หลักการหาผลเฉลยในลักษณะนี้ จึงเรียกกันว่า หลักต่ำสุดสูงสุด (Minimax Principle)

ในลำดับนี้ เพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ชัดเจน และสามารถนำวิธีการหาผลเฉลยที่เรียกว่า "หลักต่ำสุดสูงสุด" (Minimax principle) ไปใช้ได้อย่างถูกต้อง จึงขอสรุปวิธีการหาผลเฉลยดังกล่าวเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1: สร้างตารางการแข่งขัน

เมื่อพบปัญหาการแข่งขันที่เป็นการศึกษากลยุทธ์แท้ ให้นำข้อมูลต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับการแข่งขัน อันได้แก่ กลยุทธ์ต่าง ๆ ของคู่แข่งขันและผลอันเกิดจากกลยุทธ์ต่าง ๆ ที่คู่แข่งขันใช้พร้อมกันนั้น เขียนลงในตารางที่เรียกว่าตารางการแข่งขัน (game matrix) โดยจัดให้ตารางการแข่งขันนี้แสดงผลตอบแทนของฝ่ายที่เลือกกลยุทธ์ด้านแถวนอนเป็นสำคัญ ซึ่งถ้าด้านแถวนอนคือฝ่าย A ตารางการแข่งขันนี้ ก็จะเป็นตารางแสดงผลตอบแทนของ A (A's payoff matrix)

ขั้นที่ 2: พิจารณาหาค่าสูงสุดของค่าต่ำสุดแถวนอน

สังเกตหาค่าต่ำสุดของแต่ละแถวนอน แล้วนำค่าต่ำสุดของแต่ละแถวนี้ ลงเขียนประกอบเพิ่มเติม ต่อท้ายแถวตั้งสุดท้ายของตารางเดิม โดยอาจเรียกแถวตั้งใหม่นี้ว่า ค่าต่ำสุดแถวนอน (row-minimum column) จากนั้นให้พิจารณาเปรียบเทียบค่าต่ำสุดของแถวนอนทั้งหมดว่า ค่าต่ำสุดของแถวนอนใดคือค่าที่สูงที่สุด เมื่อพบแล้ว ให้ทำเครื่องหมายกำกับเพื่อเป็นที่สังเกตไว้ (อาจกำกับด้วยเครื่องหมายดอกจันก็ได้) ซึ่งค่าที่ทำเครื่องหมายกำกับเป็นที่สังเกตนี้ ก็คือ ค่าสูงสุดของค่าต่ำสุดแถวนอน (maximum of row minima)

ขั้นที่ 3: สร้างแถวนอนของค่าสูงสุดแถวตั้ง

สังเกตหาค่าสูงสุดของแต่ละแถวตั้ง แล้วนำค่าสูงสุดของแต่ละแถวนี้ ลงเขียนประกอบเพิ่มเติมต่อท้ายแถวนอนสุดท้ายของตารางเดิม โดยอาจเรียกแถวนอนใหม่นี้ว่าค่าสูงสุดแถวตั้ง (column-maximum row) จากนี้ให้พิจารณาเปรียบเทียบค่าสูงสุดของแถวตั้งทั้งหมดว่า ค่าสูงสุดของแถวตั้งใดคือค่าที่ต่ำที่สุด เมื่อพบแล้ว ให้ทำเครื่องหมายกำกับเป็นที่สังเกตไว้ (อาจกำกับด้วยเครื่องหมายดอกจันทร์) ซึ่งค่าที่ทำเครื่องหมายกำกับเป็นที่สังเกตนี้ ก็จะคือ ค่าต่ำสุดของค่าสูงสุดแถวตั้ง (minimum of column maxima) นั่นเอง

ขั้นที่ 4: พิจารณาผลเฉลย

สังเกตค่าต่ำสุดของค่าสูงสุดแถวตั้ง ว่าเป็นค่าเดียวกันและตัวเดียวกันกับค่าสูงสุดของค่าต่ำสุดแถวนอนหรือไม่ ถ้าใช่ ค่าที่เท่ากันและเป็นตัวเดียวกันดังกล่าวก็คือ ค่าของเกม (v : value of the game) และตำแหน่งของสมาชิกที่มีลักษณะดังกล่าว ก็คือ จุดดุลศูนย์ถ่วง อันเป็นผลเฉลยของปัญหาการแข่งขันนี้นั่นเอง ในทางตรงกันข้าม ถ้าค่าต่ำสุดของค่าสูงสุดแถวตั้งที่ได้สังเกตไว้ มีค่าไม่เท่ากันกับค่าสูงสุดของค่าต่ำสุดแถวนอน นั่นย่อมแสดงว่า ปัญหาการแข่งขันนี้มิใช่ปัญหากรณีที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วง จึงไม่สามารถที่จะใช้หลักต่ำสุดสูงสุด (minimax principle) เพื่อหาผลเฉลยดังกล่าวได้ อนึ่ง แม้ว่าค่าต่ำสุดของค่าสูงสุดแถวตั้งจะมีค่าเท่ากันกับค่าสูงสุดของค่าต่ำสุดแถวนอน แต่ถ้าค่าทั้งสองนี้มิได้มาจากสมาชิกตัวเดียวกัน หรือมิใช่สมาชิกตัวเดียวกัน ค่าที่เท่ากันดังกล่าวก็ไม่ใช่ค่าของเกม และจุดดุลศูนย์ถ่วงก็จะไม่มี ที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะว่า ปัญหาการแข่งขันดังกล่าว มิใช่ปัญหาการแข่งขันกรณีที่มีกลยุทธ์แท้เช่นกัน

จากข้อสรุปขั้นตอนการหาผลเฉลยโดยหลักต่ำสุดสูงสุดข้างต้นนี้ จะเห็นได้ว่าวิธีการหาผลเฉลยของปัญหาการแข่งขันที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วง สามารถทำได้ง่าย และสะดวกรวดเร็วมาก อันจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 3.4: ตัวอย่างการหาผลเฉลยของปัญหาที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วงโดยหลักต่ำสุดสูงสุด

ถ้าผลตอบแทนที่ A จะได้รับ อันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ แข่งขันกับ B แสดงได้ด้วยตารางต่อไปนี้:

ตาราง 3.3: ตารางผลตอบแทนของ A (A’s payoff matrix)

(บาท)

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	B_3
A_1	5	4	6
A_2	3	2	7
A_3	4	3	0

อยากทราบว่า: คู่แข่งขันแต่ละฝ่ายควรเลือกใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ อย่างไร จึงจะเหมาะสมที่สุด

วิธีทำ: โดยวิธีการหาผลเฉลยด้วยหลักต่ำสุดสูงสุด (minimax principle):

จาก ตาราง 3.8 สามารถสร้างตารางแสดงแถวตั้งค่าต่ำสุดแถวนอน (row-minimum column) และแถวนอนค่าสูงสุดแถวตั้ง (column-maximum row) เพื่อพิจารณาหาผลเฉลยเป็นลำดับต่อไป ดังตาราง3.9 ต่อไปนี้:

ตาราง 3.9: ตารางผลเฉลย

(บาท)

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	B_3	ค่าต่ำสุดแถวนอน	
A_1	5	4	6	4 *	สูงสุด
A_2	3	2	7	2	
A_3	4	3	0	0	
ค่าสูงสุดแถวตั้ง	5	4 *	7		

ต่ำสุด

จากตาราง 3.9 เมื่อได้สร้างแถวตั้งค่าต่ำสุดแถวนอน และสร้างแถวนอนค่าสูงสุดแถวตั้งแล้ว จะพบว่า "4" คือค่าสูงสุดของค่าต่ำสุดแถวนอน ในขณะเดียวกันก็จะคือค่าต่ำสุดของค่าสูงสุดแถวตั้งด้วยเช่นเดียวกัน และค่านี้ก็เป็นค่าของสมาชิกตำแหน่ง A_1-B_2 ตัวเดียวกันด้วย

ดังนั้น "4" จึงคือค่าของเกม (v:value of the game) หรือ v = 4 นั่นคือ การแข่งขันนี้ "A" จะเป็นฝ่ายได้โดยเฉลี่ยเกมละ 4 บาท ในขณะที่ "B" เป็นฝ่ายเสียประโยชน์โดยเฉลี่ยเกมละ 4 บาทเช่นกัน ซึ่งผลของการแข่งขันนี้ เกิดจากการที่ A ใช้กลยุทธ์ A_1 แต่เพียงอย่างเดียว และ B ก็ใช้กลยุทธ์ B_2 แต่เพียงกลยุทธ์เดียวเช่นกัน

โดยสรุปแล้ว คู่แข่งขันจะอยู่ในสถานะที่ดีที่สุด เมื่อ:

A_1, B_2 และ $v = 4$: v = value of the game

หรือ

[illegible]

และ $v =$ [illegible]

อนึ่ง จากที่ได้พิจารณาหาผลเฉลยโดยหลักค่าต่ำสุดสูงสุด (minimax principle) มาจนลำดับนี้นั้น เป็นการพิจารณาโดยสรุปจากวิธีการลองผิดลองถูก อย่างไรก็ตาม หลักค่าต่ำสุดสูงสุดนี้ อาจอธิบายในลักษณะของเหตุและผล ในแนวคิดของนักอนุรักษ์นิยมก็ได้เช่นกัน กล่าวคือ โดยแนวคิดอนุรักษ์นิยมแล้ว ฝ่ายที่คาดว่าจะได้ประโยชน์จะพิจารณาว่า ถ้าเขาใช้กลยุทธ์อย่างใดอย่างหนึ่งแล้ว คู่แข่งขันของเขาก็จะใช้กลยุทธ์ที่ดีที่สุด ซึ่งกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของคู่แข่งขันของเขาก็คือกลยุทธ์ที่คู่แข่งขันนั้นจะเสียน้อยที่สุด ซึ่งก็คือกลยุทธ์ที่ทำให้ฝ่ายเขาได้น้อยที่สุดนั่นเอง ดังนั้น เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกลยุทธ์ต่าง ๆ แล้ว เขาก็ควรที่จะเลือกกลยุทธ์ที่ก่อให้เกิดผลตอบแทนแก่เขามากที่สุดจากผลตอบแทนที่น้อยที่สุดของกลุ่มกลยุทธ์ที่เขามีอยู่ นั่นคือเลือกใช้กลยุทธ์ที่ให้ผลตอบแทนมากที่สุดจากผลตอบแทนที่น้อยที่สุดนั่นเอง (maximum value of minima)

ในทางตรงกันข้าม ฝ่ายที่คาดว่าจะเสียประโยชน์จะพิจารณาว่า ถ้าเขาซึ่งอาจจะเสียประโยชน์นั้น เลือกใช้กลยุทธ์อย่างใดอย่างหนึ่งแล้ว คู่แข่งขันของเขาซึ่งจะได้ประโยชน์ก็จะเลือกใช้กลยุทธ์ที่จะทำให้ตัวเองได้ประโยชน์มากที่สุด นั่นคือ ทำให้เขาเสียประโยชน์มากที่สุด ดังนั้น เขาก็จะเลือกใช้กลยุทธ์ที่จะทำให้เขาเสียประโยชน์น้อยที่สุด จากกลุ่มกลยุทธ์ที่จะก่อให้เขาเสียประโยชน์มากที่สุด นั่นคือ เลือกกลยุทธ์ที่จะทำให้เขาเสียน้อยที่สุดจากกลุ่มกลยุทธ์ที่จะทำให้เขาเสียมากที่สุดนั่นเอง (minimum value of maxima)

ในลำดับนี้ เพื่อให้เข้าใจเด่นชัดยิ่งขึ้น จะขอนำตัวอย่าง 3.4 ซึ่งแสดงโดยตาราง 3.8 มาพิจารณาโดยแนวคิดของกลุ่มอนุรักษ์นิยมอีกครั้งหนึ่ง กล่าวคือ จากตารางผลตอบแทนของ A ในตาราง 3.8 เมื่อพิจารณาตามแนวคิดอนุรักษ์นิยมแล้ว ฝ่าย A ซึ่งเป็นฝ่ายที่คาดว่าจะได้ประโยชน์จากการแข่งขันนี้จะพิจารณาว่า ถ้าเขาเลือกใช้กลยุทธ์อย่างใดอย่างหนึ่ง เช่น A_1 เขาจะได้ผลตอบแทนน้อยที่สุดเท่ากับ 4 หน่วย (บาท) เพราะฝ่าย B จะเลือกใช้กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของตน นั่นคือ B จะใช้ B_2 ทำนองเดียวกัน ถ้าเขาเลือกใช้ A_2 เขาก็จะได้น้อยที่สุด 2 หน่วย (บาท) และถ้าเขาใช้ A_3 ก็จะได้น้อยที่สุด 0 หน่วย (ไม่ได้ไม่เสีย-เท่าทุน) ทั้งนี้เพราะ B ก็จะเลือกใช้ B_2 และ B_3 ตามลำดับนั่นเอง ซึ่งผลตอบแทนที่น้อยที่สุดที่ A จะได้รับแสดงไว้แล้วในแถวตั้งค่าต่ำสุดแถวนอน (row-minimum column) ดังตาราง 3.9 ข้างต้น

ในทางตรงกันข้าม เมื่อพิจารณาด้านฝ่าย B บ้าง ถ้า B เลือกใช้ B_1 เขาก็จะเสียมากที่สุด 5 หน่วย (บาท) ทั้งนี้เพราะ ฝ่าย A จะเลือกใช้ A_1 เช่นกัน และถ้า B เลือกใช้ B_2 หรือ B_3 เขาก็จะเสียมากที่สุดเท่ากับ 4 หน่วย (บาท) หรือ 7 หน่วย (บาท) แล้วแต่กรณี ทั้งนี้ก็เพราะ A จะใช้กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของตนเข้าแข่งขันด้วย นั่นคือ A จะใช้ A_1 หรือ A_2 แล้วแต่กรณีเช่นกัน ซึ่งผลตอบแทนที่ B จะเสียมากที่สุด อันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ดังกล่าวได้แสดงไว้ในแถวนอนค่าสูงสุดแถวตั้ง (column-maximum row) ในตาราง 3.9 ข้างต้นเช่นกัน

ดังนั้น จากตัวอย่าง 3.4 ซึ่งที่สุดจะได้ตาราง 3.9 นั้น คู่แข่งขันแต่ละฝ่ายก็จะเลือกใช้กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของตน กล่าวคือฝ่าย A จะเลือกใช้กลยุทธ์ A_1 แต่เพียงอย่างเดียว ทั้งนี้เพราะว่า A จะเลือกใช้กลยุทธ์ที่ให้ผลตอบแทนมากที่สุดจากบรรดากลยุทธ์ที่เป็นค่าต่ำสุดแถวนอน ในทำนองเดียวกัน ฝ่าย B ก็จะเลือกใช้กลยุทธ์ B_2 เพราะว่า B ก็จะเลือกใช้กลยุทธ์ที่จะทำให้ฝ่ายตนเสียประโยชน์น้อยที่สุด จากบรรดากลยุทธ์ที่เป็นค่าสูงสุดแถวตั้งเช่นกัน ฉะนั้น ผลเฉลยก็จะเป็นเช่นเดียวกันกับ การพิจารณาโดยหลักต่ำสุดสูงสุดของวิธีลองผิดลองถูกทุกประการ

จากการพิจารณาหาผลเฉลยโดยหลักค่าต่ำสุดสูงสุด (minimax principle) ดังที่ได้แสดงมาโดยลำดับแล้วนี้ จะเห็นได้ชัดเจนว่า หลักดังกล่าวนี้อาจพิจารณาจากแนวคิดการลองผิดลองถูก หรือจะพิจารณาตามแนวคิดอนุรักษ์นิยม ก็จะได้ผลสรุปเป็นหลักการเดียวกันทุกประการ ดังนั้น อาจจะกล่าวโดยสรุปอีกครั้งหนึ่งได้ว่า ปัญหาการแข่งขัน กรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์แบบที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วงใด ๆ จะสามารถหาผลเฉลยที่สมเหตุสมผลโดยวิธีของหลักต่ำสุดสูงสุด (minimax principle) ได้เสมอ ทั้งนี้ ไม่ว่าฝ่ายใดจะเป็นฝ่ายได้ประโยชน์หรือเสียประโยชน์ก็ตาม นั่นคือ ใช้ได้ทั้งกรณีที่ A เป็นฝ่ายได้ประโยชน์ B เป็นฝ่ายเสียประโยชน์ หรือจะเป็นกรณีที่ A เป็นฝ่ายเสียประโยชน์ โดยที่ B เป็นฝ่ายได้ประโยชน์ก็ได้เช่นกัน อย่างไรก็ตาม ตัวอย่างที่ได้แสดงมาโดยลำดับนั้น เป็นกรณีที่ A เป็นฝ่ายได้ประโยชน์ทั้งสิ้น แต่ถึงแม้จะเป็นกรณีที่ A เป็นฝ่ายเสียประโยชน์ ก็จะสามารถแสดงให้เห็นจริงได้เช่นกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 3.5: ตัวอย่างการหาผลเฉลย โดยหลักต่ำสุดสูงสุด กรณีที่ A เป็นฝ่ายเสียประโยชน์ (B ได้ประโยชน์)

ถ้าผลตอบแทนที่ A จะได้รับ อันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ แข่งขันกับ B แสดงได้ด้วยตารางต่อไปนี้:

ตาราง 3.10: ตารางผลตอบแทนของ 'A (A's payoff matrix)

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	B_3
A_1	3	2	-2
A_2	1	-3	-4
A_3	0	I	-3

อยากทราบว่า: คู่แข่งขันแต่ละฝ่ายควรเลือกใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ อย่างไร จึงจะเหมาะสมที่สุด

วิธีทำ:

โดยวิธีการหาผลเฉลย ด้วยหลักต่ำสุดสูงสุด (minimax principle):

จากตาราง 3.10 สามารถสร้างตารางแสดงแถวตั้งค่าต่ำสุดแถวนอน (row-minimum column) และแถวนอนค่าสูงสุดแถวตั้ง (column-maximum row) เพื่อพิจารณาหาผลเฉลยได้ดัง ตาราง 3.11 ต่อไปนี้:

ตาราง 3.11: ตารางผลเฉลย

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	B_3	ค่าต่ำสุดแถวนอน	
A_1	3	2	-2	-2 *	สูงสุด
A_2	1	-3	-4	-4	
A_3	0	1	-3	-3	
ค่าสูงสุดแถวตั้ง	3	2	-2 *		
			ต่ำสุด		

จาก ตาราง 3.11 เมื่อได้หาผลเฉลยโดยหลักต่ำสุดสูงสุด จะพบว่าค่าผลเฉลย คือ:

A_1, B_3 และ $v = -2$:ซึ่งเป็นกรณีที่ A เป็นฝ่ายเสียประโยชน์

ดังนั้น จากตัวอย่าง 3.4 ซึ่งเป็นกรณีที่ฝ่าย A ได้ประโยชน์ และตัวอย่าง 3.5 อันเป็นกรณีที่ A เสียประโยชน์ ต่างก็ใช้วิธีการหาผลเฉลยด้วยหลักต่ำสุดสูงสุดได้โดยสมเหตุสมผลและได้ผลเฉลยที่ถูกต้องเช่นเดียวกัน ฉะนั้น จึงเป็นที่มั่นใจได้ว่า วิธีการหาผลเฉลยโดยหลักต่ำสุดสูงสุด (minimax principle) นี้ สามารถใช้ได้ทั้งกรณีที่ A เป็นฝ่ายได้ประโยชน์หรือเป็นฝ่ายเสียประโยชน์ก็ได้ อย่างไรก็ตาม มีข้อน่าสังเกตอยู่ว่า ไม่ว่าฝ่ายใดจะได้ประโยชน์หรือเสียประโยชน์ก็ตาม ถ้าหากจะใช้วิธีหาผลเฉลยโดยหลักต่ำสุดสูงสุดแล้วละก็ ตารางผลตอบแทน (payoff matrix) ที่จะแสดงนั้น จะต้องแสดงในลักษณะที่ กลยุทธ์ของฝ่ายที่แสดงผลตอบแทนจะต้องอยู่ทางด้านแถวนอน (row) เท่านั้น เช่น ตารางผลตอบแทนที่แสดง แสดงผลตอบแทนของ A (A's payoff) เช่นนี้แล้ว กลยุทธ์ของ A จะต้องอยู่ทางด้านแถวนอนเท่านั้น เมื่อได้สร้างตารางผลตอบแทนในลักษณะดังกล่าวนี้แล้ว ก็เป็นอันเชื่อมั่นได้ว่า วิธีการหาผลเฉลยโดย

หลักต่ำสุดสูงสุด (minimax principle) จะให้ผลเฉลยที่สมเหตุสมผลและถูกต้องเสมอ

2.2.2 การแข่งขันแบบกลยุทธ์ผสม

ในบางกรณีการแข่งขันจะไม่มีดุลศูนย์ถ่วง ซึ่งก็จะเป็นกรณีที่คู่แข่งขันมิได้ใช้กลยุทธ์แท้ หรือไม่ได้ใช้กลยุทธ์อย่างใดอย่างหนึ่งโดยเฉพาะ หากแต่ว่าแต่ละฝ่ายจะใช้กลยุทธ์ที่ตนมีอยู่คละกันหรือผสมกันไป การแข่งขันในลักษณะนี้เรียกกันว่ากลยุทธ์ผสม (Mixed Strategies) ลักษณะการแข่งขันเช่นนี้อาจเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.6: ตัวอย่างการแข่งขันแบบกลยุทธ์ผสม (mixed strategies)

ตาราง 3.12: ตารางผลตอบแทนของ A (A's payoff matrix)

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	B_3	ค่าต่ำสุดแถวนอน	
A_1	5	1	6	1	
A_2	3	2	7	2 *	สูงสุด
A_3	4	3	0	0	
ค่าสูงสุดแถวตั้ง	5	3 *	7		
		ต่ำสุด			

จาก ตัวอย่าง 3.6 ซึ่งแสดงโดย ตาราง 3.12 เมื่อหาผลเฉลยโดยหลักต่ำสุดสูงสุด (minimax principle) จะพบว่า ค่าต่ำสุดของค่าสูงสุดแถวตั้ง (minimum of column maximal มีค่าเท่ากับ 3* แต่ค่าสูงสุดของค่าต่ำสุดแถวนอน (maximum of raw minima)

มีค่าเท่ากับ 2* เท่านั้น ซึ่งจะเห็นได้ว่า ค่าทั้งสองนี้ไม่เท่ากันและไม่ใช่สมาชิกตัวเดียวกัน ดังนั้น ในกรณีนี้จึงไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง และนั่นคือ ในการแข่งขันนี้คู่แข่งขันจะไม่ใช้กลยุทธ์อย่างใดอย่างหนึ่งโดยเฉพาะ แต่จะใช้กลยุทธ์ที่มีอยู่คละกันหรือผสมกันไป ฉะนั้น ปัญหาในที่นี้จึงเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการหาอัตราการผสมกลยุทธ์ที่เหมาะสมที่สุดของแต่ละฝ่ายเป็นสำคัญ และนั่นย่อมหมายความว่า วิธีการหาผลเฉลยโดยหลักต่ำสุดสูงสุดจะกระทำต่อไปมิได้ จำเป็นที่จะต้องมีวิธีการอื่นมาช่วยหาผลเฉลยต่อไป อย่างไรก็ตาม แม้ว่าหลักต่ำสุดสูงสุดจะไม่สามารถใช้หาอัตราการผสมกลยุทธ์ที่เหมาะสมดังต้องการได้ แต่จากหลักต่ำสุดสูงสุดก็ทำให้ทราบว่า ค่าของเกม (value of the game) จะต้องอยู่ระหว่าง 2 กับ 3 หรือ $2 < v < 3$ อย่างแน่นอน

โดยปกติแล้ว อัตราการผสมกลยุทธ์ของคู่แข่งขันนิยมที่จะแสดงในรูปของ ความน่าจะเป็น (probability) เป็นส่วนมาก ทั้งนี้เพราะความน่าจะเป็นแสดงโอกาสของการเกิดเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งจากฐาน "1" เท่านั้น เช่น อาจสมมุติให้ x_1, x_2 และ x_3 แทนความน่าจะเป็นที่ฝ่าย A จะใช้กลยุทธ์ A_1, A_2 และ A_3 ตามลำดับ ทำนองเดียวกัน อาจสมมุติให้ y_1, y_2 และ y_3 แทนความน่าจะเป็นที่ฝ่าย B จะใช้กลยุทธ์ B_1, B_2 และ B_3 ตามลำดับเช่นกัน และด้วยเหตุที่ความน่าจะเป็นจะต้องมีค่าเป็นบวก (+) หรือศูนย์ (0) เท่านั้น ทั้งผลรวมของความน่าจะเป็นของการใช้กลยุทธ์แต่ละฝ่ายจะต้องเท่ากับ 1 ด้วย นั่นคือ

$$x_i \geq 0 \; ; \; y_j \geq 0 \qquad (i,j = 1, 2, 3)$$

และ

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \; ; \qquad \sum_{j=1}^{3} y_j = 1$$

ดังได้ทราบแล้วว่า การหาผลเฉลยปัญหาการแข่งขันที่เป็นแบบกลยุทธ์ผสมนี้ ไม่สามารถนำวิธีการของหลักต่ำสุดสูงสุดมาใช้ได้ จึงจำเป็นที่จะต้องใช้วิธีการหาผลเฉลยด้วยวิธีการอื่นที่เหมาะสมต่อไป ซึ่งวิธีการที่สามารถใช้หาผลเฉลยปัญหากลยุทธ์ผสมนี้ สามารถดำเนินการได้หลายวิธีด้วยกัน กล่าวคือ อาจหาผลเฉลยได้โดยวิธีต่อไปนี้ คือ:

1. **การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ** (graphic solution method)
2. **การหาผลเฉลยโดยวิธีเลขคณิต** (solution by the method of arithmetic)
3. **การหาผลเฉลยโดยวิธีพีชคณิตเมทริกซ์** (solution by the method of matrix algebra)
4. **การหาผลเฉลยโดยวิธีแก้สมการระบบเชิงเส้น** (solution by the method of simultaneous linear equations)
5. **การหาผลเฉลยโดยวิธีกำหนดการเชิงเส้น** (solution by the method of linear programming)

ในลำดับนี้ จะขอกล่าวถึงวิธีการหาผลเฉลยปัญหาการแข่งขัน กรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์แบบกลยุทธ์ผสม ในแต่ละวิธีการเป็นลำดับกันไป ดังนี้:

1) การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ:

การหาผลเฉลยปัญหาการแข่งขันแบบกลยุทธ์ผสมโดยวิธีกราฟ (graphic solution method) นั้น จะกระทำได้โดยการนำข้อมูลจากตารางผลตอบแทนมาเขียนเป็นสมการเส้นตรงโดยมีความน่าจะเป็นในการใช้กลยุทธ์ของคู่แข่งขันเป็นตัวแปร จากนี้ก็นำสมการเส้นตรงที่สร้างขึ้นนั้นลงเขียนในกราฟ ซึ่งกราฟแต่ละรูปจะให้ผลเฉลย อันเป็นความน่าจะเป็นในการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ที่เหมาะสมที่สุด ของคู่แข่งขันฝ่ายใดฝ่ายหนึ่ง ดังนั้น เมื่อมีคู่แข่งขันสองฝ่าย การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟก็จะต้องใช้กราฟสองรูป โดยแต่ละรูปจะเป็นผลเฉลยของแต่ละฝ่ายนั่นเอง

อย่างไรก็ตาม ด้วยเหตุที่การสร้างกราฟจะกระทำได้สำหรับสมการที่มีตัวแปรสูงสุดเพียง 3 ตัวแปร นั่นคือ กราฟสร้างได้สูงสุดเพียง 3 แกน หรือ 3 มิติเท่านั้น และสำหรับปัญหาการแข่งขันนั้น จำนวนกลยุทธ์ของผู้แข่งขันและค่าของเกมก็คือจำนวนตัวแปรนั่นเอง ดังนั้น เมื่อผู้แข่งขันมีกลยุทธ์อยู่ 2 กลยุทธ์แล้วจำนวนตัวแปรทั้งหมดก็จะมี 3 ตัวแปรแล้ว (2 ตัวแปรกลยุทธ์ + 1 ตัวแปรค่าของเกม) ฉะนั้น การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟจะใช้ได้สำหรับคู่แข่งขันที่มีกลยุทธ์อยู่เพียง 2 กลยุทธ์เท่านั้น ถ้าผู้แข่งขันรายใดมีกลยุทธ์มากกว่า 2 กลยุทธ์ การหาผลเฉลย

สำหรับผู้แข่งขันรายนั้นก็จะกระทำมิได้ อนึ่งในทางปฏิบัติแม้ว่าผู้แข่งขันจะมีกลยุทธ์อยู่แล้ว 2 กลยุทธ์ เมื่อรวมกับตัวแปรอันเป็นค่าของเกมจะมีตัวแปรรวมกันทั้งสิ้น 3 ตัวแปรก็ตาม แต่ด้วยเหตุที่ตัวแปรอันเกิดจากกลยุทธ์ ซึ่งก็คืออัตราการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ นั้น มีค่าอยู่ในรูปความน่าจะเป็น (probability) ซึ่งผลรวมของความน่าจะเป็นจะต้องมีค่าเท่ากับ 1 พอดี ดังนั้น ตัวแปรอันเป็นค่าความน่าจะเป็นอาจเขียนบนแกนเดียวกันโดยมีค่าผลรวมเท่ากับ 1 พอดี แต่กลับทิศทางกันก็ได้ นั่นคือ แม้ว่าโดยความจริงแล้วมี 3 ตัวแปร แต่ก็สามารถแสดงโดยกราฟ 2 แกนได้ ฉะนั้นการหาผลเฉลยโดยกราฟที่กล่าวถึงนี้ แท้ที่จริงก็แสดงบนกราฟ 2 แกน หรือ 2 มิติเท่านั้น

ในลำดับนี้ เพื่อให้สามารถเข้าใจวิธีการหาผลเฉลยโดยกราฟได้อย่างเด่นชัด จึงขอยกตัวอย่างปัญหาการแข่งขันที่เป็นแบบกลยุทธ์ผสม ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 3.7: ตัวอย่างการหาผลเฉลยกลยุทธ์ผสมโดยวิธีกราฟ

ตาราง 3.13: ตารางผลตอบแทนของ A (A's payoff matrix)

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2
A_1	7	3
A_2	2	4

จากตาราง 3.13 อันเป็นตารางแสดงผลตอบแทนของ A ถ้านำปัญหาในตารางนี้ไปหาผลเฉลยโดยหลักต่ำสุดสูงสุด (minimax principle) ก็จะสามารถสร้างแถวนอนค่าสูงสุดแถวตั้ง (column-maximum row) และแถวตั้งค่าต่ำสุดแถวนอน (row-minimum column) เพื่อพิจารณาผลเฉลยต่อไปได้ ดังนี้:

ตาราง 3.14 :ตารางพิจารณาผลเฉลยโดยหลักต่ำสุดสูงสุด

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	ค่าต่ำสุดแถวนอน	
A_1	7	3	3 *	สูงสุด
A_2	2	4	2	
ค่าสูงสุดแถวตั้ง	7	4 *		
		ต่ำสุด		

จากตาราง 3.14 จะเห็นว่า ค่าต่ำสุดของค่าสูงสุดแถวตั้ง (minimum of column maxima: minimax) คือ 4 แต่ค่าสูงสุดของค่าต่ำสุดแถวนอน (maximum of row minima : maximin) คือ 3 ดังที่ได้แสดงที่สังเกตโดยกำกับด้วยดอกจันทร์แล้วนั้นมีค่าไม่เท่ากันและไม่ใช่สมาชิกตัวเดียวกัน ดังนั้น ผลเฉลยในปัญหานี้จึงไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง (saddle point) แต่อย่างไรก็ตาม ถ้าคู่แข่งขันทั้งสองฝ่ายเลือกใช้กลยุทธ์คละกันหรือผสมกันในอัตราที่เหมาะสมแล้ว ดุลยภาพ (equilibrium) ก็จะเกิดขึ้นได้เช่นกัน แม้ว่าดุลยภาพนั้นจะไม่ใช่ดุลยภาพที่มีจุดดุลศูนย์ถ่วงก็ตาม ซึ่งดุลยภาพดังกล่าวก็จะมีค่าระหว่าง 3 กับ 4 นั่นเอง $(3 < v < 4)$

ในขั้นนี้ ถ้าให้ x_1 และ x_2 แทนความน่าจะเป็นที่ฝ่าย A จะใช้กลยุทธ์ A_1 และ A_2 ตามลำดับ โดยที่ $x_2 = 1-x_1$ (ผลรวมของความน่าจะเป็นมีค่าเท่ากับ 1) ดังนี้แล้ว ผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้ (expected gain of A) อันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ของ B ก็จะคือ:

กลยุทธ์ที่ B ใช้	ผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้
B_1	$v_1 = 7X' + 2x_2 = 7x_1 + 2(1-x_1) = 5x_1\ t2$
B_2	$v_a = 3X'\ t\ 4x_2 = 3x_1 + 4(1-x_1) = -x_1\ t4$

ข้อพิจารณา:

ด้วยความสมเหตุสมผลแล้ว อัตราการใช้กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ A จะต้องหมายถึง ความน่าจะเป็นที่ A จะใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ (x_1, x_2) แล้วมีผลทำให้ค่าของเกมอันเป็นผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้ (v_1, v_2) จะต้องมีค่าเท่ากัน ทั้งนี้ไม่ว่า B ซึ่งเป็นคู่แข่งขันจะใช้กลยุทธ์ใด ๆ เข้าชิงชัยด้วย นั่นคือ ไม่ว่า B จะใช้ B_1 หรือ B_2 ผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้จะต้องเท่า iiu หรือ $v_1 = v_2$ นั่นเอง

นั่นคือ: $5x_1 + 2 = -x_1 + 4$

ดังนั้น $x_1 = 1/3$ //

และ $x_a = l - x_1$

$= 1 - (1/3)$

$= 2/3$ //

แล้ว $v_1 = 7x_1 + 2x_2$

$= 7(1/3)\ t\ 2(2/3)$

$= 11/3$

$= 3.6+$; $3.6+ = 3.6'$

หรือ $v_a = 3x_1 + 4x_2$

$= 3(1/3)\ t\ 4(2/3)$

$= 11/3$

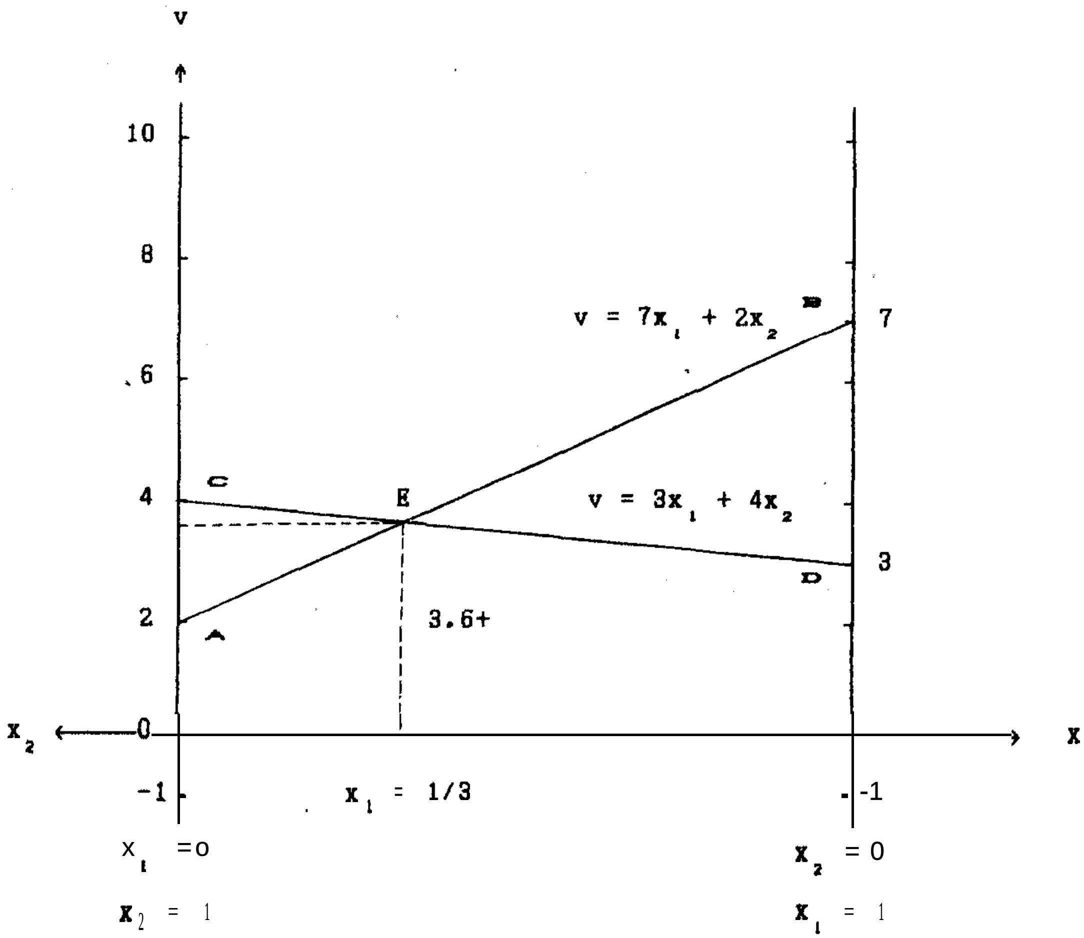
$= 3.6+$

ซึ่งจะเห็นว่า $v_1 = v_2 = 3.6+ = v$

ดังนั้น โดยสรุปแล้ว A จะอยู่ในสถานะที่ดีที่สุด ถ้าใช้กลยุทธ์ A_1 ด้วยความน่าจะเป็น (x_1) เท่ากับ 1/3 ใช้กลยุทธ์ A_2 ด้วยความน่าจะเป็น (x_2) เท่ากับ 2/3 แล้ว A ก็จะได้ผลตอบแทนเท่ากับ 3.6+ ซึ่งก็จะสังเกตเห็นได้ว่าผลตอบแทนนี้มีค่าอยู่ระหว่าง 3 กับ 4 ซึ่งสอดคล้องกับการพิจารณาโดยหลักต่ำสุดสูงสุดข้างต้นนั่นเอง

จากข้อพิจารณาข้างต้นนี้ ถ้านำข้อมูลต่าง ๆ แสดงลงโดยกราฟจะได้กราฟดังรูปต่อไปนี้

รูป 3.1



จาก รูป 3.1 ได้แสดง x_1 บนแกนนอน (horizontal axis) ของกราฟ และโดยเหตุที่ความน่าจะเป็นมีค่าไม่เกิน 1 จึงตัดแกน x_1 ณ ตำแหน่งที่ $x_1 = 1$ พอดี ทั้งนี้ x_2 ก็แสดงบนแกนนอนของกราฟเช่นกัน แต่ทิศทางตรงกันข้ามกับ x_1 ทั้งนี้เพราะว่า $x_1 + x_2 = 1$ นั่นเอง สำหรับผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้ (v) ได้แสดงไว้แล้วบนแกนตั้ง (vertical axis)

จากสมการแสดงผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้:

$$v_1 = 7x_1 + 2x_2 \qquad \cdots (1)$$

และ

$$v_2 = 3x_1 + 4x_2 \qquad \cdots (2)$$

เมื่อนำสมการทั้งสองนี้เขียนลงในรูป 3.1 จะได้เส้นตรง AB และ CD ตามลำดับ ทั้งนี้ โดยที่ AB คือเส้นตรงของสมการ $v_1 = 7x_1 + 2x_2$ ซึ่งอาจเขียนขึ้นได้ง่าย ๆ โดยพิจารณาว่า ณ ที่ $x_1 = 0$ และ $x_2 = 1$ จะได้ $v_1 = 2$ ทำนองเดียวกัน ณ ที่ $x_1 = 1$ และ $x_2 = 0$ จะได้ $v_1 = 7$ เมื่อโยงตำแหน่งทั้งสองเข้าด้วยกัน จะได้เส้นตรง AB ดังรูป ทำนองเดียวกัน เส้น CD ก็เขียนมาจากสมการ $v_2 = 3x_1 + 4x_2$ ในลักษณะเดียวกันเช่นกัน

จากเส้นตรง AB และ CD ซึ่งแสดงผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้ (v_1 และ v_2) อันเกิดจากการที่ B ใช้กลยุทธ์ B_1 และ B_2 ตามลำดับนั้น จะเห็นว่าตำแหน่งที่ A จะได้ผลตอบแทนเท่ากันไม่ว่า B จะใช้กลยุทธ์ B_1 หรือ B_2 ก็คือจุด E ซึ่งคือจุดตัดของเส้นทั้งสองนั่นเอง ดังนั้น ณ จุด E จึงเป็นจุดเหมาะสมที่สุดของอัตราการใช้กลยุทธ์ A_1 และ A_2 ของ A นั่นเอง โดย ณ ที่จุด E นี้จะวัดค่า x_1 ได้เป็น $x_1 = 1/3$ ได้ $x_2 = 2/3$ [$x_2 = 1-(1/3)$] และจะได้ค่า $v = 11/3 = 3.6+$

ฉะนั้น ถ้าผู้แข่งขัน ฝ่าย A ใช้กลยุทธ์ A_1 จำนวน "หนึ่งในสาม" และใช้กลยุทธ์ A_2 จำนวน "สองในสาม" ของจำนวนเกมการแข่งขันทั้งหมด ทั้งนี้ไม่ว่าจะใช้กลยุทธ์ดังกล่าวเมื่อใดหรือจะโดยเปิดเผยหรือไม่ก็ตาม ฝ่าย A จะเป็นฝ่ายได้รับประโยชน์โดยเฉลี่ยเกมละ 3.6+

สำหรับการหาอัตราการใช้กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของฝ่าย B ก็สามารถดำเนินการโดยวิธีกราฟเช่นเดียวกันกับของฝ่าย A ข้างต้นเช่นกัน กล่าวคือ อาจสมมุติให้ y_1 และ y_2 แทน ความน่าจะเป็นที่ฝ่าย B จะใช้กลยุทธ์ B_1 และ B_2 ตามลำดับ โดยที่ $y_2 = 1-y_1$ ดังนั้น ผลตอบแทนที่ B คาดว่าจะเสีย อันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ของ A ก็จะคือ

กลยุทธ์ที่ A ใช้	ผลตอบแทนที่ B คาดว่าจะเสีย
A_1	$v_1 = 7y_1 + 3y_2 = 7y_1 + 3(1-y_1) = 4y_1 + 3$
A_2	$v_2 = 2y_1 + 4y_2 = 2y_1 + 4(1-y_1) = -2y_1 + 4$

เมื่อ $v_1 = v_2$ จะได้ $y_1 = 1/6$ และ $y_2 = 5/6$ โดยที่ $v = 11/3 = 3.6+$ ดังนั้น ฝ่าย B ก็จะเสียโดยเฉลี่ยเกมละ 3.6+ ซึ่งก็เท่ากับผลตอบแทนเฉลี่ยที่ฝ่าย A จะได้นั่นเอง และที่สุดถ้าแสดงโดยกราฟก็จะได้รูปกราฟทำนองเดียวกันกับกราฟ A นั่นเอง

อนึ่ง โดยเหตุที่การหาผลเฉลยการแข่งขันแบบกลยุทธ์ผสมโดยวิธีกราฟนี้ ไม่เหมาะสมที่จะใช้กับการแข่งขันกรณีที่คู่แข่งขันมีกลยุทธ์เกินกว่า 2 กลยุทธ์ ทั้งยังต้องการมาตรฐานการวัดที่เที่ยงตรงด้วย ดังนั้น วิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ จึงมักใช้แสดงประกอบผลเฉลยซึ่งได้มาจากวิธีการอื่นเป็นส่วนใหญ่เท่านั้น

2) การหาผลเฉลยโดยวิธีเลขคณิต

การหาผลเฉลยโดยวิธีเลขคณิต (solution by the method of arithmetic) เป็นวิธีการง่าย ๆ ที่อาศัยหลักของความเสี่ยงเป็นสำคัญ กล่าวคือ กลยุทธ์ใดมีความเสี่ยงมากก็ควรใช้กลยุทธ์นั้นแต่น้อย ในทางตรงกันข้าม ถ้ากลยุทธ์ใดมีความเสี่ยงน้อยก็ควรใช้กลยุทธ์นั้นมาก ๆ การกระทำเช่นนี้ก็เพื่อที่จะหลีกเลี่ยงความเสี่ยงมาก ๆ นั้นไปนั่นเอง สำหรับค่าความเสี่ยงในแต่ละกลยุทธ์นั้น พิจารณาได้จากผลต่างของค่าตอบแทนอันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ

ของคู่แข่งขัน เช่น ความเสี่ยงของการใช้กลยุทธ์ A_1 ของ A หาได้จากผลต่างของค่าตอบแทนอันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ B_1 และ B_2 ของ B นั่นเอง

อย่างไรก็ตาม แม้ว่าวิธีเลขคณิตจะเป็นวิธีที่ง่าย สะดวก และสามารถหาผลเฉลยได้รวดเร็ว แต่ก็สามารถใช้กับการแข่งขันที่คู่แข่งขันต่างมีกลยุทธ์อยู่เพียง 2 กลยุทธ์เท่า ๆ กันเท่านั้น นั่นคือจะต้องเป็นกรณีที่ตารางผลตอบแทนมีขนาด 2 x 2 นั่นเอง

ในที่นี้ เพื่อให้เกิดความเข้าใจวิธีเลขคณิตอย่างชัดเจน จึงขอแสดงตัวอย่างปัญหาการแข่งขัน ซึ่งคู่แข่งขันต่างมีกลยุทธ์เพื่อการชิงชัยกันอยู่ฝ่ายละ 2 กลยุทธ์เท่า ๆ กัน และเพื่อให้สามารถเปรียบเทียบกับการหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ จึงขอนำตัวอย่าง ซึ่งเคยแสดงการหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟแล้วมาแสดงโดยวิธีเลขคณิตอีกครั้งหนึ่ง ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 3.8: ตัวอย่างการหาผลเฉลยกลยุทธ์ผสมโดยวิธีเลขคณิต

ตาราง 3.15: ตารางผลตอบแทนของ A (A's payoff matrix)

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2
A	7	3
A_2	2	4

จากตาราง 3.15 อันเป็นตารางแสดงผลตอบแทนของ A ถ้านำปัญหาในตารางนี้ ไปหาผลเฉลยโดยวิธีเลขคณิต อาจหาค่าความเสี่ยงของแต่ละกลยุทธ์ของคู่แข่งขันแต่ละฝ่าย เพื่อพิจารณาหาผลเฉลยต่อไปได้ดังนี้:

ตาราง 3.16: ตารางพิจารณาผลเฉลยโดยวิธีเลขคณิต

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	ความเสี่ยง	ความน่าจะเป็น
A_1	7	3	4	2/6
A_2	2	4	2	4/6
ความเสี่ยง	5	1	6	
ความน่าจะเป็น	1/6	5/6		

จากตาราง 3.16 ซึ่งได้แสดงค่าความเสี่ยงของแต่ละกลยุทธ์ของคู่แข่งขันทั้งสองฝ่ายไว้แล้ว ซึ่งค่าความเสี่ยงของแต่ละกลยุทธ์ จะหาได้จากผลต่างของค่าตอบแทนอันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ของคู่แข่งขันฝ่ายตรงกันข้ามนั่นเอง เช่น ความเสี่ยงของการใช้กลยุทธ์ A_1 จะหาได้จากผลต่างของค่าตอบแทนอันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ B_1 และ B_2 ซึ่งก็คือ $7 - 3 = 4$ ทำนองเดียวกัน ความเสี่ยงของการใช้กลยุทธ์ A_2 ก็คือ $4 - 2 = 2$ ความเสี่ยงของการใช้กลยุทธ์ B_1 คือ $7 - 2 = 5$ และความเสี่ยงของการใช้กลยุทธ์ B_2 ก็จะคือ $4 - 3 = 1$ นั่นเอง

เมื่อได้ความเสี่ยงของกลยุทธ์ทั้งหมดแล้ว ก็นำค่าความเสี่ยงของแต่ละกลยุทธ์ ของแต่ละฝ่ายรวมกัน นั่นคือ ความเสี่ยงรวมของฝ่าย A จะเท่ากับ $4 + 2 = 6$ ทำนองเดียวกันความเสี่ยงรวมของฝ่าย B ก็จะเท่ากับ $5 + 1 = 6$ เช่นกัน จากนี้ก็พิจารณาความน่าจะเป็นที่จะใช้กลยุทธ์แต่ละกลยุทธ์ของแต่ละฝ่ายต่อไป ซึ่งความน่าจะเป็นในการใช้กลยุทธ์แต่ละกลยุทธ์ จะได้จากแนวคิดที่ว่า กลยุทธ์ใดที่มีความเสี่ยงมากให้ใช้น้อย กลยุทธ์ใดที่มีความเสี่ยงน้อยให้ใช้

มาก ทั้งนี้เพื่อหลีกเลี่ยงความเสี่ยงมาก ๆ ดังที่ได้กล่าวแล้วนั่นเอง ในการหาความน่าจะเป็นนี้กระทำได้โดยสลับค่าความเสี่ยงของกลยุทธ์ของแต่ละฝ่ายที่มีอยู่ แล้วหารด้วยความเสี่ยงรวม อัตราความเสี่ยงสลับของแต่ละกลยุทธ์ต่อความเสี่ยงรวมนี้คือ ความน่าจะเป็นที่ควรจะใช้สำหรับกลยุทธ์นั้น ๆ นั่นเอง นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ A ควรใช้กลยุทธ์ A_1 คือ $x_1 = 2/6 = 1/3$ ความน่าจะเป็นที่ A ควรใช้กลยุทธ์ A_2 คือ $x_2 = 4/6 = 2/3$ ในทำนองเดียวกัน ความน่าจะเป็นที่ B ควรใช้กลยุทธ์ B_1 และ B_2 ก็คือ $y_1 = 1/6$ และ $y_2 = 5/6$ นั่นเอง ซึ่งความน่าจะเป็นที่พิจารณาดังกล่าวนี้ ได้แสดงไว้พร้อมแล้วในตาราง 3.16 ดังกล่าวข้างต้นเช่นกันแล้ว

อนึ่ง การพิจารณาหาความน่าจะเป็นในการใช้กลยุทธ์ของคู่แข่งขันแต่ละฝ่ายอาจจะแสดงในรูปตารางย่อได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{array}{c c c | c l}
 & \multicolumn{2}{c}{B} & & \\
A & 7 & 3 & 4 & 2/6 = 1/3 : x_1 \\
 & 2 & 4 & 2 & 4/6 = 2/3 : x_2 \\
 & 5 & 1 & 6 & \\
 & 1/6 & 5/6 & & \\
 & y_1 & y_2 & &
\end{array}
$$

โดยมีผลเฉลยโดยย่อเป็น

$$A = (x_1, x_2) = (1/3, 2/3)$$

$$B = (y_1, y_2) = (1/6, 5/6)$$

$$v = 11/3 \quad = 3.6+$$

สำหรับค่าของเกม ซึ่งก็คือ ผลตอบแทนอันเกิดจากการแข่งขัน จะพิจารณาหาได้โดยนัย

เดียวกันกับการหาค่าของเกม ของการหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟนั่นเอง กล่าวคือ ค่าของเกมจะหาได้จาก สมการผลตอบแทนที่คู่แข่งขันคาดว่าจะได้หรือคาดว่าจะเสียแล้วแต่กรณีนั่นเอง เช่น ค่าของเกมอาจหาจากสมการผลตอบแทนที่ A คาดว่าจะได้เมื่อ B ใช้กลยุทธ์ B_1 ซึ่งสมการผลตอบแทนนี้คือ:

$$v = 7x_1 + 2x_2$$

ดังนั้น เมื่อ $x_1 = 1/3$ และ $x_2 = 2/3$ จะได้ค่าของเกมเป็น:

$$\begin{aligned} v &= 7(1/3) + 2(2/3) \\ &= 11/3 \\ &= 3.6+ \end{aligned}$$

ดังได้กล่าวแล้วว่า ค่าของเกมจะหาได้จากสมการผลตอบแทน ดังนั้น ค่าของเกมอาจหาได้จากสมการผลตอบแทนของฝ่าย A หรือฝ่าย B ก็ได้ และจะหาจากสมการผลตอบแทนอันเกิดจากกลยุทธ์ใดของฝ่ายตรงกันข้ามก็ได้เช่นกัน ซึ่งค่าของเกมที่ได้จากสมการผลตอบแทนดังกล่าวจะมีค่าเท่ากันหมด อันอาจจะแสดงให้เห็นได้ดังต่อไปนี้ คือ:

พิจารณาจากฝ่าย A:

กลยุทธ์ที่ B ใช้	A คาดว่าจะได้
B_1	$v = 7x_1 + 2x_2 = 7(1/3) + 2(2/3) = 11/3$
B_2	$v = 3x_1 + 4x_2 = 3(1/3) + 4(2/3) = 11/3$