พิจารณาจากฝ่าย B:

กลยุทธ์ที่ A ใช้	ผลตอบแทนที่ B คาดว่าจะเสีย
A_1	$v = 7y_1 + 3y_2 = 7(1/6) + 3(5/6) = 11/3$
A_2	$v = 2y_1 + 4y_2 = 2(1/6) + 4(5/6) = 11/3$

พิจารณาจากทั้งสองฝ่าย:

กลยุทธ์ที่ใช้	ผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้หรือจะเสีย
B_1	$v = 7x_1 + 2x_2 = 7(1/3) + 2(2/3) = 11/3$
B_2	$v = 3x_1 + 4x_2 = 3(1/3) + 4(2/3) = 11/3$
A_1	$v = 7y_1 + 3y_2 = 7(1/6) + 3(5/6) = 11/3$
A_2	$v = 2y_1 + 4y_2 = 2(1/6) + 4(5/6) = 11/3$

โดยสรุปจะได้ผลเฉลยโดยย่อ ดังนี้:

$$A = (x_1, x_2) = (1/3, 2/3)$$

$$B = (y_1, y_2) = (1/6, 5/6)$$

$$v = 11/3 \quad = 3.6+$$

อนึ่ง จากการที่ได้พิจารณาการหาผลเฉลยโดยวิธีเลขคณิตมาโดยลำดับแล้ว จะเห็นได้ว่า วิธีเลขคณิตเป็นวิธีที่ง่าย สะดวก และรวดเร็ว แต่เป็นที่น่าเสียดายว่า วิธีเลขคณิตนี้จะใช้ได้กับกลยุทธ์ของเกมที่มีขนาด 2 x 2 เท่านั้น

) การหาผลเฉลยโดยวิธีพีชคณิตเมทริกซ์:

การแข่งขันกรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์แบบกลยุทธ์ผสม (two-person zero-sum game with mixed strategies) สามารถที่จะหาผลเฉลยได้โดยวิธีพีชคณิตเมทริกซ์ (matrix algebra) ถ้าตารางการแข่งขันเป็นแบบจัตุรัส หรือนั่นคือเมื่อคู่แข่งขันทั้งสองฝ่ายมีกลยุทธ์เท่ากัน m x m ทั้งนี้โดยไม่จำกัดว่ากลยุทธ์ที่เท่ากันจะเป็นจำนวนเท่าไร

การหาผลเฉลยโดยวิธีพีชคณิตเมทริกซ์นี้ สามารถหาอัตราการใช้กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของคู่แข่งขันแต่ละฝ่ายตลอดจนค่าของเกมได้โดยอิสระ โดยมีรูปแบบสำเร็จดังต่อไปนี้:

ถ้าตารางผลตอบแทนของ A (A's payoff matrix คือ:

$$
\begin{array}{c}
\quad\quad B \\
P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}_{m \times m}
\end{array}
$$

กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ A [A's optimal strategies: $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$] ก็จะคือ

$$
(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{[1\ 1\ \cdots\ 1]_{1\times m}\,[\mathrm{adj}\ P]_{m\times m}}{[1\ 1\ \cdots\ 1]_{1\times m}\,[\mathrm{adj}\ P]_{m\times m}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}_{m\times 1}}
$$

$$
= [x_1\ \ x_2\ \cdots\ x_m]_{1\times m}
$$

กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ B [(B's optimal strategies: $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$] คือ:

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \frac{[1\ 1\ \cdots\ 1]_{1\times m}\ [\mathrm{cof}\ P]_{m\times m}}{[1\ 1\ \cdots\ 1]_{1\times m}\ [\mathrm{adj}\ P]_{m\times m}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}_{m\times 1}}$$

$$= [y_1\ \ y_2\ \cdots\ y_m]_{1\times m}$$

และ ค่าของเกม (value of the gamer v) คือ:

$$v = [\text{A's optimal strategies}]_{1\times m}[P]_{m\times m}\begin{bmatrix}\text{B's}\\\text{optimal}\\\text{strategies}\end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$= [v]_{1\times 1}$$

หรืออาจได้จาก:

$$v = \frac{|P|_{m\times m}}{[1\ 1\ \cdots\ 1]_{1\times m}\ [\mathrm{adj}\ P]_{m\times m}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}_{m\times 1}}$$

โดยที่: adj P = adjoint matrix P

cof P = cofactor matrix P

|P| = determinant of P

ในที่นี้ เพื่อให้สามารถใช้รูปแบบสำเร็จหรือสูตรการหาผลเฉลยปัญหาการแข่งขัน โดยวิธีพีชคณิตเมทริกซ์นี้ได้อย่างถูกต้อง และเพื่อให้สามารถเปรียบเทียบกับการหาผลเฉลยโดยวิธีอื่นได้ จึงขอแสดงตัวอย่างการหาผลเฉลยของปัญหาการแข่งขัน ซึ่งเคยแสดงโดยวิธีกราฟและวิธีเลขคณิตแล้วมาแสดง ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 3.8: ตัวอย่างการหาผลเฉลยกลยุทธ์ผสมโดยวิธีพีชคณิตเมทริกซ์

ตาราง 3.17: ตารางผลตอบแทนของ A (A's payoff matrix)

$$P = \begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

วิธีทำ:

โดยวิธีพีชคณิตเมทริกซ์ จะได้กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของคู่แข่งขันและค่าของเกม ดังต่อไปนี้:

จาก

$$P = \begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

จะได้

$$\text{cof } P = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \quad ; \text{cof } P = [c_{ij}]_{2\times 2}, \quad c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

และ

$$\text{adj } P = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \quad ; \text{adj } P = [\text{cof } P]^T$$

แล้ว:

กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ A (A's optimal strategies)

$$A = \frac{[1\ \ 1]\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}}{[1\ \ 1]\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$[x_1 \quad x_2] = \frac{[2 \quad 4]}{[6]}$$

$$= [2/6 \quad 4/6]$$

นั่นคือ $x_1 = 2/6 = 1/3$

และ $x_2 = 4/6 = 2/3$

โดยที่:

กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ B (B's optimal strategies)

$$B = \frac{[1\ \ 1]\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}}{[1\ \ 1]\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$[y_1 \quad y_2] = \frac{[1 \quad 5]}{[6]}$$

$$= [1/6 \quad 5/6]$$

นั่นคือ $y_1 = 1/6$

และ $y_2 = 5/6$

และ ค่าของเกม (value of the game) $= [1/3 \quad 2/3]\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/6 \\ 5/6 \end{bmatrix}$

$$v = [11/3 \quad 11/3] \begin{bmatrix} 1/6 \\ 5/6 \end{bmatrix}$$

$$= 11/3$$

$$= 3.6+$$

ดังนั้น คู่แข่งขันจะอยู่ในสถานะที่ดีที่สุด ถ้า A ใช้กลยุทธ์ A_1 และ A_2 ด้วยความน่าจะเป็น 1/3 และ 2/3 ตามลำดับ สำหรับ B ควรใช้กลยุทธ์ B_1 และ B_2 ด้วยความน่าจะเป็น 1/6 และ 5/6 ตามลำดับเช่นกัน เช่นนี้แล้ว A จะเป็นฝ่ายได้ประโยชน์โดยเฉลี่ยเกมละ 3.6+ (B เสีย 3.6+)

จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยโดยวิธีพีชคณิตเมทริกซ์ก็จะเหมือนกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีกราฟและวิธีเลขคณิตที่ได้กล่าวมาโดยลำดับแล้ว แต่วิธีพีชคณิตเมทริกซ์นี้สามารถใช้กับตารางการแข่งขันที่มีขนาดใหญ่กว่า 2 x 2 ได้ นั่นคือ ใช้ได้กับตารางการแข่งขันขนาด m x m ใด ๆ ก็ได้ อนึ่ง ในบางกรณี วิธีพีชคณิตเมทริกซ์นี้อาจให้ค่าความน่าจะเป็นน้อยกว่าศูนย์ (ติดลบ) หรืออาจให้ค่ามากกว่า 1 ก็ได้ ซึ่งไม่เป็นการถูกต้อง และทำให้วิธีการนี้ใช้ไม่ได้ในบางลักษณะ ที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะ วิธีพีชคณิตเมทริกซ์ไม่มีเงื่อนไขในการกันหรือบังคับค่าตัวแปรในลักษณะดังกล่าว

4) การหาผลเฉลยโดยวิธีแก้สมการระบบเชิงเส้น

การแก้สมการระบบเชิงเส้น (method of simultaneous linear equations) สามารถจะประยุกต์ใช้กับการหาผลเฉลยปัญหาการแข่งขัน กรณีคู่แข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์ แบบกลยุทธ์ผสมได้ ถ้าตารางการแข่งขันเป็นแบบจัตุรัส นั่นคือ คู่แข่งขันทั้งสองฝ่ายมีกลยุทธ์เท่ากับ m x m เช่นเดียวกันกับปัญหาที่จะใช้วิธีพีชคณิตเมทริกซ์นั่นเอง

การหาผลเฉลยโดยวิธีการแก้สมการระบบเชิงเส้นนี้ แท้ที่จริงเป็นเพียงการแก้สมการเพื่อหาค่าตัวแปรของระบบสมการเชิงเส้นทั่ว ๆ ไป กล่าวคือ เริ่มจากการนำข้อมูลจากตารางผลตอบแทนมาเขียนเป็นสมการเส้นตรงของแต่ละฝ่าย โดยมีความน่าจะเป็นในการใช้กลยุทธ์และ

ค่าของเกมเป็นตัวแปร จากนี้ก็นำสมการเส้นตรงที่สร้างขึ้นนั้นมาปรับปรุงและแก้สมการเพื่อหาค่าตัวแปรโดยวิธีพีชคณิตที่เหมาะสมต่อไป อาจจะใช้กฎของคราเมอร์[1] (Cramer's Rule) ก็ได้

ในลำดับนี้ เพื่อให้เห็นวิธีหาผลเฉลยโดยวิธีการแก้สมการนี้ และเพื่อให้สามารถเปรียบเทียบกับการหาผลเฉลยโดยวิธีอื่น จะขอยกตัวอย่างการหาผลเฉลยของปัญหาการแข่งขันซึ่งได้แสดงโดยวิธีกราฟ วิธีเลขคณิต และวิธีพีชคณิตเมทริกซ์แล้ว มาแสดงดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 3.9: ตัวอย่างการหาผลเฉลยกลยุทธ์ผสมโดยวิธีการแก้สมการระบบเชิงเส้น

ตาราง 3.18: ตารางผลตอบแทนของ A (A's payoff matrix)

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2
A_1	7	3
A_2	2	4

จาก ตาราง 3.18 ถ้าให้ x_1, x_2 แทนความน่าจะเป็นที่ฝ่าย A จะใช้กลยุทธ์ A_1 และ A_2 ตามลำดับ โดยที่ค่าความน่าจะเป็นแต่ละค่า จะต้องมากกว่าศูนย์ (ติดลบไม่ได้: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) และผลรวมของความน่าจะเป็นนี้ จะต้องมีค่าเท่ากับ 1 พอดี ๆ ($x_1 + x_2 = 1$) และถ้าผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้ คือ v (value of the game) แล้ว ผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้ อันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ของ B ก็จะคือ:

---

[1] Gabriel Cramer ค.ศ. 1704-1752, สวิตเซอร์แลนด์

กลยุทธ์ที่ B ใช้	ผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้
B_1	$7x_1 + 2x_2 = v$
B_2	$3x_1 + 4x_2 = v$

จากกลุ่มสมการข้างต้น จะเห็นได้ว่าสมการมีอยู่ 2 สมการ แต่มีตัวแปรอยู่ถึง 3 ตัว ได้แก่ x_1, x_2 และ v ดังนั้น ถ้าต้องการที่แก้สมการให้ได้ค่าตัวแปรที่แน่นอนตายตัว (unique solution) จำเป็นที่จะต้องดำเนินการปรับปรุงให้ตัวแปรเหลือเพียง 2 ตัว เพื่อให้เท่ากับจำนวนสมการที่มีอยู่ ซึ่งอาจจะกระทำได้โดยการแทนค่าดังนี้ คือ:

จากสมการเงื่อนไขของความน่าจะเป็น:

$$x_1 + x_2 = 1$$

นั่นคือ

$$x_1 = 1 - x_2$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่า x_1 ในสมการทั้งสองที่มีอยู่ จะได้:

$$7(1-x_2) + 2x_2 = v$$

$$3(1-x_2) + 4x_2 = v$$

หรือ

$$7 - 5x_2 = v$$

$$3 + x_2 = v$$

ฉะนั้นที่สุด:

$$-5x_2 - v = -7$$

$$x_2 - v = -3$$

เมื่อแก้สมการโดยกฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule) จะได้:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -7\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5\ 1 & -1\ -1 \end{vmatrix}}$$

$$= 4/6$$

$$= 2/3$$

และ $V = \dfrac{\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}$

$$= 22/6$$

$$= 11/3$$

และจาก $x_1 = 1 - x_2$

$= 1 - (2/3)$:แทนค่า $x_2 = 2/3$

ดังนั้น $x_1 = 1/3$

นั่นคือ A จะอยู่ในสถานะที่ดีที่สุดโดยได้ผลตอบแทนโดยเฉลี่ยเกมละ 11/3 หรือประมาณ 3.6+ ถ้าใช้กลยุทธ์ A_1 และ A_2 ด้วยความน่าจะเป็น 1/3 และ 2/3 ตามลำดับ

สำหรับ การหาผลเฉลยของ B ก็กระทำเช่นเดียวกันกับวิธีการของ A ข้างต้น กล่าวคือ ถ้ากำหนดให้ y_1 และ y_2 แทนความน่าจะเป็นที่ B จะใช้กลยุทธ์ B_1 และ B_2 ตามลำดับแล้ว ผลตอบแทนที่ B คาดว่าจะเสีย อันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ของ A ก็จะคือ:

กลยุทธ์ที่ A ใช้	ผลตอบแทนที่ B คาดว่าจะเสีย
A_1	$7y_1 + 3y_2 = v$
A_2	$2y_1 + 4y_2 = v$

โดยเหตุที่ ความน่าจะเป็นแต่ละค่าจะติดลบไม่ได้ หรือต้องมีค่ามากกว่าศูนย์ และผลรวมของความน่าจะเป็นจะต้องเท่ากับ 1 พอดี ๆ หรือ $y_1+y_2=1$ ดังนั้น $y_1=1-y_2$ และ เมื่อแทนค่า y_1 นี้ในสมการข้างต้นจะได้:

$$7(1-y_2) + 3y_2 = v$$
$$2(1-y_2) + 4y_2 = v$$

หรือ

$$7 - 4y_2 = v$$
$$2 + 2y_2 = v$$

ฉะนั้นที่สุด:

$$-4y_2 - v = -7$$
$$2y_2 - v = -2$$

เมื่อแก้สมการโดยกฎของคราเมอร์ (Cramer'S Rule) จะได้:

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$= 5/6$$

และ $\quad V = \dfrac{\begin{vmatrix} -4 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4\ 2 & -1\ -1 \end{vmatrix}}$

$= 22/6$

$= 11/3$

และจาก $\quad y_1 = 1 - y_2$

ดังนั้น $\quad Y_1 = 1 - (5/6)$ $\quad$:แทนค่า $y_2 = 5/6$

$= 1/6$

นั่นคือ B จะอยู่ในสถานะที่ดีที่สุด ถ้าใช้กลยุทธ์ B_1 และ B_2 ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ 1/6 และ 5/6 ตามลำดับ และทั้งนี้ B จะเป็นฝ่ายเสียประโยชน์โดยเฉลี่ยเกมละ 11/3 หรือประมาณ 3.6+ นั่นเอง

ดังนั้น จะเห็นได้ว่าผลเฉลยที่ได้จากการแก้สมการระบบเชิงเส้นนี้ จะให้ค่าเหมือนกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีกราฟ วิธีเลขคณิต และวิธีพีชคณิตเมทริกซ์ที่กล่าวมาแล้วทุกประการ แต่วิธีการแก้สมการนี้สามารถใช้กับตารางการแข่งขันที่มีขนาดเท่าใดก็ได้ขอเพียงแต่ต้องเป็นตารางจัตุรัส (mxm) เท่านั้น อนึ่งในบางกรณี วิธีการแก้สมการก็อาจให้ค่าของความน่าจะเป็นน้อยกว่าศูนย์ (ติดลบ) ดังเช่น วิธีพีชคณิตเมทริกซ์ที่กล่าวแล้วเช่นกัน ดังนั้น วิธีการนี้จึงไม่สู้นิยมใช้กันนัก แต่จะไปใช้วิธีการหาผลเฉลย โดยวิธีกำหนดการเชิงเส้น (linear programming) เป็นส่วนมาก ฉะนั้นในลำดับต่อไป จะขอกล่าวถึงวิธีการหาผลเฉลยปัญหากลยุทธ์ผสม โดยวิธีกำหนดการเชิงเส้นเป็นสำคัญ

5) การหาผลเฉลยโดยวิธีกำหนดการเชิงเส้น:

การแข่งขัน กรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์แบบกลยุทธ์ผสม (two-person zero-sum game with mixed strategies) สามารถที่จะนำวิธีการของกำหนดการเชิงเส้น (linear programming) มาประยุกต์เพื่อหาผลเฉลยได้ ทั้งนี้เพียงแต่ต้องมีการปรับเปลี่ยน และดัดแปลง รูปแบบสมการที่ได้จากตารางผลตอบแทน ให้อยู่ในรูปมาตรฐานของกำหนดการเชิงเส้นเท่านั้น จากนี้ก็สามารถหาผลเฉลยของปัญหาการแข่งขันที่กำลังพิจารณาอยู่โดยวิธีการของกำหนดการเชิงเส้นได้ดังต้องการ

โดยเหตุที่ วิธีการของกำหนดการเชิงเส้น เป็นวิธีการถอดค่าตัวแปรจากกลุ่มสมการเส้นตรง เพื่อให้ตัวแปรสนองตอบต่อเป้าหมายอย่างเหมาะสมที่สุด กล่าวคือ อาจจะเพื่อให้ได้เป้าหมายที่มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ภายใต้เงื่อนไขบางประการ โดยที่ ค่าของตัวแปรทุกตัวจะต้องมากกว่าศูนย์ (ติดลบไม่ได้) เสมอ และจำนวนตัวแปรก็ไม่จำเป็นที่จะต้องเท่ากับจำนวนสมการทั้งหมดที่มีอยู่ ดังนั้น วิธีการของกำหนดการเชิงเส้นนี้ จึงสามารถใช้กับปัญหาการแข่งขันแบบกลยุทธ์ผสมได้ทุกรูปแบบ กล่าวคือ สามารถใช้กับปัญหาการแข่งขันที่คู่แข่งขันมีกลยุทธ์ไม่เท่ากัน หรือนั่นคือ สามารถใช้กับตารางการแข่งขันที่มิใช่ตารางจัตุรัสได้ ทั้งกลยุทธ์ของคู่แข่งขันแต่ละฝ่าย จะมีจำนวนเท่าไรก็ได้เช่นกัน ฉะนั้น วิธีการของกำหนดการเชิงเส้น จึงสามารถใช้กับตารางการแข่งขันทุกขนาดรูปแบบ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ วิธีการกำหนดการเชิงเส้นนี้สามารถใช้หาผลเฉลยปัญหาการแข่งขันแบบกลยุทธ์ผสม ซึ่งมีตารางการแข่งขันขนาด $m \times n$ ใด ๆ ก็ได้ นอกจากนี้ตัวแปรซึ่งก็คือ ความน่าจะเป็นของการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ก็จะมีค่าเป็นบวก หรือมากกว่าศูนย์เสมอ และผลรวมของความน่าจะเป็นดังกล่าวก็สามารถกำหนดเป็นเงื่อนไขให้มีค่าเท่ากับ 1 พอดี ๆ ได้เช่นกัน ดังนั้น จะเห็นได้ว่าวิธีการของกำหนดการเชิงเส้น สามารถใช้หาผลเฉลยปัญหาการแข่งขันแบบกลยุทธ์ผสมได้ทุกรูปแบบ ในขณะที่วิธีการอื่น ๆ ซึ่งได้กล่าวมาแล้วก่อนหน้านี้กระทำมิได้

ในลำดับนี้ เพื่อให้เกิดความเข้าใจวิธีการใช้กำหนดการเชิงเส้นในการหาผลเฉลยปัญหา

การแข่งขันได้อย่างถูกต้องชัดเจน จึงขอแสดงหลักการ และวิธีการประยุกต์กำหนดการเชิงเส้นเพื่อใช้กับตารางการแข่งขันในรูปแบบมาตรฐาน (format) ในเบื้องต้น และจะแสดงตัวอย่างประกอบอีกชั้นหนึ่งเป็นลำดับกันไป ดังต่อไปนี้:

รูปแบบมาตรฐาน (format):

ถ้าปัญหาการแข่งขัน กรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์แบบกลยุทธ์ผสม แสดงได้ด้วยตารางการแข่งขันในรูปผลตอบแทนของ A (A's payoff matrix) ได้เป็น:

ตาราง 3.19: **ตารางผลตอบแทนของ A (A's payoff matrix)**

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	...	B_n
A_1	P_{11}	P_{12}	...	P_{1n}
A_2	P_{21}	P_{22}	...	P_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_m	P_{m1}	P_{m2}	...	P_{mn}

จากตาราง 3.19 จะเห็นได้ว่าเป็นตารางผลตอบแทนของ A กรณีที่ A มี m กลยุทธ์ ในขณะที่ B มี n กลยุทธ์ และ P_{ij} คือผลตอบแทนที่ A จะได้รับอันเกิดจากการแข่งขัน เมื่อ A ใช้กลยุทธ์ A_i และ B ใช้กลยุทธ์ B_j

ปัญหาการแข่งขันในที่นี้ก็คือ คู่แข่งขันทั้งสองฝ่ายนั้น ต้องการที่จะหาอัตราการใช้กลยุทธ์ที่เหมาะสมที่สุด (optimal strategies mixture) ซึ่งอยู่ในรูปความน่าจะเป็น (probabilities) ของการใช้กลยุทธ์แต่ละกลยุทธ์ของแต่ละฝ่ายนั่นเอง

ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ x_i ใด ๆ แทนความน่าจะเป็นที่ A จะใช้กลยุทธ์ A_i ใด ๆ แล้ว ความน่าจะเป็นและผลรวมของความน่าจะเป็นทั้งหมดของ A ก็จะคือ

$$x_i \geq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

และ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

และถ้าผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้ คือ v (value of the game) แล้ว ผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้ อันเกิดจากการที่ B ใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ก็จะคือกลุ่มสมการต่อไปนี้

กลยุทธ์ที่ B ใช้	ผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้
B_1	$p_{11}x_1 + p_{21}x_2 + \cdots + p_{m1}x_m = v$
B_2	$p_{12}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{m2}x_m = v$
....	....
B_n	$p_{1n}x_1 + p_{2n}x_2 + \cdots + p_{mn}x_m = v$

แต่โดยเหตุที่ เป้าหมายของ A คือ การหาค่าความน่าจะเป็น x_i $(i=1, 2,\ldots,m)$ ในอันที่จะมีผลทำให้ ค่าของเกมที่เขาคาดว่าจะได้รับอยู่ในระดับสูงที่สุดจากกลุ่มผลตอบแทนที่ต่ำที่สุด (maximize minimum expected payoff v) อันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ของ B หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า เป้าหมายของ A คือ ต้องการผลตอบแทนหรือค่าของเกมที่สูงที่สุด ดังนั้น ปัญหาคือการหาค่าของ x_i ที่จะทำให้ A ได้ผลตอบแทนเท่ากับ v หรือมากกว่านั้นเอง เช่นนี้แล้ว สมการผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้ดังกล่าวข้างต้น อาจเขียนให้อยู่ในรูปอสมการที่

สอดคล้องกับอสมการมาตรฐานของกำหนดการเชิงเส้น (linear programming) ได้ดังต่อไปนี้:

$$
\begin{aligned}
P_{11}x_1 + P_{21}x_2 + \cdots + P_{m1}x_m &\geq v \\
P_{12}x_1 + P_{22}x_2 + \cdots + P_{m2}x_m &\geq v \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_{1n}x_1 + P_{2n}x_2 + \cdots + P_{mn}x_m &\geq v
\end{aligned}
$$

จากนี้ ถ้าได้รวม "สมการเงื่อนไขผลรวมของความน่าจะเป็น: $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$" เข้ากับกลุ่มอสมการผลตอบแทนข้างต้น ก็จะได้กลุ่มสมการและอสมการ เป็น:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 1 \\
P_{11}x_1 + P_{21}x_2 + \cdots + P_{m1}x_m &\geq v \\
P_{12}x_1 + P_{22}x_2 + \cdots + P_{m2}x_m &\geq v \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_{1n}x_1 + P_{2n}x_2 + \cdots + P_{mn}x_m &\geq v
\end{aligned}
$$

และเพื่อปรับเปลี่ยนให้กลุ่มสมการและอสมการนี้ แสดงอยู่ในรูปลักษณะมาตรฐานของกำหนดการเชิงเส้น (linear programming) ซึ่งอาจกระทำได้โดยการนำค่าของเกม (v) หารตลอดทั้งสองข้างของสมการและอสมการทั้งหมด และเพื่อความสะดวก ถ้ากำหนดให้ $x_i/v = x_i'$ และถือเอา "สมการเงื่อนไขของผลรวมของความน่าจะเป็น" มาเป็นสมการเป้าหมายแล้วละก็ แบบจำลองของกำหนดการเชิงเส้นของปัญหาการแข่งขันนี้ ซึ่งก็คือ แบบจำลองกำหนดการเชิงเส้นของกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ A ก็จะคือ:

แบบจำลอง 3.1: แบบจำลองกำหนดการเชิงเส้นของ A

Minimize $\quad 1/v = x_1' + x_2' + \cdots + x_m'$

subject to

$$p_{11}x_1' + p_{21}x_2' + \cdots + p_{m1}x_m' \geq 1$$
$$p_{12}x_1' + p_{22}x_2' + \cdots + p_{m2}x_m' \geq 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_{1n}x_1' + p_{2n}x_2' + \cdots + p_{mn}x_m' \geq 1$$

and $$x_1', x_2', \ldots, x_m' \geq 0$$

อนึ่ง แบบจำลองการแข่งขันในรูปแบบของกำหนดการเชิงเส้น อาจเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปแบบบกระทัดรัดได้เป็นะ

Minimize $$1/v = \sum_{i=1}^{m} x_i'$$

subject to $$\sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_i' \geq 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

and $$x_i' \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ดังนั้น เมื่อหาค่าต่ำสุดของ 1/v ภายใต้สมการเงื่อนไขข้างต้น ก็จะได้ค่าสูงสุดของผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้ หรือก็คือ ได้ค่าของเกม (v) ซึ่งสูงที่สุดที่ A ต้องการ เหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะ ค่าต่ำสุดของ 1/v แท้ที่จริงก็คือค่าสูงสุดของ v นั่นเอง (min 1/v = max v)

สำหรับแบบจำลองของปัญหาการแข่งขันในรูปแบบของกำหนดการเชิงเส้นของ B ซึ่ง B ต้องการที่จะหาอัตราการใช้กลยุทธ์ผสม ซึ่งจะทำให้เขาเสียประโยชน์น้อยที่สุด หรือก็คือ ต้อง

การหาความน่าจะเป็น y_j ที่จะก่อให้เกิดค่าต่ำสุดของ v (min v) ดังนั้นแบบจำลองของ B ดังกล่าว จึงสามารถหาได้โดยนัยกลับกันของแบบจำลองกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ A นั่นเอง ซึ่งที่สุดแบบจำลองกำหนดการเชิงเส้นของกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ B ก็จะคือ:

แบบจำลอง 3.2: แบบจำลองกำหนดการเชิงเส้นของ B

$$\text{Maximize} \quad 1/v = y_1' + y_2' + \cdots + y_n'$$

subject to

$$\begin{aligned}
P_{11}y_1' + P_{12}y_2' + \cdots + P_{1n}y_n' &\leq 1 \\
P_{21}y_1' + P_{22}y_2' + \cdots + P_{2n}y_n' &\leq 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_{m1}y_1' + P_{m2}y_2' + \cdots + P_{mn}y_n' &\leq 1
\end{aligned}$$

and $$y_1', y_2', \ldots, y_n' \geq 0$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปที่กระทัดรัดได้เป็น:

$$\text{Maximize} \quad 1/v = \sum_{j=1}^{n} y_j'$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} P_{ij}y_j' \leq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\text{and} \quad y_j' \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ดังนั้น เมื่อหาค่าสูงสุดของ 1/v ภายใต้อสมการเงื่อนไขนี้ ก็จะได้ค่าต่ำสุดของผลตอบแทนหรือประโยชน์ที่ B คาดว่าจะเสีย ซึ่งก็คือค่าของเกม (v) ที่ต่ำที่สุดนั่นเอง (max 1/v = min v) นอกจากนี้ จะเห็นได้ว่าค่าของเกม (v) ในแบบจำลองของ A และ B ต่างก็จะมีค่าเท่ากันและเป็นค่าเดียวกันด้วย ฉะนั้น ผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้ก็จะเท่ากับประโยชน์ที่ B คาดว่าจะเสียนั่นเอง

อนึ่ง ถ้าได้สังเกตแบบจำลองกำหนดการเชิงเส้นของ A และของ B ประกอบกัน จะพบว่า แบบจำลองของ A และของ B นั้น เป็นแบบจำลองที่ควบคู่กัน (duality) ตามนัยของหลักการกำหนดการเชิงเส้น (linear programming) นั่นเอง ดังนั้น การหาผลเฉลยปัญหาการแข่งขันกลยุทธ์ผสมโดยวิธีกำหนดการเชิงเส้น จึงสามารถดำเนินการโดยลักษณะของ ปัญหากำหนดการควบคู่ (dual program) ตามรูปแบบ และวิธีการของกำหนดการเชิงเส้นนั่นเอง ทั้งนี้เพราะ เมื่อแบบจำลองของคู่แข่งขันฝ่ายใดฝ่ายหนึ่ง เป็นกำหนดการเบื้องต้น (primal program) แบบจำลองของอีกฝ่ายหนึ่งก็จะเป็นกำหนดการควบคู่ (dual program)

ในลำดับนี้ เพื่อให้สามารถนำวิธีกำหนดการเชิงเส้นมาใช้กับปัญหาการแข่งขันแบบกลยุทธ์ผสมนี้ได้อย่างชัดเจน จึงขอยกตัวอย่างประกอบการพิจารณาเพื่อความเข้าใจ ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 3.10: ตัวอย่างการหาผลเฉลยโดยวิธีกำหนดการเชิงเส้น

ถ้าผลตอบแทนที่ A จะได้รับ อันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ แข่งขันกับ B แสดงได้ด้วยตารางต่อไปนี้:

ตาราง 3.20: ตารางผลตอบแทนของ A (A's payoff matrix)

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	B_3
A_1	7	3	4
A_2	2	4	5

อยากทราบว่า: คู่แข่งขันแต่ละฝ่ายควรใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ อย่างไร จึงจะเหมาะสมที่สุด

วิธีทำ:

จากตาราง 3.20 จะเห็นว่าตารางผลตอบแทนของ A นี้ แสดงว่าฝ่าย A มีกลยุทธ์เพื่อการแข่งขันอยู่ 2 กลยุทธ์ ในขณะที่ทางฝ่าย B มีกลยุทธ์อยู่ 3 กลยุทธ์ด้วยกัน นั่นคือ ตารางผลตอบแทนมีขนาด $m \times n = 2 \times 3$ นั่นเอง ซึ่งจากการที่ได้ศึกษามาโดยลำดับ จะเห็นได้ว่าไม่มีวิธีการใดที่จะหาผลเฉลยปัญหาการแข่งขันนี้ได้เลย นอกจากวิธีการของกำหนดการเชิงเส้น (linear programming) เท่านั้น

โดยวิธีการของกำหนดการเชิงเส้น ตารางผลตอบแทนของ A ข้างต้น สามารถที่จะนำมาสร้างเป็นกลุ่มอสมการของผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้ อันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ของ B ได้ดังต่อไปนี้:

กลยุทธ์ที่ B ใช้	ผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้
B_1	$7x_1 + 2x_2 \geq v$
B_2	$3x_1 + 4x_2 \geq v$
B_3	$4x_1 + 5x_2 \geq v$

และ $x_1 + x_2 = 1$ ในขณะที่ $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

และจากเงื่อนไขของความน่าจะเป็นที่ว่า ผลรวมของความน่าจะเป็นจะต้องเท่ากับ 1 พอดี ๆ และที่สุด ความน่าจะเป็นจะต้องมีค่าเป็นบวกหรือมากกว่าศูนย์เสมอ

นั่นคือ $x_1 + x_2 = 1$

และ $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

ดังนั้น เมื่อรวมกลุ่มอสมการข้างต้น เข้ากับสมการเงื่อนไขของความน่าจะเป็น แล้วหารตลอดทุกสมการและอสมการด้วย v โดยกำหนดให้ $x_1/v = x_1'$ และ $x_2/v = x_2'$ จากนี้ก็ถือเอา สมการเงื่อนไขผลรวมของความน่าจะเป็นเป็นสมการเป้าหมายแล้ว สมการและกลุ่มอสมการเหล่านี้ ก็จะสามารถแสดงในรูปแบบจำลองของกำหนดการเชิงเส้น ได้ดังนี้ คือ:

แบบจำลอง 3.3: แบบจำลองกำหนดการเชิงเส้นของ A

Minimize $\quad 1/v = x_1' + x_a'$

subject to
$$7x_1' + 2x_2' \geq 1$$
$$3x_1' + 4x_2' \geq 1$$
$$4x_1' + 5x_2' \geq 1$$

and $\quad X_1' \geq 0,\ x_2' \geq 0$

จากแบบจำลองของกำหนดการเชิงเส้นนี้ เมื่อหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพลกซ์ (simplex method) กรณีต้องการค่าต่ำสุด (minimization) แบบของ William J. Baumol ตามที่ได้แสดงโดยละเอียดไว้แล้วในบทที่ 2 จะได้ตารางคำนวณผลเฉลยเป็นลำดับกันไป ดังต่อไปนี้:

ตาราง 3.21: ตารางซิมเพลกซ์ผลเฉลยของ A

	constants	x_1'	x_2'
$1/v$	0	1	1
s_1	-1	7	2
s_2	-1	3	4
s_3	-1	4	5

	constants	x_1'	s_3
$1/v$	1/5	1/5	1/5
s_1	-3/5	27/5	2/5
s_2	-1/5	-1/5	4/5
x_2'	1/5	-4/5	1/5

	constants	s_1	s_3
$1/v$	2/9	1/27	5/27
x_1'	1/9	5/27	-2/27
s_2	-2/9	-1/27	22/27
x_2'	1/9	-4/27	7/27