ขั้นตอนที่ 4. ดำเนินการย้อนกลับไปตามขั้นตอนที่ 2 และขั้นตอนที่ 3 ต่อไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งผลการทดสอบได้แสดงให้เห็นว่า ไม่มีวิธีปรับปรุงใด ๆ ที่จะนำไปสู่ผลเฉลยที่ดีกว่านี้อีกแล้ว ผลเฉลยสุดท้ายนี้ ก็จะคือผลเฉลยที่ดีที่สุดนั่นเอง

ขั้นตอนที่ 5. สรุปผลเฉลย

ในลำดับนี้ เพื่อให้สามารถเข้าใจการหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น โดยวิธีพีชคณิตได้อย่างถูกต้องชัดเจนยิ่งขึ้น จะขอยกตัวอย่างประกอบการพิจารณาโดยลำดับ ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่างการหาผลเฉลยโดยวิธีพีชคณิต:

ตัวอย่าง 2-4: การหาผลเฉลยโดยวิธีพีชคณิต:

ในชั้นนี้ ขอแสดงจากโจทย์ ตัวอย่าง 2-1 (ตัวอย่างบริษัทเครื่องใช้สำนักงาน) ซึ่งเคยแสดงเป็นตัวอย่างของการหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟมาแล้ว (ตัวอย่าง 2-2) ซึ่งตัวอย่างดังกล่าวมีตัวแบบของกำหนดการ ดังนี้:

Maximize	$R = 5x_1 + 6x_2$	(00)
subject tot	$3x_1 + 2x_2 \leq 32.$	
	$x_1 + 4x_2 \leq 34$	
and	$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	

วิธีการ:

การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีพีชคณิต อาจดำเนินการเป็นลำดับขั้นตอนได้ดังต่อไปนี้:

ขั้นตอนที่ 1. ดำเนินการหาผลเฉลยที่เป็นไปได้เบื้องต้น จากเงื่อนไขที่กำหนด:

การหาผลเฉลยที่เป็นไปได้เบื้องต้น (initial feasible solution) เริ่มกระทำได้โดย การแปลงอสมการเงื่อนไขที่กำหนดให้อยู่ในรูปของสมการเส้นตรง ทั้งนี้โดยการเสริมหรือเพิ่มตัวแปรตัวใหม่ที่ได้กำหนดขึ้น ลงในส่วนของอสมการด้านที่อาจจะมีค่าน้อยกว่า ซึ่งตัวแปรที่เพิ่มเติมขึ้นใหม่นี้ เรียกว่า "ตัวแปรเสริม" (slack variable) และตัวแปรเสริมนี้ก็จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เช่นเดียวกันกับตัวแปรที่แท้จริง นั่นคือ มีค่าติดลบไม่ได้เช่นกัน

การแปลงอสมการเงื่อนไขตามตัวแบบกำหนดการตัวอย่างข้างต้น กระทำได้ดังต่อไปนี้

จากอสมการเงื่อนไขที่กำหนด คือ:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 32$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 34$$

แปลงเป็นสมการเงื่อนไขโดยเพิ่มตัวแปรเสริม ในแต่ละอสมการได้เป็นดังนี้:

$$3x_1 + 2x_2 + s_1 = 32$$
$$x_1 + 4x_2 + s_2 = 34$$

โดยที่:

s_1 คือ ตัวแปรเสริม (slack variable) ของอสมการเงื่อนไขที่หนึ่ง

s_2 คือ ตัวแปรเสริม (slack variable) ของอสมการเงื่อนไขที่สอง

จากนี้ถ้านำเงื่อนไขทั้งสอง มาเขียนเป็นสมการในรูปชัดแจ้ง (explicit form) โดยถือเอาตัวแปรเสริมเป็นตัวแปรตาม ก็จะได้สมการเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$s_1 = 32 - 3x_1 - 2x_2$$
$$s_2 = 34 - x_1 - 4x_2$$

อนึ่ง ตัวแปรเสริม s_1 และ s_2 ในโจทย์ตัวอย่างบริษัทเครื่องใช้สำนักงานนี้ สามารถให้ความหมายได้ว่า:

s_1 หมายถึง เวลาที่เหลืออยู่ในโรงงานผลิตชิ้นส่วน

s_2 หมายถึง เวลาที่เหลืออยู่ในโรงงานประกอบผลิตชิ้นส่วน

ดังนั้น การที่ถือเอาตัวแปรเสริม s_1 และ s_2 เป็นตัวแปรตาม ในสมการข้างต้นจึงเป็นการดำเนินการที่ต้องด้วยเหตุผลทุกประการ (เวลาที่เหลือขึ้นอยู่กับเวลาที่ใช้)

เมื่อได้แปลงสมการเงื่อนไขทั้งหมดเรียบร้อยแล้ว ตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้นที่กำลังพิจารณาอยู่ก็จะมีรูปแบบเปลี่ยนไปเป็น:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Maximize} & R = 5x_1 + 6x_2 & (00) \\
\text{subject to:} & s_1 = 32 - 3x_1 - 2x_2 & \\
 & s_2 = 34 - x_1 - 4x_2 & \\
\text{and} & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

จากตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้นข้างต้น ก็จะได้ผลเฉลยที่เป็นไปได้เบื้องต้น (first or initial feasible solution) ดังต่อไปนี้:

ผลเฉลยที่เป็นไปได้เบื้องต้น:

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = 0 & s_1 = 32 \\
x_2 = 0 & s_2 = 34
\end{array}
$$

และที่สุด $R = 0$

หมายเหตุ: ผลเฉลยเบื้องต้นที่ได้นี้เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ เพราะเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดทุกประการ กล่าวคือ เป็นการใช้เวลาในโรงงานต่าง ๆ ไม่เกินกว่าที่กำหนด

ข้อสังเกต: ผลเฉลยเบื้องต้นที่ได้นี้ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ ณ จุด "0" ของวิธีกราฟนั่นเอง

จากผลเฉลยเบื้องต้นที่ได้นี้ จะพบว่า เป็นผลเฉลยที่แสดงถึงสถานะการผลิตที่บริษัทไม่ทำการผลิตทั้งเครื่องคิดเลขและเครื่องพิมพ์ดีด ซึ่งจะมีผลทำให้เวลาที่มีอยู่ในโรงงานผลิตชิ้นส่วนและเวลาที่มีอยู่ในโรงงานประกอบชิ้นส่วนไม่ได้ถูกนำไปใช้แต่อย่างใด นั่นคือ โรงงานทั้งสองจะยังมีเวลาเหลืออยู่เต็มจำนวนดังเดิม และที่สุดบริษัทก็จะไม่มีรายได้ใด ๆ จากการผลิตนี้เลย

ในลำดับนี้ จึงควรที่จะต้องพิจารณาดูว่า บริษัทสมควรที่จะปรับปรุงหรือเปลี่ยนแปลงการผลิตอย่างใดหรือไม่ ทั้งนี้เพื่อให้การผลิตก่อเกิดรายได้สูงสุดตามเป้าหมาย ซึ่งการพิจารณาดังกล่าว ก็คือ การทดสอบความสมบูรณ์ของผลเฉลยที่เป็นไปได้เบื้องต้นนี้นั่นเอง ดังที่จะแสดงให้เห็นในขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 2. ดำเนินการทดสอบความสมบูรณ์ของผลเฉลย:

การทดสอบความสมบูรณ์ของผลเฉลย (test for optimality) แท้ที่จริงแล้วเป็นการทดสอบในลักษณะของการลองผิดลองถูก ว่าผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยที่ดีที่สุดดังต้องการแล้วหรือยัง

สำหรับในที่นี้ การทดสอบอาจกระทำได้โดยการพิจารณาดูว่า การที่บริษัทไม่มีรายได้เลยก็ด้วยเหตุที่ บริษัทไม่ได้ทำการผลิตสินค้าอะไรเลย แต่โดยเหตุที่ บริษัทต้องการผลิตสินค้าให้ได้รายได้สูงสุด ดังนั้นจึงควรพิจารณาดูว่า ถ้าบริษัทได้ผลิตสินค้าอย่างใดขึ้นบ้าง รายได้ของบริษัทจะดีขึ้นหรือไม่อย่างไร ซึ่งการทดสอบดังกล่าวนี้ สามารถกระทำได้ด้วยการสร้างสมการรายได้ให้อยู่ในรูปของจำนวนผลผลิตของสินค้าที่ต้องการทดสอบนั้น ซึ่งในที่นี้ก็คือ การเขียนสมการเป้าหมายให้อยู่ในรูปของตัวแปรต้น x_1 และ x_2 หรือ ในรูปของตัวแปรที่มีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง

ในลำดับนี้จะเห็นได้ว่า สมการเป้าหมายที่อยู่ในรูปของตัวแปรที่มีค่าเป็นศูนย์ (รายได้อยู่ในรูปของจำนวนผลผลิตของสินค้า) ก็คือ สมการเป้าหมายดั้งเดิมที่กำหนด ซึ่งคือ:

$$R = 5x_1 + 6x_2 \qquad (00)$$

จากสมการเป้าหมายข้างต้น พิจารณาได้ว่า ถ้าบริษัทไม่ทำการผลิตสินค้าชนิดใด ๆ เลย ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) บริษัทก็จะไม่มีรายได้เลย ($R = 0$) แต่ถ้าบริษัทผลิตเครื่องคิดเลขแต่ละเครื่อง จะทำให้รายได้เกิดขึ้น 5 ร้อยบาท ในขณะเดียวกัน ถ้าบริษัทผลิตเครื่องพิมพ์ดีดแต่ละเครื่อง จะทำให้เกิดรายได้ขึ้น 6 ร้อยบาท ดังนั้น ผลเฉลยที่เป็นไปได้เบื้องต้นนี้ จึงไม่ใช่ผลเฉลยที่ดีที่สุด ทั้งนี้เพราะ บริษัทสามารถที่จะเพิ่มรายได้ให้มากขึ้นได้ โดยทำการผลิตสินค้าทั้งสองชนิดให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ นั่นคือ ต้องมีการปรับปรุงเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่ดีกว่าต่อไป

ขั้นตอนที่ 3. ดำเนินการปรับปรุงให้ได้ผลเฉลยที่ดีกว่า:

โดยเหตุที่บริษัทต้องการผลิตสินค้าให้ได้รายได้สูงสุด ดังนั้นบริษัทจึงควรที่จะผลิตสินค้าทั้งสองชนิดให้ได้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้เช่นกัน ซึ่งจำนวนผลิตผลจะเป็นเช่นไรนั้น ย่อมขึ้นอยู่กับกำลังผลิตของโรงงานผลิตชิ้นส่วนและโรงงานประกอบชิ้นส่วนเป็นสำคัญ อย่างไรก็ตาม เนื่องจากการผลิตสินค้าทั้งสองชนิดมีความสัมพันธ์ผกผันกัน เพราะต้องใช้เวลาของโรงงานผลิตชิ้นส่วนและโรงงานประกอบชิ้นส่วนร่วมกัน ดังนั้นการปรับปรุงเพื่อให้ได้ผลเฉลยใหม่ที่ดีกว่าเดิมจึงจำเป็นที่จะต้องพิจารณาเสียก่อนว่า ควรทำการผลิตสินค้าชนิดใดก่อนจึงจะเหมาะสมที่สุด ซึ่งในที่นี้จะเห็นว่า ถ้าบริษัทผลิตเครื่องคิดเลขแต่ละเครื่องจะมีรายได้เกิดขึ้น 5 ร้อยบาท ในขณะเดียวกัน ถ้าบริษัทผลิตเครื่องพิมพ์ดีดแต่ละเครื่องจะเกิดรายได้ขึ้น 6 ร้อยบาท ฉะนั้นแล้วบริษัทควรจะผลิตเครื่องพิมพ์ดีดให้มากหน่วยที่สุดก่อน ทั้งนี้เพราะเครื่องพิมพ์ดีดให้รายได้มากกว่า

อนึ่ง การที่จะผลิตเครื่องพิมพ์ดีดแต่ละเครื่องได้นั้น จะต้องทำการผลิตชิ้นส่วนเครื่องพิมพ์ดีดในโรงงานผลิตชิ้นส่วนก่อน แล้วนำไปประกอบในโรงงานประกอบชิ้นส่วนภายหลัง ซึ่งแต่ละโรงงานมีเวลาทำการได้จำกัด ดังนั้น การผลิตเครื่องพิมพ์ดีดก็กระทำได้จำกัดเช่นกัน โดยแต่ละโรงงานจะสามารถทำการผลิตได้ดังนี้:

โรงงานผลิตชิ้นส่วน ผลิตชิ้นส่วนเครื่องพิมพ์ดีดได้: $\frac{32}{2} = 16$ เครื่อง

โรงงานประกอบชิ้นส่วน ประกอบชิ้นส่วนเครื่องพิมพ์ดีดได้: $\frac{34}{4} = 8.5$ เครื่อง

ฉะนั้น บริษัทจึงผลิตเครื่องพิมพ์ดีดได้สำเร็จรูปจริง ๆ เพียง 8.5 เครื่อง (ถึงแม้ว่าจะได้ชิ้นส่วนของเครื่องพิมพ์ดีด 16 เครื่อง แต่ก็ไม่สามารถประกอบให้สำเร็จรูปได้หมด คงมีการประกอบเป็นเครื่องพิมพ์ดีดสำเร็จรูปจริง ๆ ได้เพียง 8.5 เครื่องเท่านั้น) โดยแต่ละโรงงานจะมีเวลาทำการเหลืออยู่บางส่วน ดังนี้:

โรงงานผลิตชิ้นส่วนเหลือเวลา: $s_1 = 32 - 3(0) - 2(8.5) = 15$ ชั่วโมง

โรงงานประกอบชิ้นส่วนเหลือเวลา: $s_2 = 34 - 1(0) - 4(8.5) = 0$ ชั่วโมง

และ บริษัทจะมีรายได้ทั้งหมดเป็น: $R = 5(0) + 6(8.5) = 51$ ร้อยบาท

โดยสรุปแล้ว การปรับปรุงนี้จะทำให้ได้ผลเฉลยที่ดีกว่า อันเป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้อันดับที่สอง (second feasible solution) ดังต่อไปนี้:

ผลเฉลยที่เป็นไปได้อันดับที่สอง:

$$x_1 = 0 \qquad s_1 = 15$$

$$x_2 = 8.5 \qquad s_2 = 0$$

และ $$R = 51$$

ข้อสังเกต: ผลเฉลยอันดับที่สองนี้ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ ณ จุด "D" ของวิธีกราฟนั่นเอง

จากผลเฉลยอันดับที่สองที่ได้นี้ จะพบว่า เป็นผลเฉลยที่แสดงถึงสถานะการผลิตที่บริษัทไม่ผลิตเครื่องคิดเลขเลย แต่ผลิตเครื่องพิมพ์ดีดจำนวน 8.5 เครื่อง ซึ่งจะมีผลทำให้เวลาที่มีอยู่ในโรงงานผลิตชิ้นส่วนเหลืออยู่เพียง 15 ชั่วโมง แต่เวลาที่มีอยู่ในโรงงานประกอบชิ้นส่วนจะถูกนำไปใช้จนหมด และที่สุดบริษัทก็จะมีรายได้เป็นจำนวน 51 ร้อยบาท

อย่างไรก็ตาม ยังไม่ทราบว่ารายได้ 51 ร้อยบาท จะเป็นรายได้ที่สูงที่สุดของบริษัทแล้วหรือยัง ดังนั้นจำเป็นที่จะต้องมีการทดสอบความสมบูรณ์ของผลเฉลย ว่าจะเป็นผลเฉลยที่ดีที่สุดหรือไม่ และจะมีวิถีทางใดที่บริษัทจะเพิ่มรายได้ให้แก่ตัวเองได้บ้าง

ขั้นตอนที่ 4. ดำเนินการย้อนกลับไปตามขั้นตอนที่ 2 และขั้นตอนที่ 3 ต่อไป

4.1) ทดสอบความสมบูรณ์ของผลเฉลยครั้งที่สอง:

เมื่อต้องการทราบว่า รายได้ 51 ร้อยบาท เป็นระดับรายได้ที่สูงที่สุดแล้วหรือยัง และมีวิธีการใดที่จะเพิ่มรายได้อีกหรือไม่นั้น ในที่นี้ บริษัทผลิตเครื่องพิมพ์ดีดแล้ว โดยที่โรงงานประกอบชิ้นส่วนไม่มีเวลาทำการเหลืออยู่เลย เช่นนี้แล้วก็จะทดสอบดูว่า ถ้าจะได้มีการผลิตเครื่องคิดเลขด้วยและให้โรงงานประกอบชิ้นส่วนมีเวลาเหลืออยู่บ้าง บริษัทจะมีรายได้มากขึ้นกว่า 51 ร้อยบาทหรือไม่

ในการนี้กระทำได้โดย การเขียนสมการเป้าหมายให้อยู่ในรูปของตัวแปร x_1 และ s_2 หรือ ในรูปของตัวแปรที่มีค่าเป็นศูนย์เป็นตัวแปรต้นนั่นเอง ทั้งนี้โดยการแทนค่า x_2 ของสมการเป้าหมายในรูป x_1 และ s_2 ซึ่งกระทำได้ดังต่อไปนี้:

จากเงื่อนไขเวลาทำการของโรงงานประกอบชิ้นส่วน:

$$s_2 = 34 - x_1 - 4x_2$$

ดังนั้น

$$x_2 = \frac{34}{4} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}s_2$$

และจากสมการเป้าหมาย:

$$R = 5x_1 + 6x_2$$

แทนค่า x_2 ในสมการเป้าหมาย:

$$R = 5x_1 + 6\left(\frac{34}{4} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}s_2\right)$$

ฉะนั้น

$$R = 51 + \frac{7}{2}x_1 - \frac{3}{2}s_2$$

จากสมการเป้าหมายข้างต้นนี้ จะเห็นได้ว่า การผลิตเครื่องคิดเลข (x_1) แต่ละเครื่องจะทำให้บริษัทมีรายได้เพิ่มขึ้น 7/2 ร้อยบาท และถ้าโรงงานประกอบชิ้นส่วนมีเวลาทำการได้เหลืออยู่ แต่ละชั่วโมงที่มีเวลาเหลืออยู่จะทำให้รายได้ลดลง 3/2 ร้อยบาท ดังนี้แล้วจะวินิจฉัยได้ว่า บริษัทควรที่จะผลิตเครื่องคิดเลขให้ได้มากหน่วยที่สุด เพราะทุกเครื่องที่จะผลิตจะทำให้รายได้ของบริษัทเพิ่มขึ้น ทั้งนี้การที่จะเพิ่มการผลิตนี้ จะต้องผลิตภายใต้กำลังการผลิตที่มีอยู่ด้วย สำหรับโรงงานประกอบชิ้นส่วนนั้น ไม่มีเวลาทำการเหลืออยู่หรือผลิตเต็มกำลังผลิตที่มีอยู่นั้นดีอยู่แล้ว ไม่ควรเปลี่ยนแปลงใด ๆ อีกต่อไป

ดังนั้น บริษัทก็จะผลิตเครื่องคิดเลขให้ได้มากหน่วยที่สุดเท่าที่จะกระทำได้ ซึ่งในการผลิตเครื่องคิดเลขจะต้องใช้กำลังผลิตในโรงงานที่มีอยู่ทั้งสอง โดยเหตุที่ โรงงานผลิตชิ้นส่วนยังมีเวลาทำการเหลืออยู่เพียงพอที่จะผลิตเครื่องคิดเลขได้บ้าง แต่โรงงานประกอบชิ้นส่วนนั้น ไม่มีกำลังผลิตเหลืออยู่เลย เพราะได้ทำการประกอบเครื่องพิมพ์ดีดเสียหมดแล้ว ดังนั้นการที่จะผลิตเครื่องคิดเลขให้ได้นั้น จึงมีอยู่เพียงหนทางเดียว คือ ลดการผลิตเครื่องพิมพ์ดีดลง ทั้งนี้เพื่อให้ได้เวลากลับคืนมาใช้ประกอบเครื่องคิดเลขตามจำนวนที่ต้องการได้

4.2) ปรับปรุงให้ได้ผลเฉลยที่ดีกว่าครั้งที่สอง:

จากที่ทราบว่า การผลิตเครื่องคิดเลขแต่ละเครื่องต้องใช้เวลา 1 ชั่วโมงในโรงงานประกอบชิ้นส่วน แต่การผลิตเครื่องพิมพ์ดีดแต่ละเครื่องจะใช้เวลา 4 ชั่วโมง ดังนั้นทุก ๆ หน่วยที่บริษัทจะทำการผลิตเครื่องคิดเลข บริษัทจะต้องลดการผลิตเครื่องพิมพ์ดีดลง 1/4 เครื่อง เพื่อให้โรงงานประกอบชิ้นส่วนมีเวลาเหลือกลับคืนไป เพื่อผลิตเครื่องคิดเลขที่ต้องการ ซึ่งในการลดการผลิตเครื่องพิมพ์ดีดลงนี้ โรงงานผลิตชิ้นส่วนก็จะลดเวลาที่จะต้องใช้ทำการผลิตชิ้นส่วนของเครื่องพิมพ์ดีดลง ทำให้มีเวลาเหลือกลับคืนไปเป็นจำนวน 2(1/4) = 1/2 ชั่วโมง ทั้งนี้เพราะ เครื่องพิมพ์ดีดแต่ละเครื่องใช้เวลา 2 ชั่วโมง เพื่อผลิตชิ้นส่วนนั้น

ดังนั้น การที่จะผลิตเครื่องคิดเลขแต่ละเครื่อง จะต้องใช้เวลาในแต่ละโรงงาน ดังนี้:

โรงงานผลิตชิ้นส่วน $3 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ ชั่วโมง

โรงงานประกอบชิ้นส่วน 1 ชั่วโมง

โดยเหตุที่การผลิตเครื่องคิดเลขนี้ จะต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขของกำลังผลิตของแต่ละโรงงาน ซึ่งโรงงานผลิตชิ้นส่วนมีกำลังการผลิตว่างเหลืออยู่ 15 ชั่วโมง สำหรับโรงงานประกอบชิ้นส่วน เป็นเพียงการทดแทนการผลิตเท่านั้น เพราะกำลังผลิตทั้งหมดได้ถูกนำไปใช้เต็มที่แล้ว ดังนั้น บริษัทจะสามารถผลิตเครื่องคิดเลขในแต่ละโรงงานได้ในจำนวน ต่อไปนี้

โรงงานผลิตชิ้นส่วนสามารถผลิตชิ้นส่วนเครื่องคิดเลขได้ $\frac{15}{2\frac{1}{2}} = 6$ เครื่อง

โรงงานประกอบชิ้นส่วนสามารถประกอบเครื่องคิดเลขได้ $\frac{34}{1} = 34$ เครื่อง

ฉะนั้น บริษัทจะผลิตเครื่องคิดเลขได้สำเร็จรูปจริง ๆ เพียง 6 เครื่อง (ถึงแม้ว่า โรงงานประกอบชิ้นส่วนจะมีกำลังผลิตในการประกอบเครื่องคิดเลขได้ 34 เครื่อง แต่โรงงานผลิตชิ้นส่วนก็สามารถผลิตชิ้นส่วนเครื่องคิดเลขได้เพียง 6 เครื่อง จึงได้เครื่องคิดเลขที่สำเร็จรูปจริง ๆ เพียง 6 เครื่อง เท่านั้น) โดยแต่ละโรงงานจะไม่มีเวลาทำการเหลืออยู่เลย เพราะได้ใช้เวลาทั้งหมดที่มีอยู่เพื่อการผลิตสินค้าทั้งสองชนิดจนหมดสิ้นแล้ว

อนึ่ง โดยเหตุที่การผลิตเครื่องคิดเลขแต่ละเครื่อง จะต้องลดการผลิตเครื่องพิมพ์ดีดลงจำนวน 1/4 เครื่อง ดังนั้นเมื่อผลิตเครื่องคิดเลข 6 เครื่อง จึงต้องลดการผลิตเครื่องพิมพ์ดีดลงเป็นจำนวน 6(1/4) = 1.5 เครื่อง ซึ่งจะมีผลทำให้การผลิตของเครื่องพิมพ์ดีดคงเหลืออยู่เพียง 8.5 - 1.5 = 7 เครื่องเท่านั้น และที่สุด บริษัทจะมีรายได้ทั้งหมดเป็น

$$R = 5(6) t\ 6(7) = 72 \text{ ร้อยบาท}$$

โดยสรุปแล้ว การปรับปรุงนี้จะทำให้ได้ผลเฉลยที่ดีกว่า อันเป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้อันดับที่สาม (third feasible solution) ดังต่อไปนี้:

ผลเฉลยที่เป็นไปได้อันดับที่สาม:

$$x_1 = 6 \qquad s_1 = 0$$

$$x_2 = 7 \qquad s_2 = 0$$

และ $$R = 72$$

ข้อสังเกต: ผลเฉลยอันดับที่สามนี้ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ ณ ตำแหน่งจุด "E" ของวิธีกราฟนั่นเอง

จากผลเฉลยอันดับที่สามที่ได้นี้ จะพบว่า เป็นผลเฉลยที่แสดงถึงสถานะการผลิตที่บริษัทจะผลิตเครื่องคิดเลขเป็นจำนวน 6 เครื่อง และผลิตเครื่องพิมพ์ดีดจำนวน 7 เครื่อง ซึ่งจะมีผลทำให้เวลาที่มีอยู่ในโรงงานผลิตชิ้นส่วน และเวลาที่มีอยู่ในโรงงานประกอบชิ้นส่วน ถูกนำไปใช้จนหมด และที่สุดบริษัทก็จะมีรายได้เป็นจำนวน 72 ร้อยบาท

ทำนองเดียวกันกับผลเฉลยที่เป็นไปได้อันดับที่สอง บริษัทไม่ทราบว่ารายได้ 72 ร้อยบาทเป็นรายได้ที่สูงที่สุดของบริษัทแล้วหรือยัง ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องมีการทดสอบความสมบูรณ์ของผลเฉลยต่อไป

4.3) *ทดสอบความสมบูรณ์ของผลเฉลยครั้งที่สาม:*

จากผลเฉลยที่เป็นไปได้อันดับที่สาม บริษัทมีรายได้ 72 ร้อยบาท โดยผลิตเครื่องคิดเลข 6 เครื่อง และผลิตเครื่องพิมพ์ดีด 7 เครื่อง อันเป็นผลทำให้ไม่เหลือกำลังผลิตว่างอยู่ในโรงงานผลิตชิ้นส่วนและโรงงานประกอบชิ้นส่วนเลย ในลำดับนี้ จึงเป็นที่น่าสนใจว่าถ้าโรงงานทั้งสองมีกำลังผลิตว่างเหลืออยู่บ้าง บริษัทจะมีรายได้ดีขึ้นกว่า 72 ร้อยบาท หรือไม่

ในการนี้กระทำได้โดย การเขียนสมการเป้าหมายให้อยู่ในรูปของตัวแปร s_1 และ s_2 หรือ ในรูปของตัวแปรที่มีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง ทั้งนี้โดยการแทนค่า x_1 และ x_2 ของสมการเป้าหมายในรูป s_1 และ s_2 ซึ่งกระทำได้ดังต่อไปนี้

จากเงื่อนไขเวลาทำการของโรงงานผลิตชิ้นส่วน:

$$s_1 = 32 - 3x_1 - 2x_2$$

ดังนั้น

$$x_1 = \frac{32}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}s_1 \qquad (1)$$

และจากเงื่อนไขเวลาทำการของโรงงานประกอบชิ้นส่วน:

$$s_2 = 34 - x_1 - 4x_2$$

แทนค่า x_1 จากสมการ (1) ในสมการ s_2 นี้ จะได้:

$$\begin{aligned} s_2 &= 34 - \left(\frac{32}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}s_1\right) - 4x_2 \\ &= \frac{70}{3} + \frac{1}{3}s_1 - \frac{10}{3}x_2 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{3}{10}\left(\frac{70}{3} + \frac{1}{3}s_1 - s_2\right) \\ &= 7 + \frac{1}{10}s_1 - \frac{3}{10}s_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

จากนี้ แทนค่า x_2 จากสมการ (2) นี้ ในสมการ (1) จะได้:

$$x_1 = \frac{a2}{a} - \frac{2}{a}\left(7 + \frac{1}{10}s_1 - \frac{3}{10}s_2\right) - \frac{1}{a}s_1$$

$$= 6 - \frac{2}{5}s_1 + \frac{1}{5}s_2 \qquad (3)$$

และจากสมการเป้าหมาย:

$$R = 5x_1 + 6x_2$$

แทนค่า x_1 และ x_2 จากสมการ (3) และ (2) ในสมการเป้าหมายนี้ จะได้:

$$R = 5\left(6 - \frac{2}{5}s_1 \; t \; \frac{1}{5}s_2\right) \; t \; 6\left(7 + \frac{1}{10}s_1 - \frac{a}{10}s_2\right)$$

ฉะนั้น สมการเป้าหมายในรูปของตัวแปร s_1 และ s_2 คือ:

$$R = 72 - \frac{7}{5}s_1 - \frac{4}{5}s_2$$

จากสมการเป้าหมายข้างต้น พิจารณาได้ว่า บริษัทจะมีรายได้ 72 ร้อยบาท ถ้าโรงงานผลิตชิ้นส่วนและโรงงานประกอบชิ้นส่วน ได้ทำการผลิตเต็มประสิทธิภาพ กล่าวคือ ไม่มีเวลาทำการได้เหลืออยู่เลย ($s_1 = 0$, $s_2 = 0$) แต่ถ้าโรงงานผลิตชิ้นส่วนและโรงงานประกอบชิ้นส่วนมีเวลาทำการได้เหลืออยู่แล้วละก้อ แต่ละชั่วโมงที่มีเวลาเหลืออยู่จะทำให้รายได้ลดลงเป็นจำนวน 7/2 ร้อยบาท และ 4/5 ร้อยบาท ตามลำดับ ดังนั้นแล้วจะวินิจฉัยได้ว่า บริษัทควรที่จะผลิตเครื่องคิดเลขจำนวน 6 เครื่อง และผลิตเครื่องพิมพ์ดีดจำนวน 7 เครื่อง ซึ่งจะมีผลทำให้เวลาที่มีอยู่ในโรงงานผลิตชิ้นส่วนและเวลาที่มีอยู่ในโรงงานประกอบชิ้นส่วน ถูกนำไปใช้จนหมด และที่สุดบริษัทก็จะมีรายได้เป็นจำนวน 72 ร้อยบาท ซึ่งเป็นรายได้ที่สูงที่สุดดังต้องการ

โดยสรุปแล้ว ผลเฉลยที่เป็นไปได้อันดับที่สาม (third feasible solution) ก็คือผลเฉลยที่ดีที่สุดนั่นเอง

ขั้นตอนที่ 5. สรุปผลเฉลย:

จากการที่ได้ทดสอบและปรับปรุงผลเฉลยที่เป็นไปได้ (feasible solution) มาโดยลำดับ วินิจฉัยได้ว่า วิธีการจัดสรรการผลิตที่ดีที่สุด (optimal solution) สำหรับบริษัทเครื่องใช้สำนักงานแห่งนี้ ก็คือ บริษัทควรผลิตเครื่องคิดเลขจำนวน 6 เครื่อง และผลิตเครื่องพิมพ์ดีดจำนวน 7 เครื่อง ซึ่งจะมีผลทำให้บริษัทมีรายได้ทั้งสิ้น 7,200 บาท

สรุปผลเฉลยที่ดีที่สุด (optimal solution):

ผลิตเครื่องคิดเลข (x_1) จำนวน	6	เครื่อง
ผลิตเครื่องพิมพ์ดีด (x_2) จำนวน	7	เครื่อง
รายได้สูงสุด	7,200	บาท

2.3 การหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพลกซ์:

การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีซิมเพลกซ์ (simplex method) เป็นวิธีการหาผลเฉลยโดยหลักของการแก้สมการทางพีชคณิตเช่นเดียวกันกับ วิธีพีชคณิต (algebraic method) ที่ได้กล่าวมาแล้วนั่นเอง แต่แตกต่างกันที่วิธีซิมเพลกซ์นี้ เป็นวิธีการแก้สมการในรูปของตารางสำเร็จรูป ซึ่งสมาชิก (element) ในตารางแต่ละตัวได้มาจากรูปแบบสำเร็จที่ได้คำนวณไว้แล้ว โดยรูปแบบสำเร็จนี้ แท้ที่จริงก็ได้มาจากการสังเกตการคำนวณทางพีชคณิตแล้วนำมาสรุปสร้างเป็นตารางและสูตรสำเร็จนั่นเอง

การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีซิมเพลกซ์ เป็นวิธีการหาผลเฉลยที่วิวัฒนามาจากวิธีพีชคณิต โดยแรกเริ่มเมื่อปี ค.ศ.1947 ท่านผู้รู้ซึ่งมีนามว่า George B. Dantzig[1] ได้พัฒนาวิธีการทางพีชคณิตจากระบบสมการมาแสดงในรูปของตาราง ต่อมาผู้รู้อีกท่านหนึ่งนามว่า William J. Baumol[2] ได้พัฒนาวิธีการหาผลเฉลยในลักษณะของตารางสำเร็จรูป โดยมีสูตรสำเร็จที่สามารถใช้คำนวณหาค่าสมาชิกต่าง ๆ ในตารางได้รวดเร็วยิ่งขึ้น และต่อ ๆ มาวิธีซิมเพลกซ์นี้ ก็ได้รับการพัฒนาจากท่านผู้รู้อีกหลายท่าน จนสามารถใช้ได้กับปัญหาของกำหนดการเชิงเส้นที่มีรูปแบบหลากหลายในปัจจุบัน

อนึ่ง โดยเหตุที่การหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพลกซ์ เป็นวิธีการหาผลเฉลยโดยหลักของการแก้สมการทางพีชคณิตเช่นเดียวกันกับวิธีพีชคณิต ดังนั้นการหาผลเฉลยจึงดำเนินการเบื้องต้นเช่นเดียวกับวิธีพีชคณิตเช่นกัน กล่าวคือ เริ่มจากการหาผลเฉลยที่เป็นไปได้เบื้องต้น (initial feasible solution) จากนี้ก็ดำเนินการทดสอบความสมบูรณ์ (test for optimality) เพื่อให้ทราบว่า ผลเฉลยที่ได้เบื้องต้นนี้เป็นผลเฉลยที่ดีที่สุดแล้วหรือยัง ถ้าการทดสอบแสดงให้เห็นว่าผลเฉลยที่ได้ไม่ใช่ผลเฉลยที่ดีที่สุด ก็ดำเนินการปรับปรุงให้ได้ผลเฉลยที่ดีกว่าต่อไป ทำเช่นนี้ซ้ำกันไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งผลการทดสอบได้แสดงให้เห็นว่า ผลเฉลยที่ได้ท้ายสุดนี้เป็นผลเฉลยที่ดีที่สุด นั่นคือ ไม่มีวิธีปรับปรุงใด ๆ ที่จะนำไปสู่ผลเฉลยที่ดีกว่านี้อีกแล้ว ผลเฉลยสุดท้ายนี้ก็จะคือผลเฉลยที่ดีที่สุด (optimal solution) นั่นเอง

ในลำดับนี้ เพื่อให้เข้าใจการหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น โดยวิธีซิมเพลกซ์ได้ถูกต้องชัดเจนยิ่งขึ้น จะขอยกตัวอย่างประกอบการพิจารณาโดยลำดับ ดังต่อไปนี้

---

[1] George B. Dantzig, *Linear Programming* and Extensions (Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1963)

[2] William J. Baumol, *Economic Theory and Operation Analysis* 2d ed.,(Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall Inc.,1965) Chap. 5

ก) กรณีต้องการค่าสูงสุด (maximization):

ตัวอย่าง 2-5: การหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพลกซ์ กรณีต้องการค่าสูงสุด:

ในชั้นนี้ ขอแสดงจากโจทย์ ตัวอย่าง 2-1 (ตัวอย่างบริษัทเครื่องใช้สำนักงาน) ซึ่งเคยแสดงเป็นตัวอย่างของการหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟและวิธีพีชคณิตมาแล้ว (ตัวอย่าง 2-2 และ ตัวอย่าง2-4) ซึ่งตัวอย่างดังกล่าวมีตัวแบบของกำหนดการ ดังนี้:

Maximize	$R = 5x_1 + 6x_2$	:รายได้ (หน่วยร้อยบาท)
subject to:	$3x_1 + 2x_2 \leq 32$	:โรงงานผลิตชิ้นส่วน
	$x_1 + 4x_2 \leq 34$	:โรงงานประกอบชิ้นส่วน
and	$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	

โดยที่: x_1 = จำนวนการผลิตเครื่องคิดเลข

x_2 = จำนวนการผลิตเครื่องพิมพ์ดีด

วิธีการ:

การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีซิมเพลกซ์[1] อาจดำเนินการเป็นลำดับขั้นตอนได้ดังต่อไปนี้:

ขั้นตอนที่ 1. ดำเนินการหาผลเฉลยที่เป็นไปได้เบื้องต้น จากเงื่อนไขที่กำหนด:

การหาผลเ... ที่เป็นไปได้เบื้องต้น (initial feasible solution) อาจ

---

[1] การหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพลกซ์ในที่นี้ จะดำเนินการในลักษณะของตารางสำเร็จรูปตามรูปแบบของ William J. Baumol ดังที่ได้อ้างไว้แล้ว

เริ่มกระทำได้โดย การแปลงอสมการเงื่อนไขที่กำหนดให้อยู่ในรูปของสมการเส้นตรงเช่นเดียวกับวิธีพีชคณิต ทั้งนี้ โดยการเพิ่มตัวแปรเสริม (slack variables) ลงในส่วนของอสมการด้านที่อาจจะมีค่าน้อยกว่า (น้อยกว่าหรือเท่ากับ) ซึ่งจะได้สมการเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$3x_1 + 2x_2 + s_1 = 32$$
$$x_1 + 4x_2 + s_2 = 34$$

โดยที่

s_1 คือ ตัวแปรเสริมของอสมการเงื่อนไขที่หนึ่ง ซึ่งหมายถึงเวลาที่เหลืออยู่ในโรงงานผลิตชิ้นส่วน

s_2 คือ ตัวแปรเสริมของอสมการเงื่อนไขที่สอง ซึ่งหมายถึงเวลาที่เหลืออยู่ในโรงงานประกอบผลิตชิ้นส่วน

จากนี้ถ้านำเงื่อนไขทั้งสอง มาเขียนเป็นสมการในรูปชัดแจ้ง (explicit form) โดยถือเอาตัวแปรเสริมเป็นตัวแปรตาม ก็จะได้สมการเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$s_1 = 32 - 3x_1 - 2x_2$$
$$s_2 = 34 - x_1 - 4x_2$$

อนึ่ง การจัดรูปแบบของสมการเงื่อนไขใหม่นี้ มีเจตนาเพื่อให้เห็นโดยชัดเจนว่า ค่าของตัวแปรเสริมด้านซ้ายมือ จะเท่ากับค่าคงที่ด้านขวามือ เมื่อตัวแปร x_1 และ x_2 มีค่าเป็นศูนย์

สำหรับสมการเป้าหมายอาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$R = 0 + 5x_1 + 6x_2 \qquad (00)$$

สมการเป้าหมายข้างต้นนี้ มีค่าคงที่ศูนย์เพิ่มเติมเข้ามาทางด้านขวามือ ทั้งนี้ก็เพื่อให้การพิจารณาเด่นชัดยิ่งขึ้น นั่นคือ ค่าของเป้าหมายจะเป็นศูนย์เมื่อค่าของ x_1 และ x_2 เป็นศูนย์

ในที่สุด เมื่อนำสมการที่ได้จัดรูปใหม่ทั้งหมดมารวมกัน ก็จะได้รูปแบบของกำหนดการเชิงเส้นใหม่ ซึ่งมีรูปแบบเช่นเดียวกันกับวิธีพีชคณิต ดังต่อไปนี้:

รูปแบบของกำหนดการเชิงเส้นใหม่:

Maximize	$R = 0 + 5x_1 + 6x_2$	(00)
subject to:	$s_1 = 32 - 3x_1 - 2x_2$	
	$s_2 = 34 - x_1 - 4x_2$	
and	$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0$	

จากตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้นข้างต้น เมื่อนำสมการต่างๆ ลงเขียนในตาราง โดยเขียนเฉพาะสัมประสิทธิ์ของตัวแปรและค่าคงที่ของสมการไว้ภายในตาราง และเขียนตัวแปรทั้งหมดไว้ขอบตาราง ก็จะได้ตารางซิมเพลกซ์เบื้องต้น (initial simplex Tableau) ดังนี้:

ตารางที่ 1: ตารางซิมเพลกซ์เบื้องต้น (ผลเฉลยที่เป็นไปได้เบื้องต้น)

	constants	x_1	x_2 ↓	
R	0	5	6	(00)
s_1	32	-3	-2	32/2 = 16
s_2	34	-1	-4	34/4 = 0.5 //

ข้อสังเกต: ตารางนี้เป็นผลเฉลยเบื้องต้นเช่นเดียวกันกับผลเฉลยเบื้องต้นของวิธีพีชคณิต และเป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ ณ ตำแหน่งจุด "0" ของวิธีกราฟนั่นเอง

อนึ่ง ในตารางซิมเพลกซ์นั้น ตัวแปรซึ่งปรากฏอยู่ที่ขอบตารางด้านซ้ายและเรียงลำดับกันอยู่ในรูปแถวนอน (row tables) จะประกอบด้วย ตัวแปรเป้าหมาย และกลุ่มตัวแปรที่เรียกกันว่า ตัวแปรฐาน (basic variables) สำหรับค่าคงที่และตัวแปรซึ่งปรากฏอยู่ที่ขอบตารางด้านบนและเรียงลำดับกันอยู่ในรูปแถวตั้ง (column tables) จะประกอบด้วย ค่าคงที่ และกลุ่มตัวแปรที่เรียกว่า ตัวแปรศูนย์ (zero variables) ซึ่งค่าของตัวแปรฐาน จะคือ ค่าที่ปรากฏอยู่ในช่องแถวตั้งค่าคงที่ (ที่อยู่ในแถวนอนเดียวกัน) สำหรับค่าของตัวแปรศูนย์ ก็จะมีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง (สมาชิกที่อยู่ในแถวนอนแรกหรือแถวนอนเป้าหมายนั้น ไม่ใช่ค่าของตัวแปรศูนย์ แต่เป็นค่าของเป้าหมายและค่าของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรศูนย์ในสมการเป้าหมาย) นอกจากนี้ยังอาจสังเกตเห็นได้ว่า ตัวแปรฐานจะมีจำนวนเท่ากับจำนวนสมการเงื่อนไขหรือเท่ากับตัวแปรเสริมพอดี ในขณะเดียวกัน ตัวแปรศูนย์ก็จะมีจำนวนเท่ากับจำนวนของตัวแปรตามของสมการ

โดยสรุปแล้ว:

1) ตัวแปรที่อยู่ด้านสมาชิกแถวนอน (row element) ซึ่งมีค่าผลเฉลยเป็นไปตามค่าที่ปรากฏอยู่ในช่องแถวตั้งค่าคงที่ (constants column) แต่จะไม่เป็นลบและปกติไม่เป็นศูนย์[4] เรียกว่า ตัวแปรฐาน (basic variables) และถ้าพิจารณาในรูปของสมการแล้ว ตัวแปรฐานนี้ ก็คือ ตัวแปรตาม (dependent variables) ของสมการ: ในตารางที่ 1 คือ ตัวแปร s_1 และ s_2
2) ตัวแปรที่อยู่ด้านสมาชิกแถวตั้ง (column element) ซึ่งมีค่าผลเฉลยเป็นศูนย์ เรียกว่า ตัวแปรศูนย์ (zero variables) ซึ่งถ้าพิจารณาในรูปของสมการ ตัวแปรศูนย์นี้ ก็คือ ตัวแปรต้น (independent variables) ในสมการนั้นนั่นเอง: ในตารางที่ 1 คือ ตัวแปร x_1 และ x_2
3) ตัวแปรฐาน จะมีจำนวนเท่ากับจำนวนสมการเงื่อนไข หรือเท่ากับตัวแปรเสริม สำหรับตัวแปรศูนย์ จะมีจำนวนเท่ากับจำนวนของตัวแปรตามของสมการพอดี ๆ

---

[4] บางกรณี ตัวแปรฐานก็อาจจะมีค่าเป็นศูนย์ได้ แต่เป็นกรณีพิเศษซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

จากตารางที่ 1 ข้างต้น จะได้ผลเฉลยที่เป็นไปได้เบื้องต้น ดังนี้คือ:

$$x_1 = 0 \qquad s_1 = 32$$

$$x_2 = 0 \qquad 9_2 = 34$$

และ $$R = o$$

จากผลเฉลยเบื้องต้นที่ได้นี้ จะพบว่า เป็นผลเฉลยที่แสดงถึงสถานะการผลิตที่บริษัทไม่ทำการผลิตทั้งเครื่องคิดเลขและเครื่องพิมพ์ดีด ซึ่งจะมีผลทำให้เวลาที่มีอยู่ในโรงงานผลิตชิ้นส่วนและเวลาที่มีอยู่ในโรงงานประกอบชิ้นส่วนไม่ได้ถูกนำไปใช้แต่อย่างใด นั่นคือ โรงงานทั้งสองจะยังมีเวลาเหลืออยู่เต็มจำนวนดังเดิม และที่สุดบริษัทก็จะไม่มีรายได้ใด ๆ จากการผลิตนี้เลย

โดยคณิตศาสตร์:

$$s_1 = 32 - 3x_1 - 2x_2 = 32 \qquad (x_1 = 0,\ x_2 = 0)$$

$$s_2 = 34 - x_1 - 4x_2 = 34 \qquad (x_1 = 0,\ x_2 = 0)$$

และ $$R = 0 + 5x_1 + 6x_2 = 0 \qquad (x_1 = 0,\ x_2 = 0)$$

ในลำดับนี้ จึงควรที่จะต้องพิจารณาดูว่า บริษัทสมควรที่จะปรับปรุงหรือเปลี่ยนแปลงการผลิตอย่างใดหรือไม่ ทั้งนี้เพื่อให้การผลิตก่อเกิดรายได้สูงสุดตามเป้าหมาย ซึ่งการพิจารณาดังกล่าว ก็คือ การทดสอบความสมบูรณ์ของผลเฉลยที่เป็นไปได้เบื้องต้นนี้นั่นเอง ดังที่จะแสดงให้เห็นในขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 2. ดำเนินการทดสอบความสมบูรณ์ของผลเฉลย:

การทดสอบความสมบูรณ์ของผลเฉลย (test for optimality) แท้ที่จริงแล้วเป็นการทดสอบในลักษณะของการลองผิดลองถูก ว่าผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยที่ดีที่สุดดังต้องการแล้วหรือยัง เช่นเดียวกันกับวิธีพีชคณิตนั่นเอง

สำหรับในที่นี้ การทดสอบอาจกระทำได้โดยการพิจารณาดูว่า การที่บริษัทไม่มีรายได้เลย ก็ด้วยเหตุที่ บริษัทไม่ได้ทำการผลิตสินค้าอะไรเลย แต่โดยเหตุที่ บริษัทต้องการผลิตสินค้าให้ได้รายได้สูงสุด ดังนั้นจึงควรพิจารณาดูว่า ถ้าบริษัทได้ผลิตสินค้าอย่างใดขึ้นบ้าง รายได้ของบริษัทจะดีขึ้นหรือไม่อย่างไร ซึ่งการทดสอบดังกล่าวนี้ สามารถกระทำได้ด้วยการสร้างสมการรายได้ให้อยู่ในรูปของจำนวนผลผลิตของสินค้าที่ต้องการทดสอบนั้น ซึ่งในที่นี้ก็คือ การเขียนสมการเป้าหมายให้อยู่ในรูปของตัวแปรต้น x_1 และ x_2 หรือ ในรูปของตัวแปรที่มีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง

ในที่นี้จะเห็นได้ว่า สมการเป้าหมายที่อยู่ในรูปของตัวแปรที่มีค่าเป็นศูนย์ (รายได้อยู่ในรูปของจำนวนผลผลิตของสินค้า) ก็คือ สมการเป้าหมายที่กำหนดแต่เดิม ซึ่งคือ:

$$R = 0 + 6x_1 + 6x_2 \tag{00}$$

และสมการเป้าหมายนี้ ก็ได้ปรากฏเป็นสมการในแถวนอนแรกของตารางซิมเพลกซ์แล้วนั่นเอง

จากสมการเป้าหมายข้างต้น พิจารณาได้ว่า ถ้าบริษัทไม่ทำการผลิตสินค้าชนิดใด ๆ เลย ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) บริษัทก็จะไม่มีรายได้เลย ($R = 0$) แต่ถ้าบริษัทผลิตเครื่องคิดเลขแต่ละเครื่อง จะทำให้รายได้เกิดขึ้น 5 ร้อยบาท ในขณะเดียวกัน ถ้าบริษัทผลิตเครื่องพิมพ์ดีดแต่ละเครื่อง จะทำให้เกิดรายได้ขึ้น 6 ร้อยบาท ดังนั้น ผลเฉลยที่เป็นไปได้เบื้องต้นนี้ จึงไม่ใช่ผลเฉลยที่ดีที่สุด ทั้งนี้เพราะ บริษัทสามารถที่จะเพิ่มรายได้ให้มากขึ้นได้ โดยทำการผลิตสินค้าทั้งสองชนิดให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ นั่นคือ ต้องมีการปรับปรุงเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่ดีกว่าต่อไป

ขั้นตอนที่ 3. ดำเนินการปรับปรุงให้ได้ผลเฉลยที่ดีกว่า:

โดยเหตุที่บริษัทต้องการผลิตสินค้าให้ได้รายได้สูงสุด ดังนั้นบริษัทจึงควรที่จะผลิตสินค้าทั้งสองชนิดให้ได้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้เช่นกัน ซึ่งจำนวนผลิตผลจะเป็นเช่นไรนั้น ย่อมขึ้นอยู่กับกำลังผลิตของโรงงานผลิตชิ้นส่วนและโรงงานประกอบชิ้นส่วนเป็นสำคัญ อย่างไรก็ตาม

เนื่องจากการผลิตสินค้าทั้งสองชนิดมีความสัมพันธ์ผกผันกัน เพราะต้องใช้เวลาของโรงงานทั้งสองนั้นร่วมกัน ดังนั้นการปรับปรุงเพื่อให้ได้ผลเฉลยใหม่ที่ดีกว่าเดิม จึงจำเป็นที่จะต้องพิจารณาเสียก่อนว่า ควรทำการผลิตสินค้าชนิดใดก่อนจึงจะเหมาะสมที่สุด ซึ่งในที่นี้จะเห็นว่า ถ้าบริษัทผลิตเครื่องคิดเลขแต่ละเครื่องจะมีรายได้เกิดขึ้น 5 ร้อยบาท ในขณะเดียวกัน ถ้าบริษัทผลิตเครื่องพิมพ์ดีดแต่ละเครื่องจะทำให้เกิดรายได้ขึ้น 6 ร้อยบาท ฉะนั้นแล้ว บริษัทควรจะพิจารณาผลิตเครื่องพิมพ์ดีดให้มากหน่วยที่สุดก่อน ทั้งนี้เพราะเครื่องพิมพ์ดีดให้รายได้มากกว่า

โดยวิธีการหาผลเฉลยแบบตารางซิมเพลกซ์ การพิจารณาในลักษณะพีชคณิตข้างต้นนี้ แท้ที่จริงสามารถกระทำได้โดยง่าย กล่าวคือ สามารถพิจารณาได้จากค่าของสมาชิกในตารางซึ่งอยู่ในแถวนอนสมการเป้าหมาย (แถวนอนแรกของตาราง) โดยพิจารณาดูว่า ในกลุ่มของสมาชิกในแถวนอนแรกนี้มีสมาชิกใดบ้างซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรศูนย์และมีค่าเป็นบวก ให้เลือกตัวแปรซึ่งมีสัมประสิทธิ์ที่มีค่าเป็นบวกนั้นเป็นตัวแปรที่จะให้มีค่าต่อไป ทั้งนี้เพราะว่า ตัวแปรซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์เป็นบวก จะสามารถทำให้เป้าหมายมีค่าเพิ่มขึ้นเท่ากับค่าของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวนั้นนั่นเอง (ถ้าตัวแปรใดมีสัมประสิทธิ์เป็นลบ ค่าของตัวแปรนั้นจะทำให้เป้าหมายมีค่าลดลง) อนึ่ง ถ้าตัวแปรศูนย์ที่มีค่าสัมประสิทธิ์เป็นบวกมีหลายตัว ให้เลือกตัวแปรซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์ที่มีค่าเป็นบวกสูงที่สุด เพราะจะทำให้เป้าหมายมีค่าเพิ่มขึ้นเร็วที่สุด

จาก ตารางที่ 1 จะเห็นว่า x_2 เป็นตัวแปรศูนย์ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์ที่มีค่าบวกสูงสุด (+6) จึงเลือกดำเนินการให้ x_2 มีค่ามากที่สุดเท่าที่จะทำได้ต่อไป (ผลิตเครื่องพิมพ์ดีดในจำนวนที่สูงที่สุด) ในที่นี้ได้เขียนลูกศร "↓" เป็นที่สังเกตไว้เหนือแถวตั้งตัวแปร x_2 ในตารางด้วยแล้ว (อาจขีดเส้นกำกับไว้ด้วยก็ได้) และขอเรียกแถวตั้งนี้ว่า "แถวตั้งหลัก" (pivot column)

ในลำดับนี้ จะพิจารณาต่อไปว่า x_2 จะมีค่าได้มากที่สุดเท่าใด ซึ่งการพิจารณาในเรื่องนี้กระทำได้โดยง่าย ด้วยการนำสมาชิกที่อยู่ในแถวตั้งหลัก เฉพาะตัวที่เป็นลบ อันได้แก่ -2 และ -4 (ตัวที่เป็นลบจะหมายถึง การใช้เวลาในแต่ละโรงงานเพื่อการผลิต x_2 แต่ละหน่วย) แต่ได้เปลี่ยนเครื่องหมายแล้ว คือ -2 และ -4 เปลี่ยนเป็น 2 และ 4 ไปหารค่าคงที่ตัวที่อยู่ใน