บทที่ 3
ทฤษฎีการแข่งขัน
(The Theory of Games)

บทที่ 3
ทฤษฎีการแข่งขัน
(The Theory of Games)

เค้าโครงเรื่อง :

1. ความทั่วไป
   1.1 ความหมาย
   1.2 วิวัฒนาการ
   1.3 ประเภทของการแข่งขัน

2. กรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์
   2.1 ลักษณะ
   2.2 การหาผลเฉลย
      2.2.1 การแข่งขันที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วง
      2.2.2 การแข่งขันแบบกลยุทธ์ผสม
         1) การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ
         2) การหาผลเฉลยโดยวิธีเลขคณิต
         3) การหาผลเฉลยโดยวิธีพีชคณิตเมทริกซ์
         4) การหาผลเฉลยโดยวิธีการแก้สมการระบบเชิงเส้น
         5) การหาผลเฉลยโดยวิธีกำหนดการเชิงเส้น

2.3 การลดขนาดตารางการแข่งขัน

2.3.1 การครอบครอง

2.3.2 การแยกเกมย่อย

3. กรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิไม่เป็นศูนย์

3.1 ลักษณะ

3.2 การหาผลเฉลย

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อศึกษาเรื่องทฤษฎีการแข่งขันนี้จบแล้ว นักศึกษาสามารถ :

1. อธิบายความหมายและทราบถึงวิวัฒนาการ ตลอดจนสามารถแบ่งประเภทของการแข่งขันในหลักสากลได้
2. สามารถหาผลเฉลยของปัญหาการแข่งขันกรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์ในรูปแบบกลยุทธ์แท้ได้
3. สามารถหาผลเฉลยของปัญหาการแข่งขันกรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์ในรูปแบบกลยุทธ์ผสมด้วยวิธีการของกราฟ วิธีเลขคณิต วิธีพีชคณิต วิธีแก้สมการ และโดยวิธีการของกำหนดการเชิงเส้นได้โดยเหมาะสม
4. สามารถลดขนาดของตารางการแข่งขันด้วยวิธีการที่เหมาะสมได้
5. สามารถหาผลเฉลยปัญหาการแข่งขัน กรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิไม่เป็นศูนย์ได้
6. ประยุกต์ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีการแข่งขันนี้ เข้ากับเหตุการณ์ และปัญหาปัจจุบันได้อย่างถูกต้อง

บทที่ 3
ทฤษฎีการแข่งขัน
(The Theory of Games)

1. ความทั่วไป

1.1 ความหมาย:

ในทางเศรษฐศาสตร์คำว่า "การแข่งขัน" (games) หมายถึง สภาพการณ์ทั่วไป ของการขัดแย้งและการชิงชัย (conflict and competition) ของกลุ่มบุคคลซึ่งเป็นผู้ร่วมแข่งขัน (participants) ที่มีผลประโยชน์ขัดแย้งกันในเวลาใดเวลาหนึ่ง ทั้งนี้ผู้ร่วมแข่งขันแต่ละฝ่ายย่อมต้องการที่จะให้ฝ่ายตนอยู่ในสถานะที่ดีที่สุด กล่าวคือ ฝ่ายที่ได้ประโยชน์ก็ต้องการให้ได้ประโยชน์สูงสุด ส่วนฝ่ายที่เสียประโยชน์ก็จะต้องพยายามดำเนินการให้เสียประโยชน์น้อยที่สุด ดังนั้น ทฤษฎีของการแข่งขันจึงเป็นเรื่องราวอันเกี่ยวกับการวิเคราะห์พฤติกรรมของบุคคลหรือกลุ่มบุคคลที่มีผลประโยชน์ขัดแย้งกันนั่นเอง ซึ่งการวิเคราะห์นี้ กระทำไปเพื่อหาข้อสรุปอันเป็นกลยุทธ์ (strategies) ที่ดีที่สุดของผู้ร่วมแข่งขันทุกฝ่าย เพื่อให้แต่ละฝ่ายอยู่ในสถานะที่ดีที่สุด

โดยปกติแล้ว การวิเคราะห์พฤติกรรมของผู้ร่วมแข่งขันในเรื่องของทฤษฎีการแข่งขันนี้จะกระทำในลักษณะของกระบวนการการตัดสินใจ (decision-making process) ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ (mathematical aspects) ทำนองเดียวกันกับเรื่อง กำหนดการเชิงเส้น (linear programming) ซึ่งเป็นกระบวนการตัดสินใจ ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์เป็นสำคัญเช่นกัน นอกจากนี้เรื่องดังกล่าวทั้งสองยังเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันด้วย กล่าวคือ กำหนดการเชิงเส้นเป็นเรื่องเกี่ยวกับการตัดสินใจ ในการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด เพื่อตอบสนองต่อเป้าหมายที่กำหนด ซึ่งก็เป็นลักษณะของการแข่งขันในแง่ของการเลือกใช้ปัจจัย ในรูป

[1] พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน (2532) เรียก "ทฤษฎีการเสี่ยง"

แบบใดแบบหนึ่งเพื่อสนองเป้าหมายจากรูปแบบต่าง ๆ ที่มีอยู่ ดังนั้น เมื่อเกิดการเลือกตัดสินใจในลักษณะใดแล้ว รูปแบบการเลือกใช้ปัจจัยในลักษณะอื่นก็เป็นอันตกไป อย่างไรก็ตาม รูปแบบการตัดสินใจโดยวิธีการของกำหนดการเชิงเส้นนี้ มิได้คำนึงถึงผู้ร่วมแข่งขันที่มีผลประโยชน์ขัดแย้งกันแต่อย่างใด นั่นคือ วิธีการของกำหนดการเชิงเส้นเป็นลักษณะของการตัดสินใจเลือกใช้พฤติกรรมในการดำเนินกิจกรรมจากทางเลือกต่าง ๆ ที่ตนเองมีอยู่โดยมิได้เกี่ยวข้องหรือคำนึงถึงพฤติกรรมของผู้ร่วมแข่งขันอื่น ๆ สำหรับเรื่องราวที่เกี่ยวกับ ทฤษฎีการแข่งขัน (theory of games) ผู้ตัดสินใจจะต้องคำนึงถึงพฤติกรรมของผู้ร่วมแข่งขันประกอบด้วย กล่าวคือ จะเลือกดำเนินกลยุทธ์เพื่อให้ฝ่ายตนอยู่ในสถานะที่ดีที่สุด โดยคำนึงและถือว่าปฏิกิริยาโต้ตอบของผู้ร่วมแข่งขันอื่น ๆ เป็นเงื่อนไขของการเลือกใช้กลยุทธ์ของฝ่ายตนด้วย

1.2 วิวัฒนาการ:

ทฤษฎีการแข่งขันได้รับการอธิบายอย่างมีหลักมีเกณฑ์ในเบื้องต้นเมื่อปี ค.ศ. 1921 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ Emile Borel ต่อมาในปี ค.ศ. 1928 John von Neumann ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ก็ได้ศึกษาค้นคว้าให้กว้างขวางก้าวไกลออกไป และต่อมาในระหว่างช่วงของ สงครามโลกครั้งที่สอง John von Neumann ก็ได้ร่วมค้นคว้ากับนักเศรษฐศาสตร์ที่ชื่อ Oskar Morgenstern ทำให้เรื่องราวของทฤษฎีการแข่งขัน ได้รับการค้นคว้าวิเคราะห์วิจัยให้ลึกซึ้งและก้าวไกลยิ่งขึ้น จนที่สุด ท่านทั้งสองได้ร่วมกันเขียนหนังสือเล่มหนึ่งชื่อ "The Theory of Games and Economic Behavior" ในปี ค.ศ. 1944[1] นับแต่นั้นมาเรื่องราวของทฤษฎีการแข่งขันก็ได้รับความสนใจจากท่านผู้รู้โดยทั่วไป จนในระยะต่อมา George B. Dantzig ซึ่งได้พัฒนาวิธีการของกำหนดการเชิงเส้น ในรูปแบบของวิธีซิมเพลกซ์ เมื่อปี ค.ศ. 1947 ได้นำวิธีการดังกล่าวมาใช้วิเคราะห์ทฤษฎีการแข่งขันอีกโสตหนึ่งด้วย

---

[1] John von Neumann and Oskar Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior.* (Princeton, N.J. Princeton University Press, 1944.)

1.3 ประเภทของการแข่งขัน:

การแข่งขัน (games) **มีได้หลายลักษณะประเภท ซึ่งการจำแนกประเภทของการแข่งขันอาจพิจารณาได้จากเกณฑ์ร่วมกันสองประการต่อไปนี้ คือ:**

1) จำนวนฝ่ายของผู้ร่วมแข่งขัน

จำนวนฝ่ายของผู้ร่วมแข่งขัน (number of participants) อาจแบ่งได้เป็น:

(1) กรณีผู้แข่งขันมีฝ่ายเดียว (one-person)

(2) กรณีผู้แข่งขันมีสองฝ่าย (two-person)

(3) กรณีผู้แข่งขันมีเกินกว่าสองฝ่าย หรือเรียกว่ามีหลายฝ่าย (many-person)

2) ผลลัพธ์รวมสุทธิ

ผลลัพธ์รวมสุทธิ (net-outcome) **หมายถึง ผลลัพธ์ของการแข่งขันอันเกิดจากผลลัพธ์ของฝ่ายที่ได้ประโยชน์รวมกับฝ่ายที่เสียประโยชน์ ซึ่งผลสุทธิของการรวมนี้ก็คือ การหักกลบลบกันของผลลัพธ์ดังกล่าวนั่นเอง อนึ่ง ผลลัพธ์รวมสุทธินี้ อาจจำแนกได้สองลักษณะด้วยกัน คือ:**

(1) ผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์ (zero-sum) ซึ่งคือ ผลลัพธ์ของฝ่ายได้ประโยชน์และฝ่ายเสียประโยชน์มีเท่ากัน

(2) กรณีผลลัพธ์รวมสุทธิไม่เป็นศูนย์ (non-zero-sum) ซึ่งเป็นกรณีที่ ผลลัพธ์ของฝ่ายได้ประโยชน์และฝ่ายเสียประโยชน์มีไม่เท่ากัน

ดังนั้น เมื่อนำเกณฑ์สองประการข้างต้นนี้มาประกอบกัน จะสามารถจำแนกประเภทของการแข่งขันได้จากรูปแบบกรณีด้วยกัน กล่าวคือ อาจจำแนกได้เป็น:

1) กรณีแข่งขันฝ่ายเดียวผลลัพธ์รวมสุทธิไม่เป็นศูนย์ (one-person non-zero-sum games)

2) กรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์ (two-person zero-sum games)

3) กรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิไม่เป็นศูนย์ (two-person non-zero-sum games)

4) กรณีแข่งขันหลายฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์(many-person zero-sum games)

5) กรณีแข่งขันหลายฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิไม่เป็นศูนย์ (many-person non-zero-sum games)

อนึ่ง โดยเหตุที่การศึกษาวิเคราะห์และวิจัยในเรื่องทฤษฎีการแข่งขันนี้ มีขอบเขตจำกัดในการนำไปใช้ในทางปฏิบัติ และกอปรกับการศึกษาส่วนใหญ่ อันเป็นที่ยอมรับกันอยู่โดยทั่วไป เป็นการแข่งขัน กรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์ (two-person non-zero-sum games) ดังนั้น ในที่นี้จะขอกล่าวถึงกรณีการแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์เป็นสำคัญ สำหรับกรณีอื่น ๆ ก็จะกล่าวถึงในบางส่วนบางตอนตามความจำเป็น เป็นลำดับต่อไป

2. กรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์

2.1 ลักษณะ

กรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์ (Two-Person Zero-Sum Games) หมายถึง สถานการณ์แห่งการชิงชัย โดยมีผู้เข้าร่วมเพียงสองฝ่ายเท่านั้น ซึ่งแต่ละฝ่ายอาจจะประกอบด้วย บุคคลเพียงคนเดียวหรือกลุ่มบุคคลก็ได้ โดยผลลัพธ์ของฝ่ายที่ได้ประโยชน์ จะต้องเท่ากับผลลัพธ์ของฝ่ายที่เสียประโยชน์พอดี ซึ่งจะเป็นผลให้ผลลัพธ์ของสองฝ่ายรวมกันได้ค่าเป็นศูนย์พอดีนั่นเอง ทั้งนี้ ผู้แข่งขันแต่ละฝ่ายอาจมีกลยุทธ์ (strategies) ที่จะใช้ในการแข่งขันกับฝ่ายตรงกันข้ามได้หลายกลยุทธ์ และแต่ละฝ่ายก็ไม่จำเป็นที่จะต้องมีกลยุทธ์ ในจำนวนหรือรูปแบบลักษณะที่เท่ากันหรือเหมือนกันแต่อย่างใด อย่างไรก็ตาม แต่ละฝ่ายจะต้องทราบจำนวนและรูปแบบลักษณะของกลยุทธ์ที่มีอยู่ทั้งของตนและของฝ่ายตรงกันข้าม ตลอดจนทราบผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้น จากการที่แต่ละฝ่ายใช้กลยุทธ์แต่ละกลยุทธ์เข้าแข่งขันกันด้วย และทั้งนี้ ผลลัพธ์อันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ดังกล่าว จะต้องอยู่ในรูปของจำนวนที่นับเนื่องได้ด้วย

การแข่งขันกรณีแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์นี้ อาจแสดงให้เห็นได้โดยชัดเจนในรูปของตารางการแข่งขัน (game matrix) ซึ่งตารางนี้จะแสดงกลยุทธ์ต่าง ๆ ที่จะใช้ในการแข่งขันของทั้งสองฝ่าย ตลอดจนผลตอบแทนอันเป็นผลลัพธ์ของการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ของแต่ละฝ่ายด้วย อย่างไรก็ตาม โดยเหตุที่การแข่งขันนี้เป็นกรณีแข่งขันเพียงสองฝ่ายและผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์ ดังนั้นผลตอบแทนจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ เข้าแข่งกันของแต่ละฝ่าย จึงสามารถแสดงในรูปของผลตอบแทนของฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งก็เพียงพอแล้ว ทั้งนี้เพราะว่าเมื่อฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งได้ประโยชน์ในจำนวนเท่าใด อีกฝ่ายหนึ่งก็จะเสียประโยชน์ในจำนวนเท่านั้นเช่นกัน นั่นคือ ผลลัพธ์รวมสุทธิของผลตอบแทนอันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ เข้าแข่งขัน ได้ค่าเป็นศูนย์นั่นเอง ดังนั้น เมื่อได้กำหนดให้ตารางการแข่งขันดังกล่าว แสดงถึงผลตอบแทนของฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งแล้ว ผลตอบแทนของอีกฝ่ายหนึ่งก็จะพิจารณาได้โดยทันทีจากค่าตรงกันข้ามกันนั่นเอง เช่นถ้าฝ่ายหนึ่งได้ผลตอบแทน 5 บาท อีกฝ่ายหนึ่งก็จะเสีย 5 บาท หรือได้ (-5) บาท เป็นต้น

อนึ่ง โดยเหตุที่ตารางการแข่งขัน (game matrix) ดังกล่าว เป็นตารางที่มีเป้าหมายในการแสดงผลตอบแทนอันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ของคู่แข่งขันเป็นสำคัญ ดังนั้น จึงนิยมเรียกตารางการแข่งขันนี้ว่า "ตารางผลตอบแทน" (payoff or payout matrix) และอาจแสดงรูปแบบตารางผลตอบแทนดังกล่าวนี้ในลักษณะทั่วไป ได้ดังต่อไปนี้

ตาราง 3.1: ตารางผลตอบแทน (The payoff matrix)

กลยุทธ์ขอ A\กลยุทธ์ของ B	B	B_2	...	B_n
A_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
A_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮⋮⋮	⋮
A_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

ตารางการแข่งขัน (game matrix) ดังตาราง 3.1 นี้ หมายถึง ตารางผลตอบแทน (payoff matrix) ของการแข่งขัน ซึ่งมีผู้จะต้องแข่งขันชิงชัยกันอยู่สองฝ่าย โดยฝ่ายหนึ่งคือฝ่ายของ A และอีกฝ่ายหนึ่งคือฝ่าย B โดยที่ฝ่าย A มีกลยุทธ์อยู่ทั้งสิ้น m กลยุทธ์ คือ กลยุทธ์ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ สำหรับฝ่ายของ B มีกลยุทธ์อยู่ n กลยุทธ์ ได้แก่ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (กลยุทธ์ของ A และของ B ไม่จำเป็นต้องมีจำนวนเท่ากันหรือเหมือนกันแต่อย่างใด) สำหรับผลตอบแทนอันเกิดจากการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ของแต่ละฝ่ายที่เข้าแข่งขันกัน จะพิจารณาได้จากค่าของ p_{ij} ที่ปรากฏอยู่ในตาราง กล่าวคือ ถ้าตาราง 3.1 นี้ หมายถึง ตารางแสดงผลตอบแทนของฝ่าย A (A's payoff matrix) แล้ว ค่าของ p_{ij} ที่เป็นบวก (+) จะหมายถึง ผลตอบแทนที่ A จะได้ประโยชน์ ในทางกลับกัน ถ้าค่าของ p_{ij} เป็นลบ (-) ก็จะหมายถึง ฝ่าย A เสียประโยชน์ หรือได้ประโยชน์ติดลบนั่นเอง ในทางตรงกันข้าม ค่าใดที่แสดงว่าฝ่าย A ได้ประโยชน์เท่าใด ก็ย่อมหมายถึงฝ่าย B เสียเท่านั้น และ ค่าใดที่แสดงว่าฝ่าย A เสียประโยชน์เท่าใด ก็ย่อมต้องหมายถึงฝ่าย B ได้เท่านั้นเช่นกัน อย่างไรก็ตาม ค่าตอบแทน p_{ij} ดังกล่าวข้างต้นนี้ อาจมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งหมายถึงว่า ไม่มีฝ่ายใดได้หรือฝ่ายใดเสียก็ได้เช่นกัน

อนึ่ง ตารางผลตอบแทนลักษณะข้างต้นนี้ อาจเขียนในรูปแบบย่อที่กระทัดรัดกว่าได้ ดังนี้

ตาราง 3.2: ตารางผลตอบแทนแบบย่อ

$$
\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix} \end{array}
=
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix} \end{array}
$$

โดยที่ แถวนอนแต่ละแถว หมายถึง กลยุทธ์ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ตามลำดับ และแถวตั้งแต่ละแถว หมายถึง กลยุทธ์ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ตามลำดับเช่นกัน สำหรับข้อมูลอื่น ๆ ก็เป็นไปโดยนัยเดียวกันกับตารางเต็มรูปของตาราง 3.1 นั่นเอง

2.2 การหาผลเฉลย:

การหาผลเฉลยของการแข่งขันในที่นี้ หมายถึง การวิเคราะห์พฤติกรรมของผู้ร่วมแข่งขัน เพื่อที่จะพิจารณาว่า ผู้ร่วมแข่งขันแต่ละฝ่ายควรจะต้องใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ อย่างไร จึงจะทำให้ฝ่ายตนเองอยู่ในสถานะที่ดีที่สุด กล่าวคือ ถ้าฝ่ายตนเป็นฝ่ายที่ได้ประโยชน์ก็จะดำเนินการเลือกใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ เพื่อให้ฝ่ายตนได้รับประโยชน์มากที่สุด ในทางตรงกันข้าม ถ้าฝ่ายตนเสียประโยชน์การดำเนินการเลือกใช้กลยุทธ์ดังกล่าว ก็จะกระทำไปเพื่อให้เสียประโยชน์น้อยที่สุดนั่นเอง ซึ่งการเลือกใช้กลยุทธ์เพื่อแข่งขันข้างต้นนี้ แต่ละฝ่ายจะเลือกใช้กลยุทธ์ใดเพียงกลยุทธ์หนึ่ง หรือจะเลือกใช้หลายกลยุทธ์ประกอบกันหรือผสมกันก็ได้ ซึ่งถ้าผู้ร่วมแข่งขัน หรือในที่นี้คือคู่แข่งขันต่างพิจารณาเลือกใช้กลยุทธ์ใดเพียงกลยุทธ์เดียวเข้าชิงชัยกัน การแข่งในลักษณะนี้ก็จะเรียกกันว่า การแข่งขันที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วง (pure strategy and a saddle point) แต่ถ้าคู่แข่งขันต่างก็เลือกใช้กลยุทธ์หลายกลยุทธ์ผสมกันในการชิงชัย โดยมิได้ใช้เพียงกลยุทธ์ใดกลยุทธ์หนึ่งเท่านั้น การแข่งขันในลักษณะนี้ก็จะเรียกว่า การแข่งขันแบบกลยุทธ์ผสม (mixed strategies)

จากการพิจารณาดังกล่าวข้างต้น จะเห็นได้ว่า กรณีการแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์ (two-person zero-sum games) อาจมีได้สองลักษณะรูปแบบ คือ:

1. การแข่งขันที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วง (pure strategy and a saddle point) และ

2. การแข่งขันแบบกลยุทธ์ผสม (mixed strategies)

ในขั้นนี้ จะแสดงวิธีการหาผลเฉลยของการแข่งขัน ในแต่ละลักษณะรูปแบบเป็นลำดับไปดังต่อไปนี้:

2.2.1 การแข่งขันที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วง:

การแข่งขันที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วง (Pure Strategy And A Saddle Point) หมายถึง การแข่งขันที่คู่แข่งขันแต่ละฝ่าย ใช้กลยุทธ์อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงกลยุทธ์เดียวเข้าชิงชัยแข่งขันกับอีกฝ่ายหนึ่ง โดยผลตอบแทน อันเกิดจากการแข่งขันหรือค่าของเกม (value of the game) แต่ละเกม จะมีค่าแน่นอนตายตัวเป็นเสมือนดังมีจุดดุลศูนย์ถ่วง
สำหรับการหาผลเฉลยของการแข่งขันในลักษณะรูปแบบข้างต้นนี้ จะขอแสดงโดยวิธีการลองผิดลองถูกด้วยความสมเหตุสมผลในเบื้องต้น และจะประมวลสรุปผูกขึ้นเป็นกฎ หรือเป็นสูตรสำเร็จต่อไปในที่สุด

ในลำดับนี้เพื่อให้เข้าใจวิธีการหาผลเฉลยของการแข่งขันดังกล่าวได้โดยง่ายและชัดเจนอย่างแท้จริง จึงขอยกตัวอย่างสภาวะการณ์การแข่งขัน กรณีการแข่งขันสองฝ่ายผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์ ในรูปแบบที่คู่แข่งขันต่างมีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วง ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 3.1: ตัวอย่างการแข่งขันที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วง I.
: กรณีคู่แข่งขันมีกลยุทธ์เท่ากัน

ตาราง 3.3: **ตารางผลตอบแทนของ** A (A's payoff matrix)

(บาท)

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	0	-3
A_2	7	0 4	5
A_3	1	-5	6 *

อยากทราบว่า: คู่แข่งขันแต่ละฝ่ายควรจะเลือกใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ อย่างไร จึงจะเหมาะสมที่สุด

ข้อพิจารณา:

จากตาราง 3.3 อันเป็นตารางแสดงผลตอบแทนของ A (A's payoff matrix) ในกรณีของการแข่งขันที่มีผลลัพธ์รวมสุทธิเป็นศูนย์ (zero-sum game) ดังนั้น ตัวเลขที่ปรากฏอยู่ในตารางซึ่งเป็น "บวก" (+) ย่อมหมายถึง ส่วนที่ A จะได้ (B เสีย) ในทางตรงกันข้าม เลขที่เป็น "ลบ" (-) ก็จะหมายถึงส่วนที่ A เสีย (A ได้ติดลบ หรือก็คือ A เสีย แต่ B ได้) สำหรับตัวเลขที่เป็น "ศูนย์" (0) ก็จะคือ A ได้ศูนย์ (B เสียศูนย์) หรือก็คือทั้งสองฝ่ายไม่ได้ไม่เสียนั่นเอง

วิธีทำ: ขั้นต้นนี้ จะขอแสดงวิธีหาผลเฉลยโดยการลองผิดลองถูกในเบื้องต้นก่อน ดังนี้ คือ:

สมมุติว่า ณ เวลาใดเวลาหนึ่งไม่ปรากฏเกิดการแข่งขันกันขึ้นโดยฝ่าย A ใช้กลยุทธ์ A_3 และฝ่าย B ก็ใช้กลยุทธ์ B_3 เข้าแข่งขันด้วย ซึ่งจะเห็นได้ว่า ถ้าเป็นเช่นนี้ ฝ่าย A จะได้ผลตอบแทนจากการแข่งขันนี้ 6 บาทต่อเกม และนั่นคือฝ่าย B จะเป็นฝ่ายเสีย 6 บาทเช่นกัน ด้วยเหตุที่ B เป็นฝ่ายเสียประโยชน์ ดังนั้น ฝ่าย B จะต้องประเมินสถานการณ์และทบทวนพฤติกรรมในการเลือกใช้กลยุทธ์ของตนเองว่าเหมาะสมดีอยู่แล้วหรือไม่อย่างไร

จากการพิจารณา จะเห็นได้ว่าการที่ B เสีย 6 บาทนี้ เกิดจากการที่ A ใช้กลยุทธ์ A_3 และ B ก็ใช้กลยุทธ์ B_3 เข้าแข่งขันด้วย แต่โดยแท้จริงแล้ว B มีกลยุทธ์ที่จะเลือกใช้ได้อยู่สามกลยุทธ์ ดังนั้น B อาจเลือกใช้กลยุทธ์ B_1 หรือ B_2 แทน B_3 ก็ได้ ซึ่งถ้า B เลือกใช้ B_1 จะเสียเพียง 1 บาทต่อเกม หรือถ้าเลือกใช้ B_2 ก็จะกลับกลายเป็นฝ่ายได้ประโยชน์ 5 บาทต่อเกม เช่นนี้แล้ว B ก็ควรที่จะเปลี่ยนไปใช้ B_2 แทน B_3 จึงจะดีที่สุด อันจะเป็นผลให้ B เป็นฝ่ายได้ประโยชน์ 5 บาทต่อเกม โดยที่ A กลับกลายเป็นฝ่ายเสีย 5 บาทต่อเกม (A ได้ -5 คือเสีย 5 นั่นเอง)

ในขณะนี้ A เสียประโยชน์อันเกิดจากการใช้ A_3 โดย B ใช้ B_2 ดังนั้น A ก็จะต้องกลับกลายเป็นฝ่ายต้องพิจารณากลยุทธ์ของฝ่ายตนเองบ้าง ซึ่งก็จะพบว่า A มีกลยุทธ์ที่จะเลือกใช้ได้สามกลยุทธ์ ดังนั้น A อาจเลือกใช้ A_1 หรือ A_2 แทน A_3 ก็ได้ ซึ่งถ้าเลือกใช้ A_1 ก็จะได้ศูนย์ (ไม่ได้ไม่เสีย) แต่ถ้าเลือกใช้ A_2 จะได้ 4 บาทต่อเกม เช่นนี้แล้ว A ย่อมสมควรที่จะเปลี่ยนไปใช้ A_2 แทน A_3 ซึ่งจะทำให้ A ได้ผลตอบแทน 4 บาทต่อเกม อันเป็นกลยุทธ์ที่ดีที่สุดในขณะนี้

ลำดับนี้ B เสียประโยชน์ อันเกิดจากการใช้ B_2 โดยที่ A ใช้ A_2 ด้วยเช่นกัน ดังนั้น B ต้องกลับกลายเป็นฝ่ายที่จะต้องพิจารณาพฤติกรรมของตนเองอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งจะเห็นว่าถ้า B เปลี่ยนไปใช้ B_1 จะเสีย 7 บาท และถ้าเปลี่ยนไปใช้ B_3 จะเสีย 5 บาท เช่นนี้แล้ว B ก็ไม่ควรจะเปลี่ยนไปใช้กลยุทธ์อื่นแทนกลยุทธ์ B_2 นี้ เพราะถ้า A ยังคงใช้ A_2 อยู่ กลยุทธ์ B_2 ก็จะเหมาะสมที่สุดอยู่แต่เดิมแล้ว (เสียน้อยที่สุด)

ในที่สุด ฝ่าย A จะใช้กลยุทธ์ A_2 แต่เพียงอย่างเดียว ในขณะเดียวกันฝ่าย B ก็จะใช้กลยุทธ์ B_2 แต่เพียงอย่างเดียวเช่นกัน ทั้งนี้เพราะว่า ทั้งสองฝ่ายได้อยู่ในสถานะที่ดีที่สุดของตนแล้ว กล่าวคือ เมื่อ B ใช้กลยุทธ์ B_2 ฝ่าย A จะได้ผลตอบแทนสูงสุด (4 บาท) เมื่อใช้กลยุทธ์ A_2 เข้าแข่งขันด้วย ในขณะเดียวกัน เมื่อฝ่าย A ใช้กลยุทธ์ A_2 ฝ่าย B ก็จะเสียประโยชน์น้อยที่สุด (4 บาท) เมื่อใช้กลยุทธ์ B_2 นั่นเอง

ดังนั้นโดยสรุปแล้ว คู่แข่งขันทั้งสองฝ่ายก็จะใช้กลยุทธ์แท้ของตนเข้าแข่งขันกันและผลตอบแทนอันเกิดจากการใช้กลยุทธ์แท้เข้าแข่งขันกันดังกล่าว ก็จะก่อให้เกิดผลตอบแทนที่คงตัวดังมีจุดดุลศูนย์ถ่วงอยู่ (ดังที่ได้แสดงวงกลมล้อมรอบไว้แล้ว) ฉะนั้นการแข่งในลักษณะนี้ จึงได้เรียกว่า การแข่งขันที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วง (pure strategy and a saddle point)

อนึ่ง การปรับเปลี่ยนการใช้กลยุทธ์ของคู่แข่งขันทั้งสองฝ่าย ดังตัวอย่าง 3.1 ข้างต้นนี้ อาจแสดงโดยสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 3.4: ตารางสรุปผลเฉลย

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	0	-3
A_2	7	4	5
A_3	1	-5	6 *

เปลี่ยนจาก A_3 ไปใช้ A_2
($A_3 \rightarrow A_2$)

เปลี่ยนจาก B_3 ไปใช้ B_2
($B_3 \rightarrow B_2$)

โดยผลเฉลย คือ:

A_2, B_2 และ $v = 4$: v = value of the game

หรือ

$A = 0, 1, 0$

$B = 0, 1, 0$

และ $v = 4$

โดยเหตุที่การหาผลเฉลยโดยวิธีการลองผิดลองถูกด้วยความสมเหตุสมผลนี้ สามารถที่จะนำไปใช้กับปัญหาต่าง ๆ ซึ่งมีรูปแบบของกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วง ทั้งกรณีที่คู่แข่งขันมีกลยุทธ์เท่ากัน (ดังตัวอย่าง 3.1) และกรณีที่คู่แข่งขันมีกลยุทธ์ไม่เท่ากัน ดังนั้น ต่อไปนี้จะขอแสดงตัวอย่างการหาผลเฉลยกรณีที่คู่แข่งขันมีกลยุทธ์ไม่เท่ากันเป็นลำดับกันไป ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่าง 3.2: ตัวอย่างการแข่งขันที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลยภาพถ่วง II.
: กรณีคู่แข่งขันมีกลยุทธ์ไม่เท่ากัน (ฝ่าย A มากกว่าฝ่าย B)

ตาราง 3.5: ตารางผลตอบแทนของ A (A's payoff matrix)

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2
A_1	1	**-3 ***
A_a	0 2	4
A_3	-1	5

$A_1 \rightarrow A_3$

$A_3 \rightarrow A_2$

L - J

$B_2 \rightarrow B_1$

จากตาราง 3.5 สมมุติว่า ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง เกิดการแข่งขันขึ้น โดย ฝ่าย A ใช้กลยุทธ์ A_1 และฝ่าย B ใช้กลยุทธ์ B_2 ซึ่งก่อให้เกิดผลตอบแทนของเกมเป็น v = -3 นั่นคือ A เป็นฝ่ายเสียประโยชน์ ดังนั้น A จึงเปลี่ยนไปใช้กลยุทธ์ A_3 ซึ่งจะทำให้ฝ่ายตนเปลี่ยนเป็นฝ่ายได้ประโยชน์ (ได้ 5) สำหรับฝ่าย B เมื่อ A เปลี่ยนไปใช้ A_3 แล้ว ทำให้ฝ่ายตน (B) กลับกลายเป็นฝ่ายเสียประโยชน์ จึงเปลี่ยนท่าทีของตนไปใช้กลยุทธ์ B_1 ซึ่งก็จะเป็นผลให้ฝ่ายตนกลับมาเป็นฝ่ายได้ประโยชน์อีกครั้งหนึ่ง แต่ในทางตรงกันข้าม ฝ่าย A กลับกลายเป็นฝ่ายเสียประโยชน์ ดังนั้น ฝ่าย A จึงเปลี่ยนกลยุทธ์ใหม่โดยเปลี่ยนไปใช้กลยุทธ์ A_2 อันเป็นผลให้ฝ่ายตนได้ประโยชน์ (ได้ 2) อีกครั้งหนึ่ง และในทางกลับกัน ฝ่าย B กลับมาเป็นฝ่ายเสียประโยชน์อีก แต่อย่างไรก็ตาม ฝ่าย B ก็จะไม่เปลี่ยนไปใช้กลยุทธ์อื่น (B_2) อีก เพราะจะทำให้เสียมากกว่าที่เป็นอยู่ (เสีย 2) ทำนองเดียวกัน ฝ่าย A ก็พอใจกับผลตอบแทนที่ตนได้ใน

ขณะนี้แล้ว เพราะถ้าเปลี่ยนไปใช้กลยุทธ์อื่น (A_1 หรือ A_3) ก็จะได้ประโยชน์น้อยลงหรือกลับเป็นฝ่ายเสียประโยชน์ไปเสียเอง ดังนั้น ทั้งสองฝ่ายก็จะไม่เปลี่ยนแปลงท่าทีของตนอีกต่อไป เพราะต่างก็อยู่ในสถานะที่ดีที่สุดแล้ว

ฉะนั้นโดยสรุปแล้ว ผลเฉลยก็จะคือ:

A_2, B_1 และ v.= 2 : v = value of the game

หรือ

A = 0, 1, 0

B = 1, 0

และ v = 2

ตัวอย่าง 3.3: ตัวอย่างการแข่งขันที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลยภาพ ศูนย์ถ่วง III.

: กรณีคู่แข่งขันมีกลยุทธ์ไม่เท่ากัน (ฝ่าย A น้อยกว่าฝ่าย B)

ตาราง 3.6: ตารางผลตอบแทนของ A (A's payoff matrix)

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	0	4
A_2	1 *	-3	2

$A_2 \rightarrow A_1$

$B_1 \rightarrow B_2$

จากตาราง 3.6 สมมุติว่า ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง เกิดการแข่งขันขึ้น โดย ฝ่าย A ใช้กลยุทธ์ A_2 และฝ่าย B ใช้กลยุทธ์ B_1 ซึ่งก่อให้เกิดผลตอบแทนของเกมเป็น $v = 1$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าฝ่าย B ซึ่งเสียประโยชน์จะเปลี่ยนไปใช้ B_2 อันเป็นผลให้ฝ่าย A ต้องปรับกลยุทธ์โดยเปลี่ยนไปใช้ A_1 ในที่สุด ซึ่งจะทำให้ผลตอบแทนของเกมเปลี่ยนไปเป็น $v = 0$ นั่นคือต่างฝ่ายต่างไม่เสีย หรือได้ประโยชน์จากกันและกัน และทั้งนี้ คู่แข่งขันก็จะอยู่ในสถานะที่ดีที่สุด

ดังนั้นที่สุด ผลเฉลยก็คือ:

A_1, B_2 และ $v = 0$: v = value of the game

หรือ

$A = 1, 0$

$B = 0, 1, 0$

และ $v = 0$

จากตัวอย่างการหาผลเฉลยโดยวิธีลองผิดลองถูกด้วยเหตุและผล ดังที่ได้แสดงมาข้างต้นแล้วนั้น ในลำดับนี้ จะขอประมวลสรุปผูกขึ้นเป็นกฎหรือสูตรสำเร็จ เพื่อใช้เป็นหลักในการหาผลเฉลย กรณีการแข่งขันที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วง ในลักษณะที่สะดวกและรวดเร็วต่อไป

ในชั้นนี้ เพื่อให้การประมวลสรุปผลเป็นไปอย่างเด่นชัดและสามารถยืนยันได้ว่า วิธีการอันเป็นหลักการที่จะประมวลขึ้นนี้ สามารถอ้างอิงเป็นกฎหรือหลักการที่ใช้ได้กับปัญหาการแข่งขันที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วงได้โดยทั่วไป จึงขอนำตัวอย่างทั้งสามข้างต้น อันได้แก่ ตัวอย่าง 3.1 ตัวอย่าง 3.2 และตัวอย่าง 3.3 ซึ่งได้แสดงวิธีการหาผลเฉลย โดยการลองผิดลองถูกมาแล้ว มาแสดงเทียบเคียงกันให้เด่นชัด และจะสรุปประมวลผลจากตัวอย่างทั้งสามดังกล่าวขึ้นเป็นสูตรสำเร็จในคราวเดียวกัน ดังต่อไปนี้:

ตาราง 3.7: กลุ่มตารางประมวลผลเฉลย

ตาราง 3.7.1 ตารางผลตอบแทนของ A และผลเฉลย

: กรณีที่คู่แข่งขันมีกลยุทธ์เท่ากัน (จากตัวอย่าง 3.1)

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	B_3	ค่าต่ำสุดแถวนอน	
A_1	2	0	-3	-3	
A_2	7	4	5	4 *	สูงสุด
A_3	1	-5	6	-5	
ค่าสูงสุดแถวตั้ง	7	4 *	6		
		ต่ำสุด			

ตาราง 3.7.2 ตารางผลตอบแทนของ A และผลเฉลย

: กรณีที่ฝ่าย A มีกลยุทธ์มากกว่าฝ่าย B (จากตัวอย่าง 3.2)

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	ค่าต่ำสุดแถวนอน	
A_1	1	-3	-3	
A_2	2	4	2 *	สูงสุด
A_3	-1	5	-1	
ค่าสูงสุดแถวตั้ง	2 *	5		
	ต่ำสุด			

ตาราง 3.7.3 ตารางผลตอบแทนของ A และผลเฉลย

: กรณีที่ฝ่าย A มีกลยุทธ์น้อยกว่าฝ่าย B (จากตัวอย่าง 3.3)

กลยุทธ์ของ A\กลยุทธ์ของ B	B_1	B_2	B_3	ค่าต่ำสุดแถวนอน	
A_1	2	0	4	0 *	สูงสุด
A_2	1	-3	2	-3	
ค่าสูงสุดแถวตั้ง	2	0 *	4		
		ต่ำสุด			

จากกลุ่มตาราง 3.7 จะเห็นได้ว่า ผลตอบแทนของการแข่งขัน หรือค่าของเกม (v = vaule of the game) ของแต่ละตัวอย่างตารางย่อย อันได้จากการหาผลเฉลย โดยวิธีลองผิดลองถูก ได้แก่สมาชิก (element) ซึ่งมีวงกลมล้อมรอบอยู่

ข้อสังเกต:

สมาชิกที่มีวงกลมล้อมรอบอยู่ ซึ่งเป็นค่าของเกมอันเป็นผลเฉลยของการแข่งขัน ในกลุ่มตาราง 3.7 อันประกอบด้วยตัวอย่างตารางย่อย 3.7.1 ตาราง 3.7.2 และตาราง 3.7.3 จะมีคุณลักษณะบางประการที่เหมือนกัน อันเป็นข้อควรสังเกต เพื่อประมวลสรุปเป็นหลักการของการหาผลเฉลยในลำดับต่อไป ดังต่อไปนี้ คือ:

1. สมาชิกที่มีวงกลมล้อมรอบอยู่ จะเป็นสมาชิกที่มีค่าต่ำที่สุด (minimum) เมื่อเปรียบเทียบกับสมาชิกตัวอื่นๆ ซึ่งอยู่ในแถวนอน (row) เดียวกัน เช่น สมาชิกในตำแหน่ง A_2-B_2 ในตาราง 3.7.1 ซึ่งมีค่าเป็น 4 จะเป็นสมาชิกที่มีค่าต่ำสุดในแถวนอน A_2

ในทำนองเดียวกัน สมาชิกซึ่งอยู่ในตำแหน่ง A_2-B_1 ในตาราง 3.7.2 และสมาชิก A_1-B_2 ในตาราง 3.7.3 ก็จะเป็นสมาชิกที่มีค่าต่ำที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับสมาชิกตัวอื่น ๆ ซึ่งอยู่ในแถวนอนเดียวกันเช่นกัน

2. สมาชิกที่มีวงกลมล้อมรอบอยู่ จะเป็นสมาชิกที่มีค่าสูงที่สุด (maximum) เมื่อเปรียบเทียบกับสมาชิกอื่น ๆ ที่อยู่ในแถวตั้ง (column) เดียวกัน เช่น สมาชิกในตำแหน่ง A_2-B_2 ในตาราง 3.7.1 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 4 จะเป็นสมาชิกที่มีค่าสูงที่สุด ในแถวตั้ง B_2 ในทำนองเดียวกัน สมาชิกในตำแหน่ง A_2-B_1 ในตาราง 3.7.2 และสมาชิก A_1-B_2 ในตาราง 3.7.3 ก็จะเป็นสมาชิกที่มีค่าสูงที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับสมาชิกตัวอื่น ๆ ในแถวตั้งเดียวกันเช่นกัน

จากข้อสังเกตทั้งสองประการข้างต้นนี้พอจะสรุปในเบื้องต้นได้ว่า ตำแหน่งสมาชิกอันเป็นผลเฉลยของการแข่งขัน จะเป็นตำแหน่งที่สมาชิกนั้นมีค่าต่ำที่สุดในแถวนอน (row minimum) ในขณะเดียวกัน ก็จะมีค่าสูงที่สุดในแถวตั้ง (column maximum) ซึ่งคุณลักษณะนี้เป็นจริงในตัวอย่างทั้งหมดที่ยกมาประกอบการพิจารณาข้างต้นทั้งสิ้น ดังนั้น จึงอาจจะอนุโลมสรุปรวมในชั้นนี้ได้ว่า ตำแหน่งผลเฉลยของปัญหาการแข่งขันกรณีที่มีกลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วงใด ๆ จะเป็นตำแหน่งสมาชิกที่เป็นค่าต่ำที่สุดในแถวนอน และในขณะเดียวกันก็เป็นสมาชิกที่มีค่าสูงที่สุดในแถวตั้ง หรือ กล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า คือ ตำแหน่งที่ะ ค่าต่ำที่สุดในแถวนอน = ค่าสูงที่สุดในแถวตั้ง (row minimum = column maximum)

จากข้อสรุปข้างต้นนี้ ทำให้การหาผลเฉลยของการแข่งขันกระทำได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น กล่าวคือ เมื่อทราบว่าตำแหน่งผลเฉลยจะอยู่ที่ สมาชิกซึ่งมีค่าต่ำที่สุดตามแถวนอนและเป็นค่าสูงที่สุดในแถวตั้ง ดังนั้น เมื่อต้องการหาผลเฉลยของปัญหาการแข่งขันที่มีกลยุทธ์แท้ใด ๆ ก็อาจดำเนินการเบื้องต้นด้วยการหาสมาชิกซึ่งมีค่าต่ำที่สุดในแถวนอน และหาสมาชิกซึ่งมีค่าสูงที่สุดในแถวตั้งของทุกๆ แถว แล้วเขียนประกอบลงในตารางการแข่งขันของปัญหานั้น ๆ (ดังที่ได้แสดงประกอบไว้แล้วในกลุ่มตาราง 3.7) จากนี้ก็พิจารณาในลำดับต่อไปว่า สมาชิกตัวใดของค่าต่ำที่สุดในแถวนอนมีค่าเท่ากับสมาชิกที่มีค่าสูงที่สุดของกลุ่มแถวตั้ง หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ สมาชิกตัว

ใดที่เป็นค่าต่ำที่สุดในแถวนอนและเป็นค่าที่สูงที่สุดของแถวตั้งในขณะเดียวกัน สมาชิกตัวนั้นก็คือผลเฉลยนั่นเอง

อนึ่ง หลักการพิจารณาที่ได้กล่าวมาเป็นลำดับจวบจนขณะนี้นั้น นับได้ว่าเป็นวิธีการที่ทำให้การหาผลเฉลยดำเนินไปได้โดยง่ายและรวดเร็วมากขึ้น แต่อย่างไรก็ตาม ถ้าสังเกตให้ชัดเจนยิ่งขึ้น จะพบว่า ตำแหน่งซึ่งเป็นผลเฉลยยังอาจมีข้อสังเกตที่ก่อให้เกิดประโยชน์ในการพิจารณาหาผลเฉลยที่ง่ายและรวดเร็วยิ่งขึ้นได้อีก กล่าวคือ ถ้าได้พิจารณาตำแหน่งผลเฉลย หรือสมาชิกที่มีวงกลมล้อมรอบอยู่จะพบว่า นอกจากจะเป็นสมาชิกที่มีค่าต่ำที่สุดในแถวนอน และเป็นค่าที่สูงที่สุดในแถวตั้งแล้ว ถ้าได้เปรียบเทียบกับสมาชิก ที่เป็นค่าต่ำที่สุดของแถวนอนอื่น ๆ ก็จะพบว่า สมาชิกที่เป็นผลเฉลยนี้จะมีค่าสูงที่สุดในบรรดาค่าที่ต่ำที่สุดของแถวนอนทั้งหมด นั่นคือ เป็นค่าที่สูงที่สุดของบรรดาค่าที่ต่ำที่สุดของแถวนอน (maximum value of row minima) เช่น ในตาราง 3.7.1 สมาชิกตำแหน่ง A_2-B_2 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 4 อันเป็นตำแหน่งผลเฉลยนั้น ค่าของสมาชิกนี้เป็นค่าต่ำที่สุดของแถวนอน A_2 และก็เป็นค่าสูงที่สุดของบรรดาค่าต่ำที่สุดของแถวนอนทั้งหมดด้วย ทำนองเดียวกัน สมาชิกตำแหน่ง A_2-B_1 ในตาราง 3.7.2 และสมาชิก A_1-B_2 ในตาราง 3.7.3 ก็เป็นสมาชิกที่เป็นค่าสูงสุดของค่าต่ำสุดของแถวนอนทั้งหมดเช่นกัน ดังที่ได้แสดงโดยเครื่องหมายดอกจันทร์ (*) กำกับไว้แล้ว ในทางกลับกัน สมาชิกที่เป็นผลเฉลยนี้ ถ้าเปรียบเทียบกับสมาชิกที่เป็นค่าสูงสุดของแถวตั้งอื่น ๆ ก็จะพบว่า ค่านี้เป็นค่าที่ต่ำที่สุดในบรรดาค่าที่สูงที่สุดของแถวตั้งทั้งหมดนั่นเอง นั่นคือ เป็นค่าที่ต่ำที่สุดของบรรดาค่าที่สูงที่สุดของแถวตั้ง (minimum value of column maxima) เช่น ในตาราง 3.7.1 สมาชิกตำแหน่ง A_2-B_2 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 4 อันเป็นตำแหน่งผลเฉลยนั้น ค่าของสมาชิกนี้ เป็นค่าที่สูงที่สุดของแถวตั้ง B_2 และก็เป็นค่าต่ำสุดของบรรดาค่าสูงสุดของแถวตั้งทั้งหมดด้วย ทำนองเดียวกัน สมาชิกตำแหน่ง A_2-B_1 ในตาราง 3.7.2 และสมาชิก A_1-B_2 ในตาราง 3.7.3 ก็เป็นสมาชิกที่เป็นค่าต่ำสุดของค่าสูงสุดของแถวตั้งทั้งหมดเช่นกัน ดังที่ได้แสดงโดยเครื่องหมายดอกจันทร์ (*) กำกับไว้แล้ว อย่างไรก็ตาม ในที่สุดจะพบว่าสมาชิกที่เป็นผลเฉลยนี้ แท้ที่จริงก็คือ สมาชิกที่เป็นค่าต่ำสุดของบรรดาค่าสูงสุดของแถวตั้ง และขณะเดียวกันก็เป็นค่าสูงสุดของบรรดาค่าต่ำสุดของแถวนอน หรือก็คือสมาชิกที่มีค่าต่ำสุดของค่าสูงสุดแถวตั้งเท่ากับค่าสูงสุดของค่าต่ำสุดแถวนอน (minimum value of column maxima = maximum value of row minima) และด้วยเหตุนี้เอง