อพิจารณา:

จากอินทิกรัลข้างต้น จะเห็นว่าเป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันจาก x ที่มีค่าตั้งแต่ −1 จนถึง +1 ซึ่งค่านี้จะต้องเริ่มจาก −1 ผ่าน 0 แล้วจึงถึง +1 แต่เมื่อ $x \to 0$ ฟังก์ชันที่จะต้องถูกอินทิเกรต จะให้ค่าที่ไม่จำกัด นั่นคือ: $1/x^3 \to \infty$ (ค่าไม่จำกัด) ดังนั้น อินทิกรัลนี้ จึงเป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ ฉะนั้น จึงต้องกระจายฟังก์ชันแล้วดำเนินการภายใต้ลิมิต ดังต่อไปนี้:

กระจายฟังก์ชัน:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^3}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{0}^{+1} \frac{1}{x^3}\,dx$$

ดำเนินการพิจารณาภายใต้ลิมิต:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{b\to 0^-}\int_{-1}^{b} \frac{1}{x^3}\,dx + \lim_{b\to 0^+}\int_{b}^{+1} \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$= \lim_{b\to 0^-}\left(-\frac{x^{-2}}{2}\right)\Bigg]_{-1}^{b} + \lim_{b\to 0^+}\left(-\frac{x^{-2}}{2}\right)\Bigg]_{b}^{+1}$$

$$= \lim_{b\to 0^-}\left[\frac{-1}{2b^2} + \frac{1}{2}\right] + \lim_{b\to 0^+}\left[\frac{-1}{2} + \frac{1}{2b^2}\right]$$

$$= [-\infty] + [\infty]$$

: divergent //

4. การประยุกต์อินทิกรัลในทางเศรษฐศาสตร์บางประการ:

อินทิกรัล สามารถใช้วิเคราะห์เรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์ได้หลายลักษณะ ดังที่จะแสดงเป็นตัวอย่างบางประการ ต่อไปนี้:

4.1 การหาฟังก์ชันรวมจากฟังก์ชันส่วนเหลื่อม:

ถ้าหากกำหนดฟังก์ชันรวม (total function) มาให้ จะสามารถหาฟังก์ชันส่วนเหลื่อม (marginal function) ได้ โดยการหาอนุพันธ์ (differentiation) ในทางกลับกัน ถ้ากำหนดฟังก์ชันส่วนเหลื่อมให้ ก็สามารถหาฟังก์ชันรวมได้ ด้วยการอินทิเกรตเช่นกัน