บทที่ 5
เศรษฐศาสตร์เชิงพลวัต
(Dynamic Economics)

บทที่ 5

เศรษฐศาสตร์เชิงพลวัต

(Dynamic Economics)

เค้าโครงเรื่อง :

1. ความทั่วไป
2. การวิเคราะห์เชิงพลวัตกับการอินทิเกรต
3. สรุปทบทวนเรื่องเกี่ยวกับอินทิกรัลแคลคูลัส
4. การประยุกต์อินทิกรัลในทางเศรษฐศาสตร์บางประการ

   4.1 การหาฟังก์ชันรวมจากฟังก์ชันส่วนเหลื่อม

   4.2 การวิเคราะห์การลงทุนและการสะสมทุน

   4.3 การหามูลค่าปัจจุบัน

   4.4 การหามูลค่าปัจจุบันของกระแสถาวร

   4.5 การวิเคราะห์แบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของโดมาร์

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อศึกษาเรื่องเศรษฐศาสตร์เชิงพลวัตนี้จบแล้ว นักศึกษาสามารถ :

1. อธิบายความหมายของการวิเคราะห์ทางเศรษฐศาสตร์เชิงพลวัตได้อย่างถูกต้อง
2. สามารถแยกแยะความแตกต่างระหว่างการวิเคราะห์แบบเวลาต่อเนื่อง และการวิเคราะห์แบบเวลาเต็มหน่วย ได้อย่างชัดเจน
3. อธิบายวิธีการประยุกต์อินทิกรัลในเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์ที่สำคัญได้
4. ประยุกต์อินทิกรัลแคลคูลัสเข้ากับปัญหาทางเศรษฐกิจปัจจุบันได้อย่างรัดกุมถูกต้อง

บทที่ 5
เศรษฐศาสตร์เชิงพลวัต
(Dynamic Economics)

1. ความทั่วไป:

พลวัต (dynamics) ในเชิงวิเคราะห์ทางเศรษฐศาสตร์ หมายถึง เรื่องราวเกี่ยวกับการวิเคราะห์เพื่อหาและการศึกษาถึง รูปแบบเฉพาะตัวของวิถีการเคลื่อนไหวของตัวแปรทางเศรษฐกิจ อันเกิดจากเวลาที่เปลี่ยนแปลงไป ซึ่งเรียกว่า "กาลวิถี" (time path) หรืออาจเป็นการวิเคราะห์เพื่อประเมินว่า ในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่งที่กำหนด ตัวแปรทางเศรษฐกิจจะมีแนวโน้มที่จะมีค่าเข้าสู่ค่าจำเพาะค่าใดค่าหนึ่งที่เรียกว่า ดุลยภาพ (equilibrium) หรือไม่ หรืออาจกล่าวอย่างสั้น ๆ ได้ว่า เป็นการศึกษาความเป็นไปของตัวแปรทางเศรษฐกิจ อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงของกำหนดเวลา (dating) นั่นเอง

ทั้งนี้ ลักษณะของเวลา (time) อาจจำแนกได้ 2 ลักษณะ คือ:

1. แบบเวลาต่อเนื่อง (continuous time)
2. แบบเวลาเต็มหน่วย (discrete time)

ซึ่งแต่ละลักษณะของการวิเคราะห์ อันเกี่ยวเนื่องกับเวลา หมายถึง:

1) แบบเวลาต่อเนื่อง เป็นเรื่องเกี่ยวกับสิ่งที่เกิดขึ้นกับตัวแปร ในแต่ละหน่วยของเวลา (each point of time) เช่นเรื่องเกี่ยวกับการคิดดอกเบี้ยทบต้น ดอกเบี้ยจะทวีสะสมทบต้นต่อเนื่องกันไปไม่ขาดตอน

2) แบบเวลาเต็มหน่วย เป็นเรื่องเกี่ยวกับสิ่งที่เกิดขึ้นกับตัวแปรเป็นระยะ ๆ ของแต่ละคาบของเวลา (period of time) นั่นคือ การเปลี่ยนแปลงของตัวแปรจะเป็นไปเพียงครั้งเดียวในแต่ละช่วงของเวลาเท่านั้น เช่นเรื่องเกี่ยวกับการคิดดอกเบี้ยมีกำหนดระยะเวลา ดอกเบี้ยจะสะสมเข้ามาเมื่อถึงเวลาที่กำหนดกันเท่านั้น ซึ่งอาจจะเป็นรายปี รายเดือน แล้วแต่คาบหรือช่วงระยะเวลาที่กำหนดนั้น

ซึ่งลักษณะเวลาในการวิเคราะห์จะเป็นแบบใด ย่อมขึ้นอยู่กับเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์ที่กำลังศึกษาอยู่นั้นเป็นสำคัญ

อนึ่ง ในการศึกษาแต่ละลักษณะของการวิเคราะห์จะต้องมีความรู้พื้นฐาน ดังต่อไปนี้:

แบบเวลาต่อเนื่อง ต้องรู้เรื่องอินทิกรัลแคลคูลัส (integral calculus) และสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations)

แบบเวลาเต็มหน่วย ต้องรู้เรื่องสมการผลต่างสืบเนื่อง (difference equations)

2. การวิเคราะห์เชิงพลวัตกับการอินทิเกรต:

ในการวิเคราะห์ทางเศรษฐศาสตร์ มีลักษณะการวิเคราะห์ที่เกี่ยวข้องกับเวลา ซึ่งเป็นที่ทราบกันอยู่โดยทั่วไปสามลักษณะ ได้แก่ การวิเคราะห์เชิงสถิต (static analysis) การวิเคราะห์เชิงสถิตเปรียบเทียบ (comparative-static analysis) และการวิเคราะห์เชิงพลวัต (dynamic analysis):

โดยการวิเคราะห์เชิงสถิต เป็นการวิเคราะห์เพื่อตอบคำถามที่ตั้งขึ้นภายใต้เงื่อนไขบางประการที่กำหนด โดยเฉพาะอย่างยิ่งเพื่อหาเงื่อนไขแห่งดุลยภาพและผลลัพธ์ของดุลยภาพเปรียบเทียบ นั่นคือ ต้องการทราบว่าตัวแปรผันภายใน (endogenous variables) จะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร ถ้าตัวแปรผันภายนอก (exogenous variables) เปลี่ยนแปลงไป

สำหรับการวิเคราะห์เชิงสถิตเปรียบเทียบ เป็นเพียงการเปรียบเทียบสภาพสถิตของดุลยภาพหนึ่งกับอีกดุลยภาพหนึ่ง โดยไม่คำนึงถึงเวลาใดๆ ที่ใช้ไปในการเปลี่ยนสภาพจากจุดหนึ่งไปสู่อีกจุดหนึ่งแต่อย่างใด

ส่วนการวิเคราะห์เชิงพลวัต เป็นการศึกษาความเป็นไปของตัวแปร อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงของเวลา

อย่างไรก็ตาม โดยเหตุที่การวิเคราะห์ในสองลักษณะแรก เป็นที่ทราบและคุ้นเคยกันอยู่โดยทั่วไปแล้ว ในที่นี้จึงขอกล่าวถึงการวิเคราะห์ในเชิงพลวัตเป็นสำคัญ และเพื่อให้เกิดจุดเริ่มต้นของแนวคิด จึงขอยกตัวอย่างการวิเคราะห์เชิงพลวัตต่อไปนี้เป็นเบื้องต้น

ตัวอย่าง 5-1: การหากาลวิถีของจำนวนประชากร (ตัวอย่างการวิเคราะห์เชิงพลวัต)

ถ้า H คือ จำนวนประชากร (population size) ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ในอัตรา $t^{-1/2}$ หรือ $dH/dt = t^{-1/2}$

อยากทราบว่า: กาลวิถีของประชากร (time path of population) เป็นอย่างไร

ข้อพิจารณา:

ในที่นี้ กาลวิถีของจำนวนประชากรที่ต้องการ คือ สมการดั้งเดิม (primitive function) ของอนุพันธ์ที่กำหนดนั่นเอง ทั้งนี้เพราะ สมการดั้งเดิมเป็นสมการของจำนวนประชากรที่อยู่ในรูปของเวลา: $H = H(t)$ ที่ต้องการ

ซึ่งสมการดั้งเดิมของอนุพันธ์ที่กำหนด จะหาได้จากการอินทิเกรตอนุพันธ์ที่กำหนดดังกล่าวดังต่อไปนี้:

จาก $$\frac{dH}{dt} = t^{-1/2}$$

เมื่ออินทิเกรตมุ่งต่อ t จะได้:

$$H(t) = 2t^{1/2} + c \qquad : c = \text{ค่าคงที่ใด ๆ}$$

อย่างไรก็ตาม สมการดั้งเดิมที่ได้นี้ ยังไม่สามารถกล่าวได้ว่าเป็นกาลวิถีที่สมบูรณ์ของอนุพันธ์ที่กำหนด จนกว่าจะทราบค่าคงที่ c เสียก่อน ดังนั้น การที่จะชี้ชัดกาลวิถีที่แท้จริงได้ ก็ต่อเมื่อได้ทราบค่าคงที่ c แล้วเท่านั้น ซึ่งการที่จะทราบค่าคงที่ c นี้ได้ จำเป็นต้องมีข้อมูลเพิ่มเติมเสียก่อน และข้อมูลเบื้องต้นเกี่ยวกับค่าคงที่ c นี้ มักเรียกกันว่า initial condition หรือ boundary condition นั่นเอง

ในที่นี้ ถ้าได้ทราบว่า จำนวนประชากรเบื้องต้น (initial population): H(0) ซึ่งก็คือ H เมื่อ t=0 เป็นเท่าไร ก็จะสามารถหาค่าคงที่ c ต่อไปได้

เช่นถ้าทราบว่า: $$H(0) = 100$$

จาก $$H(t) = 2t^{1/2} + c$$

เมื่อ t=0 จะได้: $$H(0) = 2(0)^{1/2} + c$$

$$= c$$

แต่ $H(0) = 100$

ดังนั้น $$c = 100$$

เช่นนี้แล้ว สมการดั้งเดิม หรือ กาลวิถี เมื่อ H(0) = 100 ก็คือ:

$$H(t) = 2t^{1/2}\ t\ 100$$

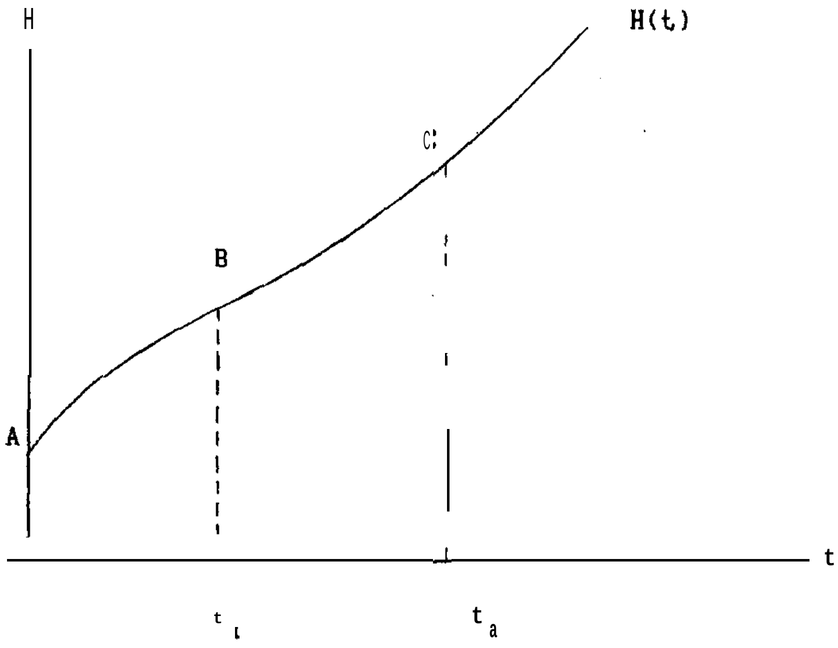
และ กาลวิถี เมื่อจำนวนประชากรเบื้องต้น H(0) ใด ๆ ก็จะคือ:

$$H(t) = 2t^{1/2} + H(0)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า จำนวนประชากร "H" ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง จะประกอบด้วย ส่วนของจำนวนประชากรเบื้องต้น: H(0) และส่วนของตัวแปรเวลา: t ประกอบกัน เป็นสำคัญ

อนึ่ง ความสัมพันธ์ของจำนวนประชากรกับเวลา อันประกอบกันขึ้นเป็นกาลวิถีของจำนวนประชากรดังกล่าวข้างต้นนี้ อาจจะแสดงได้โดยภาพกราฟในลักษณะทั่วไป ดังรูปต่อไปนี้:

รูป 5-1: ภาพกราฟกาลวิถีของจำนวนประชากร



ข้อสังเกต จาก รูป 5-1:

1) กาลวิถีของจำนวนประชากร คือ ค่าของ H ในแต่ละเวลา ($t_1, t_2, \ldots t_n$) และเมื่อเชื่อมโยงค่าของ H ทุกตำแหน่งเข้าด้วยกันแล้ว จะได้ทางเดินของจุด หรือเส้น H(t) เป็นกาลวิถีของจำนวนประชากรที่ต้องการ แต่ทั้งนี้ต้องทราบจำนวนประชากรเบื้องต้น หรือ H(0) เสียก่อน ซึ่งที่จริงก็คือค่าที่จุด A นั่นเอง
2) กาลวิถีของจำนวนประชากร กรณีวิเคราะห์ในลักษณะเวลาต่อเนื่อง คือ ค่าของ H ที่จุด B หรือจุด C ใด ๆ
3) กาลวิถีของจำนวนประชากร กรณีวิเคราะห์ในลักษณะเวลาเต็มหน่วย คือ ค่าของ H ในช่วงระหว่าง t_1-t_2 หรือก็คือ ค่าของ H ระหว่างจุด B ถึงจุด C ใดๆ นั่นเอง

อย่างไรก็ตาม โดยเหตุที่การที่จะเข้าใจกาลวิถีใด ๆ ต้องมีความเข้าใจเรื่องอินทิกรัลแคลคูลัสเสียก่อน ลำดับนี้จึงขอสรุปทบทวนเรื่องเกี่ยวกับอินทิกรัลแคลคูลัส ให้เข้าใจตรงกันดังนี้

3. สรุปทบทวนเรื่องเกี่ยวกับอินทิกรัลแคลคูลัส:

ดังเป็นที่ทราบกันอยู่โดยทั่วไปแล้วว่า อินทิกรัล (integrals) หมายถึง ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) และ การอินทิเกรต (integration) ก็คือ การกระทำที่ตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ (reverse of differentiation) ดังนั้น ถ้าการหาอนุพันธ์ หมายถึง การแยกฟังก์ชันให้เป็นส่วนย่อย ๆ เช่นนี้แล้ว การอินทิเกรต ย่อมจะหมายถึง การรวมค่าของฟังก์ชันย่อย ๆ เหล่านั้นเข้าด้วยกัน ให้กลับกลายเป็นฟังก์ชันเดิมนั่นเอง[1]

ลำดับนี้ จะขอแสดงความหมายของอินทิกรัล ในลักษณะของสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ให้เห็นเด่นชัดอีกโสดหนึ่ง ดังต่อไปนี้:

---

[1] ถ้าพิจารณาในรูปของกราฟ การอินทิเกรต ก็คือ การรวมพื้นที่ภายใต้ฟังก์ชันนั้น ๆ

ลักษณะทางคณิตศาสตร์:

ถ้าสมมุติว่า ฟังก์ชันเดิม คือ:

$$F(x) = \text{primitive function}$$

แล้ว อนุพันธ์ ก็จะคือ:

$$dF(x) = f(x)dx \qquad : \; dF(x)/dx = f(x)$$

ดังนั้น เมื่ออินทิเกรต จะได้:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

ในที่นี้ หมายความว่า ถ้า F(x) เป็นฟังก์ชันเดิม (primitive function) แล้วฟังก์ชันอนุพัทธ์ (derived function) ก็จะคือ f(x) และเมื่ออินทิเกรต f(x) ก็จะได้ F(x) ดังเดิม นั่นเอง

หมายเหตุ:

F(x) = ฟังก์ชันเดิม (primitive function)

f(x) = ฟังก์ชันที่จะถูกอินทิเกรต (integrand)

$\int$ = สัญลักษณ์ของอินทิกรัล (integral sign) หมายถึง "ผลรวม" (sum) ซึ่งได้จากการนำอักษรตัวแรกของคำว่า "Sum" มาดัดแปลงเป็นสัญลักษณ์ โดยการยืดตัว "S" ให้ยาวขึ้น (elongated S) แล้วเขียนด้วยตัวทึบ

dx = สัญลักษณ์แสดงถึงตัวแปรที่จะถูกอินทิเกรต ว่ามุ่งต่อ "x"

c = ค่าคงที่ของการอินทิเกรต (constant of integration) ซึ่งจะต้องปรากฏอยู่เมื่อมีการอินทิเกรต ทั้งนี้เพราะ ถ้าฟังก์ชันเดิมมีค่าคงที่อยู่ด้วย เมื่อมีการหาอนุพันธ์ ค่าคงที่นี้ก็จะหายไป แต่เมื่อมีการอินทิเกรต ค่าคงที่ดังกล่าวจะต้องกลับคืนมาดังเดิม

อนึ่ง โดยเหตุที่อินทิกรัลโดยทั่วไปมีอยู่ด้วยกัน 3 ลักษณะ ได้แก่:

1) อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (**indefinite integrals**)
2) อินทิกรัลจำกัดเขต (**definite integrals**)
3) อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (**improper integrals**)

ในชั้นนี้ จึงขอกล่าวถึงอินทิกรัลดังกล่าวข้างต้นเป็นลำดับกันไป ดังต่อไปนี้:

3.1 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต:

อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integrals) หมายถึง อินทิกรัลซึ่งไม่ได้กำหนดเขตค่าโดเมน (domain) ของ x อันเป็นผลทำให้ อินทิกรัลที่ได้มีค่าไม่จำกัดเช่นกัน กล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขต หมายถึง การรวมค่าของฟังก์ชันโดยไม่ได้กำหนดช่วงเขตค่าของการรวม ว่าจะรวมค่าของฟังก์ชันตั้งแต่ x มีค่าเท่าไรถึงเท่าไร อันเป็นผลให้ไม่สามารถแสดงค่าผลรวมที่จำกัดและแน่นอนได้

ลักษณะ: $$\int f(x)dx = F(x) + c$$

ข้อสังเกต:

อินทิกรัลลักษณะทั่วไปข้างต้นนี้ : $\int f(x)dx$ เป็นอินทิกรัลไม่จำกัดเขต ดังนั้น ผลของการอินทิเกรต: $F(x) + c$ จึงมีค่าไม่จำกัด แต่ขึ้นอยู่กับค่าของ x เป็นสำคัญ

อย่างไรก็ตาม แม้ว่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตจะไม่สามารถแสดงค่าผลรวมที่แน่นอนได้ แต่รูปแบบของการอินทิเกรตฟังก์ชันในลักษณะต่าง ๆ ก็จะแสดงลักษณะรูปแบบของการรวมฟังก์ชันอันจะเป็นแบบอย่าง หรือกฎของการอินทิเกรต แก่การอินทิเกรตในลักษณะอื่น ๆ ได้ ซึ่งโดยสรุปแล้ว กฎมูลฐานของการอินทิเกรต จะมีอยู่โดยทั่วไปในลักษณะต่อไปนี้:

กฎมูลฐานของการอินทิเกรต (basic rules of integration):

กฎที่ I: กฎการยกกำลัง (the power rule)

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \qquad ; \; n \neq -1$$

กฎนี้ได้มาจาก:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right] = \frac{n+1}{n+1} x^{(n+1)-1}$$

$$= x^n$$

อนึ่ง ถ้า $n = -1$ อินทิกรัล (ผลของการอินทิเกรต) จะหาไม่ได้ (undefined)

ตัวอย่าง:

1) $$\int x^3 dx = \frac{1}{3+1} x^{3+1} + c$$

$$= \frac{x^4}{4} + c$$

ตรวจสอบ:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^4}{4} + c\right] = x^3$$

2) $$\int 1dx = x + c \qquad : 1dx = dx$$

ตรวจสอบ:

$$\frac{d}{dx}[x + c] = 1$$

3) $$\int \frac{1}{x^5}\,dx = \int x^{-5}\,dx$$

$$= \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c$$

$$= -\frac{1}{4x^4} + c$$

ตรวจสอบ:

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{4x^4} + c\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{-4}}{-4} + c\right]$$

$$= \frac{-4\,x^{-4-1}}{-4}$$

$$= x^{-5}$$

กฎที่ 11: กฎการยกกำลังด้วยตัวแปร (the exponential rule)

$$\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}\,a^u + c \qquad : u = u(x) > 0$$

ถ้า $a = e$:

$$\int e^u\,du = e^u + c$$

และถ้า $u = x$:

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

กฎนี้ได้มาจาก:

$$\frac{da^u}{du} = a^u \ln a$$

ตัวอย่าง:

1) $$\int e^{x+3}\,dx = \int e^{x+3}\,d(x+3)$$

$$= e^{x+3} + c$$

ตรวจสอบ:

$$\frac{d}{dx}[e^{x+3} + c] = e^{x+3}$$

2) $$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

ตรวจสอบ:

$$\frac{d}{dx}[\frac{1}{2}e^{2x} + c] = e^{2x}$$

กฎที่ III: กฎของลอการิทึม (the logarithmic rule)

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln u + c \qquad : u = u(x) > 0$$

ถ้า $u = x$:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x \text{ t } c \qquad : x > 0$$

กฎนี้ได้มาจาก:

$$\frac{d}{du} \ln u = \frac{1}{u}$$

ตัวอย่าง:

1) $$\int \frac{2}{x}\, dx = 2 \ln x \text{ t } c$$

ตรวจสอบ:

$$\frac{d}{dx}[2\ln x \text{ t } c] = \frac{2}{x}$$

2) $$\int \frac{1}{x+1}\, dx = \int \frac{1}{x+1}\, d(x+1)$$

$$= \ln (x+1) \text{ t } c$$

ตรวจสอบ:

$$\frac{d}{dx}[\ln (x+1) \text{ t } c] = \frac{1}{x+1}$$

กฎการดำเนินการ (rules of operation):

กฎที่ IV: อินทิกรัลของผลรวม (the integral of a sum)

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

ตัวอย่าง:

1) $$\int (x^2 + x + 1)\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int 1\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) + \left(\frac{x^2}{2} + c_2\right) + (x + c_3)$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c \quad ; \; c = c_1 + c_2 + c_3$$

2) $$\int \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx = \int e^x\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= (e^x + c_1) + (\ln x + c_2)$$

$$= e^x + \ln x + c \qquad ; \; c = c_1 + c_2$$

กฎที่ V: อินทิกรัลของผลคูณ (the integral of a multiple)

$$\int kf(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

ตัวอย่าง:

1) $$\int -3f(x)\ dx = -3\int f(x)\,dx \qquad : k = -3$$

2) $$\int 3x^2\ dx = 3\int x^2\ dx \qquad : k = 3$$

$$= 3(\frac{x^3}{3}\ t\ c)$$

$$= x^3 + c$$

3) $$\int (3e^x - \frac{2}{x})dx = 3\int e^x\ dx - 2\int \frac{1}{x}\ dx$$

:กฎที่ IV และ V

$$= (3e^x + c_1) - (2\ln\ x\ t\ c_2)$$

$$= 3e^x - 2\ln X + C \qquad : C = c_1 + c_2$$

กฎที่ VI: กฎการแทนที่ (the substitution rule)

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\ dx = \int f(u)\ du$$

$$= F(u)\ t\ c$$

กฎนี้ได้มาจาก:

จาก $$\frac{d}{dx}F(u) = \frac{d}{du}F(u)\frac{du}{dx}$$: chain rule

$$= f(u)\frac{du}{dx}$$

ดังนั้น $$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{d}{dx}F(u)\,dx$$

$$= F(u) \; t \; C$$

ตัวอย่าง:

1) $$\int 2x(x^2 + 1)\,dx = \int (2x^3 + 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + x^2 + c$$

ถ้าดำเนินการโดยกฎการแทนที่ (substitution rule):

โดยให้ $u = x^2 + 1$: u ควรใช้แทนกลุ่มที่ซับซ้อน

แล้ว $\frac{du}{dx} = 2x$

ดงนน $$\int 2x(x^2 + 1)\,dx = \int \quad u)\,dx$$

$$\int 2x(x^2 + 1)\, dx = \int (u)\frac{du}{dx}\, dx$$

$$= \int u\, du$$

$$= \frac{u^2}{2} + c_1$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 1)^2 + c_1 \qquad : u = x^2+1$$

$$= \frac{1}{2}(x^4 + 2x^2 + 1) + c_1$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + x^2 + c \qquad : c = \frac{1}{2} + c_1$$

//

2) จงหาค่าของ: $\int 15x^2(x^3 + 2)^4\, dx$

ข้อพิจารณา: การอินทิเกรตฟังก์ชันข้างต้นนี้กระทำโดยตรงได้ยาก จึงดำเนินการโดยวิธีการของกฎการแทนที่ ดังนี้:

ถ้าให้ $u = x^3 + 2$: u ควรใช้แทนกลุ่มที่ซับซ้อน

แล้ว $\frac{du}{dx} = 3x^2$

ดังนั้น $\int 15x^2(x^3 + 2)^4 \, dx = \quad 5 \dfrac{du}{dx}(u^4) \, dx$

I

$= \quad 5(u^4)\dfrac{du}{dx} \, dx$

I

$= \int 5u^4 du$

$= u^5 + c$

$= (x \ t \ 2)^5 \ t \ c$

3) จงหาค่าของ: $\int 6e^{2x-3} \, dx$

ข้อพิจารณา:

การอินทิเกรตฟังก์ชันข้างต้นนี้กระทำโดยตรงได้ยาก จึงดำเนินการโดยวิธีการของกฎการแทนที่ ดังนี้:

ถ้าให้ $u = 2x-3$: u ควรใช้แทนกลุ่มที่ซับซ้อน

แล้ว $\dfrac{du}{dx} = 2$

หรือ $dx = \dfrac{du}{2}$

ดังนั้น
$$\int 6e^{2x-3}\,dx = \int 6e^{u}\,\frac{du}{2}$$
$$= \int 3e^{u}\,du$$
$$= 3e^{u} + c$$
$$= 3e^{2x-3} + c$$

4) จงหาค่าของ:
$$\int \frac{6x^2 + 4}{x^3 \ t \ 2x}\,dx$$

ข้อพิจารณา:

การอินทิเกรตฟังก์ชันข้างต้นนี้ไม่สามารถกระทำได้โดยตรง จึงดำเนินการโดยวิธีการของกฎการแทนที่ ดังนี้:

ถ้าให้ $u = x^3 + 2x$: u ควรใช้แทนกลุ่มที่ซับซ้อน

แล้ว $\frac{du}{dx} = 3x^2 \ t \ 2$

ดังนั้น
$$\int \frac{6x^2 + 4}{x^3 + 2x}\,dx = \int \frac{2(du/dx)}{u}\,dx$$