บทที่ 2
กำหนดการเชิงเส้น
(Linear Programming)

บทที่ 2
กำหนดการเชิงเส้น
(Linear Programming)

เค้าโครงเรื่อง :

1. ความทั่วไป
   - 1.1 ความหมาย
   - 1.2 โครงสร้างองค์ประกอบของกำหนดการเชิงเส้น
   - 1.3 ข้อสมมุติของกำหนดการเชิงเส้น
   - 1.4 รูปแบบของกำหนดการเชิงเส้นทางคณิตศาสตร์
   - 1.5 การสร้างตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้น
2. การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น
   - 2.1 การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ
   - 2.2 การหาผลเฉลยโดยวิธีพีชคณิต
   - 2.3 การหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพลกซ์
3. ทวิภาวะของกำหนดการเชิงเส้น
   - 3.1 การสร้างปัญหาควบคู่
   - 3.2 การพิจารณาและตีความปัญหาควบคู่

4. รูปแบบพิเศษของกำหนดการเชิงเส้น
   - 4.1 กรณีเงื่อนไขผสม
   - 4.2 กรณีตัวแปรผลเฉลยเป็นศูนย์
   - 4.3 กรณีหลายผลเฉลย
   - 4.4 กรณีผลเฉลยมีค่าไม่จำกัด
   - 4.5 กรณีหาผลเฉลยไม่ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อศึกษาเรื่องกำหนดการเชิงเส้นนี้จบแล้ว นักศึกษาสามารถ :

1. อธิบายความหมายและทราบถึงประโยชน์ของกำหนดการเชิงเส้นโดยถูกต้อง
2. อธิบายโครงสร้างทั่วไป โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ และเข้าใจเงื่อนไขในการนำวิธีการของกำหนดการเชิงเส้นไปประยุกต์ใช้ได้
3. อธิบายวิธีการหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีกราฟ วิธีพีชคณิต และวิธีซิมเพลกซ์ได้
4. สร้างกำหนดการควบคู่จากกำหนดการเบื้องต้น และสามารถให้ความหมายหรือตีความปัญหาควบคู่ได้
5. อธิบายลักษณะปัญหาพิเศษกรณีต่าง ๆ ของปัญหากำหนดการเชิงเส้น และสามารถปรับปรุงแก้ไขเพื่อให้หาผลเฉลยได้โดยถูกต้อง
6. ประยุกต์ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกำหนดการเชิงเส้นนี้ เข้ากับเหตุการณ์ปัจจุบันได้อย่างถูกต้อง

บทที่ 2
กำหนดการเชิงเส้น
(Linear Programming)

1. ความทั่วไป:

การศึกษาเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์ โดยปกติแล้วจะเป็นเรื่องเกี่ยวกับ การจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดให้ก่อเกิดประโยชน์หรือประสิทธิภาพสูงสุดเป็นสำคัญ ในการนี้เศรษฐศาสตร์ได้นำเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ อันเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด มาประยุกต์ใช้กับเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์ดังกล่าวเป็นจำนวนมาก ซึ่งแต่ละลักษณะวิธีการก็จะเหมาะสมกับเรื่องราวต่าง ๆ ที่ผิดแผกกันไป กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming) เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ลักษณะหนึ่ง ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์เรื่องราวเกี่ยวกับการจัดสรรนี้ได้ และเป็นเครื่องมือที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน ในลำดับนี้จึงขอกล่าวถึงเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเรียกว่า "กำหนดการเชิงเส้น" ดังกล่าวนี้ให้เป็นที่เข้าใจกันดังต่อไปนี้

1.1 ความหมาย:

กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming) คือ วิธีการทางคณิตศาสตร์เพื่อหาจุดเหมาะสมที่สุด (optimality : ค่าสูงสุดหรือต่ำสุด) ของเป้าหมายที่กำหนดไว้ ภายใต้ภาวะการณ์หรือเงื่อนไขบางประการ ซึ่งเป้าหมายจะต้องแสดงอยู่ในรูปของสมการเส้นตรง(linear equations) สำหรับเงื่อนไขนั้น อาจจะอยู่ในรูปของสมการและ/หรืออสมการเส้นตรงก็ได้

จากความหมายข้างต้นนี้ จะเห็นได้ว่าปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ใด ๆ ที่เขียนเป็นสมการเส้นตรงได้ ย่อมสามารถหาคำตอบที่สมเหตุสมผลได้ด้วยวิธีการของกำหนดการเชิงเส้น

อย่างไรก็ตาม เศรษฐศาสตร์มักนำวิธีการของกำหนดการเชิงเส้นนี้ ไปเป็นเครื่องมือใน

การจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด ในอันที่จะให้ได้ประโยชน์สูงสุดเป็นสำคัญ ซึ่งส่วนใหญ่มักเป็นเรื่องเกี่ยวกับ ปัญหาการตัดสินใจทางการผลิต โดยสรุปดังนี้:

1) เลือกสรรวิธีการผลิตที่เหมาะสม สำหรับการผลิตสินค้าชนิดใดชนิดหนึ่ง เมื่อกรรมวิธีการผลิตนั้นมีอยู่หลายวิธี

2) จัดสรรเครื่องมือเครื่องจักรที่ใช้ทำการผลิต โดยเครื่องมือนั้นสามารถทำการผลิตสินค้าได้หลายชนิด แต่มีประสิทธิภาพจำกัด

3) เลือกสรรส่วนประสมของปัจจัยการผลิต เพื่อให้ผลผลิตอยู่ในเกณฑ์มาตรฐานที่กำหนดไว้

1.2 โครงสร้างองค์ประกอบของกำหนดการเชิงเส้น:

โครงสร้างองค์ประกอบของกำหนดการเชิงเส้น (elements of linear programming) อาจแบ่งเป็นส่วนที่สำคัญได้ 3 ส่วนด้วยกัน คือ:

1) ส่วนเป้าหมาย

ส่วนเป้าหมาย (objective) แสดงถึง วัตถุประสงค์และจุดหมายปลายทางของกำหนดการ ว่าต้องการหาค่าสูงสุด (maximize) หรือค่าต่ำสุด (minimize) ทั้งนี้ต้องเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเส้นตรง (linear equation)

2) ส่วนเงื่อนไข

ส่วนเงื่อนไข (side constraints or restrictions) แสดงถึง ขีดจำกัดของปัจจัยแต่ละชนิด ซึ่งอาจจะเขียนให้อยู่ในรูปสมการ และ/หรืออสมการเส้นตรงก็ได้

3) ส่วนตัวแปร

ส่วนตัวแปร (decision variables) แสดงถึง ตัวแปรซึ่งเป็นค่าผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น ว่าประกอบด้วยตัวแปรอะไรบ้าง และแสดงถึงเงื่อนไขของค่าตัวแปรด้วยว่า จะต้องเป็นค่าบวกเสมอ จะเป็นค่าในทางลบไม่ได้ (non-negative)

1.3 ข้อสมมุติของกำหนดการเชิงเส้น:

กระบวนวิธีทางคณิตศาสตร์ของกำหนดการเชิงเส้น จะเป็นไปได้ก็โดยที่ กำหนดการที่สร้างขึ้นนั้น จะต้องอยู่ภายใต้ข้อตกลง และเงื่อนไข อันเป็นข้อสมมุติทางคณิตศาสตร์ของกำหนดการเชิงเส้น (assumptions of linear programming) ต่อไปนี้:

1) เชิงเส้นและรวมกันได้

เชิงเส้นและรวมกันได้ (linearity and additivity) หมายความถึง สมการเป้าหมายและเงื่อนไขในกำหนดการ ต้องสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเส้นตรง และสมการเหล่านั้นจะต้องรวมกันได้ นั่นคือ ค่าของตัวแปรตามจะต้องขึ้นอยู่กับสัมประสิทธิ์ของตัวแปรอิสระโดยตรง และสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวเดียวกันแต่อยู่ต่างสมการกันต้องรวมกันได้

: ถ้าสมการไม่เป็นเส้นตรง ต้องใช้วิธีที่เรียกว่า "Nonlinear Programming"

2) รูปส่วนย่อยและต่อเนื่อง

รูปส่วนย่อยและต่อเนื่อง (divisibility and continuity) หมายถึง ตัวแปรทุกตัวในกำหนดการ จะต้องสามารถมีค่าในรูปส่วนย่อย ๆ ได้ (divisibility) และค่าเหล่านั้นต้องเป็นค่าที่ต่อเนื่อง (continuity) ซึ่งอาจอยู่ในรูปเศษส่วน (fractional) หรือทศนิยมได้ด้วย

: ถ้าตัวแปรต้องเป็นจำนวนเต็ม ต้องใช้วิธีที่เรียกว่า "Integer Programming"

3) จำกัดและแน่นอน

จำกัดและแน่นอน (finite) หมายถึง ค่าคงที่ของสมการจะต้องมีค่าจำกัด และค่าจำกัดนั้นทราบค่าแน่นอนแล้ว (ทรัพยากรต้องมีจำนวนจำกัด)

: ถ้าทรัพยากรมีไม่จำกัด ก็คงไม่จำเป็นต้องใช้กำหนดการเชิงเส้นหรือวิธีใด ๆ เลย

4) คงที่แน่นอนและเชิงสถิต

คงที่แน่นอน (certainty) หมายถึง สัมประสิทธิ์ของตัวแปรทุกตัวจะต้องเป็นค่าคงที่ และค่าคงที่นั้นทราบค่าแน่นอนแล้ว อันเป็นการวิเคราะห์เชิงสถิตในขณะใดขณะหนึ่ง (static time period) นั่นเอง (ประสิทธิภาพของปัจจัย ต้องคงที่ไม่เปลี่ยนไปตามเวลา)

: ถ้าสัมประสิทธิ์เปลี่ยนแปลงได้ ต้องใช้วิธีที่เรียกว่า "Sensitivity Analysis"

1.4 รูปแบบของกำหนดการเชิงเส้นทางคณิตศาสตร์:

รูปแบบของกำหนดการเชิงเส้นทางคณิตศาสตร์ (mathematical formulation of linear programming) ซึ่งเป็นรูปแบบทั่วไปที่แสดงโดยสัญลักษณ์คณิตศาสตร์นั้น อาจแสดงได้โดย สมมุติว่า กำหนดการทั่วไปนี้ ประกอบด้วย ตัวแปร n ตัว และมี m เงื่อนไข ดังนี้:

1.4.1 กรณีการหาค่าสูงสุด (maximization):

Maximize

$$R = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq c_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq a_m$$

and

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0$$

โดยที่:

a_{ij}, c_i, p_j = ค่าคงที่

x_j = ตัวแปรซึ่งเป็นผลเฉลย

m = จำนวนเงื่อนไข

n = จำนวนตัวแปร

หรือ อาจเขียนโดยย่อได้เป็น:

Maximize $$R = \sum_{j=1}^{n} p_jx_j$$

subject to $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq c_i$ (for $i = 1, 2, \ldots, m$)

and $x_j \geq 0$ (for $j = 1, 2, \ldots, n$)

โดย Σ = Greek letter capital sigma หมายถึง "ผลรวมของ"

1.4.2 **กรณีการหาค่าต่ำสุด** (minimization):

ทำนองเดียวกันกับกรณีการหาค่าสูงสุด รูปแบบทางคณิตศาสตร์ของ กรณีการหาค่าต่ำสุด อาจเขียนได้เป็น:

Minimize

$$Z = c_1y_1 \; t \; c_2y_2 \; t \cdots t \; c_ny_n$$

subject to

$$b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n \geq p_1$$

$$b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n \geq p_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{m1}y_1 + b_{m2}y_2 + \cdots + b_{mn}y_n \geq p_m$$

and

$$y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0, \; \ldots, \; y_n \geq 0$$

โดยที่:

b_{ij}, p_i, c_j = ค่าคงที่

y_j = ตัวแปรซึ่งเป็นผลเฉลย

m = จำนวนเงื่อนไข

n = จำนวนตัวแปร

หรือ อาจเขียนโดยย่อได้เป็น:

$$\text{Minimize} \qquad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j$$

$$\text{subject to} \qquad \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j \geq P_i \qquad (\text{for } i = 1,2, \ldots, m)$$

$$\text{and} \qquad y_j \geq 0 \qquad (\text{for } j = 1,2, \ldots, n)$$

1.5 การสร้างตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้น:

การสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น (formulation of linear programming) ในชั้นต้น จะต้องเก็บรวบรวมข้อมูลและวิเคราะห์ว่า มีข้อมูลใด ตัวแปรใด ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาที่กำลังพิจารณาอยู่บ้าง อะไรคือเป้าหมาย อะไรคือเงื่อนไข จากนี้จึงดำเนินการสร้างรูปแบบทางคณิตศาสตร์ของกำหนดการเชิงเส้นจากข้อมูลนั้น ๆ

ในลำดับนี้ เพื่อให้มีความเข้าใจการสร้างตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้นได้อย่างถูกต้องและชัดเจนยิ่งขึ้น จึงขอยกตัวอย่างประกอบการพิจารณาอีกโสดหนึ่งโดยลำดับ ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่างการสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น:

ตัวอย่าง 2-1: ตัวอย่างการสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น (บริษัทเครื่องใช้สำนักงาน)

บริษัทเครื่องใช้สำนักงานแห่งหนึ่ง ผลิตเครื่องคิดเลขและเครื่องพิมพ์ดีดออกขายในตลาด ซึ่งสินค้าทั้งสองชนิด จะต้องทำการผลิตในโรงงานผลิตชิ้นส่วนและโรงงานประกอบชิ้นส่วน

โดยบริษัททราบว่า เครื่องคิดเลขแต่ละเครื่อง จะใช้เวลาทำการผลิตชิ้นส่วนในโรงงานผลิตชิ้นส่วน 3 ชั่วโมง และใช้เวลาประกอบในโรงงานประกอบชิ้นส่วน 1 ชั่วโมง

สำหรับเครื่องพิมพ์ดีดแต่ละเครื่อง ต้องใช้เวลาทำการผลิตชิ้นส่วนในโรงงานผลิตชิ้นส่วน 2 ชั่วโมง และใช้เวลาประกอบในโรงงานประกอบชิ้นส่วน 4 ชั่วโมง

อยากทราบว่า ถ้าโรงงานผลิตชิ้นส่วนสามารถทำงานได้ 32 ชั่วโมง ในขณะที่โรงงานประกอบชิ้นส่วนทำงานได้ 34 ชั่วโมง โดยเครื่องคิดเลขและเครื่องพิมพ์ดีดมีราคาซื้อขายกันในตลาดเครื่องละ 500 บาท และ 600 บาท ตามลำดับ เช่นนี้แล้ว บริษัทควรจะผลิตสินค้าแต่ละชนิดออกขายในตลาดอย่างละเท่าไร

วิธีการ:

การสร้างตัวแบบของกำหนดการเชิงเส้นที่ง่ายที่สุด ในขั้นต้นนี้คือ พยายามตีความหมายของปัญหาที่กำลังพิจารณาอยู่ ลงในตารางแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรและข้อมูลต่าง ๆ เพื่อสะดวกแก่การสร้างในรูปคณิตศาสตร์ต่อไป ซึ่งการสร้างตารางวิเคราะห์ข้อมูลทำได้โดยง่ายดังต่อไปนี้:

ตารางวิเคราะห์:

		เครื่องคิดเลข	เครื่องพิมพ์ดีด	เวลาทำการได้
โรงงานผลิตชิ้นส่วน:	(ช.ม.)	3	2	32
โรงงานประกอบชิ้นส่วน:	(ช.ม.)	1	4	34
ราคา:	(บาท)	500	600	

จากตารางข้อมูลข้างต้น ถ้านำลงเขียนในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ จะได้ตัวแบบดังนี้:

กำหนดให้:

x_1 = จำนวนการผลิตเครื่องคิดเลข

x_2 = จำนวนการผลิตเครื่องพิมพ์ดีด

โดย: เป้าหมายของบริษัท คือ รายได้สูงสุด

เงื่อนไข คือ เวลาทำการได้ของแต่ละโรงงาน และ

ตัวแปร คือ จำนวนสินค้าชนิดทั้งสอง

ตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น:

Maximize	$R = 500x_1 + 600x_2$	: รายได้รวม
subject to	$3x_1 + 2x_2 \leq 32$	: โรงงานผลิตชิ้นส่วน
	$x_1 + 4x_2 \leq 34$	: โรงงานประกอบชิ้นส่วน
and	$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	

ขยายความ:

ส่วนของสมการเป้าหมาย (objective function):

R คือ รายได้รวมอันเกิดจากการผลิต x_1 และ x_2 ที่มีราคาขาย 500 และ 600 บาท ตามลำดับ ซึ่งที่จริงแล้ว สามารถลดหลักสัมประสิทธิ์ของ x_1 และ x_2 ลงได้ ทั้งนี้เพราะสินค้าทั้งสองชนิดมีราคาในหลักเดียวกันคือหลักร้อย (หลักไม่เท่ากันก็ลดหลักได้) และเมื่อลดหลักแล้วก็จะเขียนว่า x_1 มีราคา 5 ร้อยบาท โดย x_2 มีราคา 6 ร้อยบาท (การลดหลักก็เพื่อสะดวกแก่การคำนวณเท่านั้น) และเมื่อลดหลักแล้ว อาจจะเขียนแบบสมการเป้าหมายใหม่ได้เป็น:

Maximize $R = 5x_1 + 6x_2$ (หน่วยร้อยบาท: 00)

ส่วนเงื่อนไข (side constraints):

แต่ละโรงงาน คือโรงงานผลิตชิ้นส่วนและโรงงานประกอบชิ้นส่วน มีเวลาทำงานได้เป็น 32 ชั่วโมง และ 34 ชั่วโมง ตามลำดับ หมายความว่า:

โรงงานผลิตชิ้นส่วนทำงานได้ไม่เกิน 32 ชั่วโมง นั่นคือ จะทำงานทั้งหมด 32 ชั่วโมง หรือน้อยกว่า 32 ชั่วโมง ก็ได้

โรงงานประกอบชิ้นส่วนทำงานได้ไม่เกิน 34 ชั่วโมง คือ จะทำงานทั้งหมด 34 ชั่วโมง หรือน้อยกว่า 34 ชั่วโมง ก็ได้เช่นกัน

ส่วนของตัวแปรผลเฉลย (decision variables):

x_1 และ x_2 คือ จำนวนการผลิตเครื่องคิดเลขและเครื่องพิมพ์ดีด ซึ่งแน่นอนที่สุด การผลิตติดลบย่อมเป็นไปไม่ได้ เพราะการผลิตติดลบไม่มีความหมายใด ๆ ดังนั้นถ้าไม่มีการผลิต จำนวนผลผลิตหรือค่าตัวแปรก็จะเป็นศูนย์ "0" นั่นเอง ฉะนั้น:

$$x_1 \geq 0, \text{ และ } x_2 \geq 0$$

โดยสรุป กำหนดการเชิงเส้นอาจเขียนลดรูปได้เป็น:

Maximize	$R = 5x_1 + 6x_2$	(00)
subject to	$3x_1 + 2x_2 \leq 32$	
	$x_1 + 4x_2 \leq 34$	
and	$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	

2. การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น

การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น (approach to linear programming) อาจกระทำได้อย่างน้อย 3 วิธีด้วยกัน คือ:

1) การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ (graphical method)

2) การหาผลเฉลยโดยวิธีพีชคณิต (algebraic method)

3) การหาผลเฉลยโดยวิธีซิมเพลกซ์ (simplex method)

2.1 การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ:

การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีกราฟ (graphical method) เป็นวิธีการหาผลเฉลยที่ง่ายต่อการเข้าใจ และเป็นวิธีที่ทำให้เห็นภาพของกระบวนการหาคำตอบที่ดีที่สุดวิธีหนึ่ง แต่เป็นที่น่าเสียดายว่า วิธีกราฟนี้เป็นวิธีที่เหมาะกับปัญหาที่มีตัวแปรเพียงสองตัวเท่านั้น เหตุที่เป็นดังนี้เพราะ กราฟจะเห็นได้เด่นชัดเมื่อเป็นกราฟสองมิติ (แสดงได้สูงสุด 3 มิติ)

การหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ เป็นวิธีหาผลเฉลยโดยการพิจารณาจากภาพกราฟที่สร้างขึ้น โดยกราฟที่สร้างขึ้นนี้ เกิดจากการนำข้อมูลอันเกี่ยวกับเงื่อนไขของกำหนดการเชิงเส้น ซึ่งอยู่ในรูปของฟังก์ชัน ลงเขียนเป็นสมการเส้นตรงในกราฟนั้น ซึ่งภาพกราฟที่ได้จะแสดงอาณาเขตอันเป็นบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด (feasible region) จากนี้ก็นำฟังก์ชันเป้าหมายลงเขียนในภาพกราฟเดียวกัน เพื่อพิจารณาหาตำแหน่งที่เป็นผลเฉลยที่ดีที่สุด (optimal solution) ตามเป้าหมายที่ต้องการ กล่าวคือ ถ้าเป้าหมายต้องการค่าสูงสุด ตำแหน่งผลเฉลยที่ดีที่สุดจะอยู่บนเส้นสมการเป้าหมายเส้นที่สูงที่สุด และอยู่ในขอบเขตของพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ หรือนั่นคือตำแหน่งจุดยอดของพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้นั่นเอง ในทางตรงกันข้าม ถ้าเป้าหมายต้องการค่าต่ำสุด ตำแหน่งผลเฉลยที่ดีที่สุด จะอยู่บนเส้นสมการเป้าหมายเส้นที่ต่ำที่สุด และอยู่ในเขตของพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ หรือก็คือ จุดสุดท้ายของพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้เช่นเดียวกัน

โดยสรุปแล้ว การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีกราฟ อาจดำเนินการเป็นลำดับขั้นตอนได้ 3 ขั้นตอน คือ:

ขั้นตอนที่ 1. สร้างกราฟแสดงพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้จากเงื่อนไขที่กำหนด
ขั้นตอนที่ 2. พิจารณาตำแหน่งผลเฉลยที่ดีที่สุดในกราฟ จากสมการเป้าหมายที่ต้องการ
ขั้นตอนที่ 3. สรุปผลเฉลยจากกราฟ

ในลำดับนี้ เพื่อให้สามารถเข้าใจการหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีกราฟได้อย่างถูกต้องชัดเจนยิ่งขึ้น จะขอยกตัวอย่างประกอบการพิจารณาโดยลำดับ ดังต่อไปนี้:

ตัวอย่างการหาผลเฉลยโดยวิธีกราฟ:

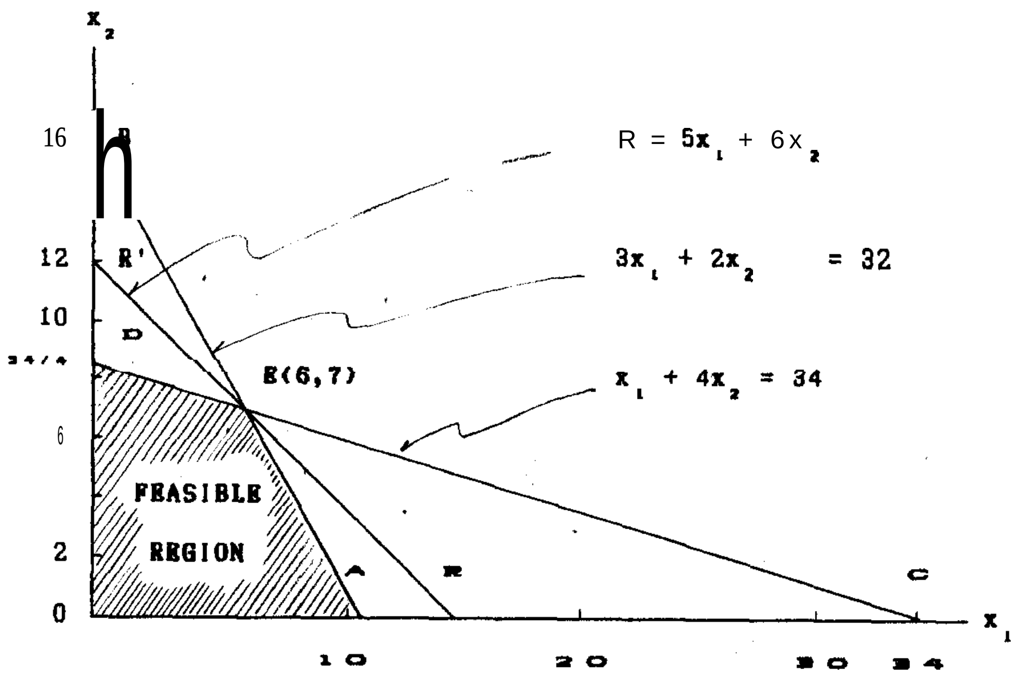
ก) กรณีต้องการค่าสูงสุด (maximization):

ตัวอย่าง 2-2: การหาค่าสูงสุดโดยวิธีกราฟ

ในที่นี้ ขอแสดงจากโจทย์ ตัวอย่าง 2-1 ซึ่งมีตัวแบบของกำหนดการ ดังนี้:

Maximize	$R = 5x_1 + 6x_2$	(00)
subject to:	$3x_1 + 2x_2 \leq 32$	
	$x_1 + 4x_2 \leq 34$	
and	$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	

รูป 2-1: ภาพกราฟ-กรณีต้องการค่าสูงสุด



การสร้างภาพกราฟและการหาผลเฉลย:

ขั้นตอนที่ 1. สร้างกราฟแสดงพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้จากเงื่อนไขที่กำหนด:

การสร้างภาพกราฟพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ (feasible region) ตามเงื่อนไขที่กำหนด อาจดำเนินการเป็นขั้นตอนย่อย ๆ ได้ ดังนี้:

1.1) พิจารณาเงื่อนไขที่แสดงเวลาอันจำกัดของโรงงานผลิตชิ้นส่วนและโรงงานประกอบชิ้นส่วน ในการผลิตสินค้าทั้งสองชนิดนี้ ซึ่งคือ:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 32$$

และ

$$x_1 + 4x_2 \leq 34$$

จากนี้ให้นำเงื่อนไขทั้งสอง มาเขียนเป็นสมการในรูปชัดแจ้ง (explicit form) โดยถือเอาว่าจำนวนการผลิตเครื่องพิมพ์ดีด: x_2 ขึ้นอยู่กับจำนวนการผลิตเครื่องคิดเลข: x_1 ดังนี้:

$$x_2 = \frac{32}{2} - \frac{3}{2}x_1$$

และ

$$x_2 = \frac{34}{4} - \frac{1}{4}x_1$$

1.2) นำสมการเงื่อนไขทั้งสองลงเขียนในกราฟ โดยให้แกนตั้งแสดงค่าตัวแปรตาม: x_2 ส่วนแกนนอนแสดงค่าตัวแปรต้น: x_1 ซึ่งจะได้เส้นตรง AB และ CD ตามลำดับ[1]

---

[1] ในการเขียนเส้นกราฟ จะเขียนเฉพาะส่วนที่เป็นสมการเท่านั้น ซึ่งก็คือส่วนที่แสดงค่าเท่ากับ สำหรับส่วนที่เป็นอสมการจะพิจารณาจากเส้นตรงที่เขียนนั้นภายหลัง

1.3) พิจารณาหาบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ (feasible region) จากเงื่อนไขที่มีอยู่ ซึ่งก็คือ บริเวณพื้นที่ร่วมที่อยู่บนหรือใต้เส้น AB และ CB ร่วมกันนั่นเอง ทั้งนี้เพราะทุกจุดตำแหน่งที่อยู่บนเส้นตรง AB แสดงถึงเงื่อนไขที่ว่า $3x_1 + 2x_2 = 32$ ในขณะเดียวกันพื้นที่ที่อยู่ใต้เส้นตรง AB จะหมายถึง $3x_1 + 2x_2 < 32$ ดังนั้นบริเวณพื้นที่ที่อยู่บนหรือใต้เส้นตรง AB ก็จะหมายถึง $3x_1 + 2x_2 \leq 32$ นั่นเอง ทำนองเดียวกัน บริเวณพื้นที่ที่อยู่บนหรือใต้เส้นตรง CD ก็จะหมายถึง $x_1 + 4x_2 \leq 34$ เช่นเดียวกัน ฉะนั้นแล้ว บริเวณพื้นที่ร่วมที่อยู่บนหรือใต้เส้นตรง AB และ CB ร่วมกัน ก็จะหมายถึง บริเวณพื้นที่ที่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดทั้งสองประการร่วมกัน อันเป็นบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ที่ต้องการนั่นเอง และที่สุดพื้นที่ดังกล่าวนี้ก็คือ สี่เหลี่ยม OAED ในภาพกราฟของ รูป 2-1

ขั้นตอนที่ 2. พิจารณาตำแหน่งผลเฉลยที่ดีที่สุดในกราฟ จากสมการเป้าหมายที่ต้องการะ

การหาผลเฉลยที่ดีที่สุดในกราฟ อาจดำเนินการเป็นลำดับขั้นตอนย่อย ๆ ได้ดังนี้ะ

2.1) สร้างเส้นรายได้เท่ากันจากสมการเป้าหมาย โดยเริ่มจากการนำสมการเป้าหมายที่กำหนด มาเขียนเป็นสมการในรูปที่มี x_2 เป็นตัวแปรตาม ดังนี้ะ

จากสมการเป้าหมาย $R = 5x_1 + 6x_2$

ดังนั้น $x_2 = \frac{R}{6} - \frac{5}{6}x_1$

2.2) นำสมการเป้าหมายนี้ลงเขียนในภาพกราฟ ซึ่งกราฟนั้นได้แสดงพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ไว้แล้ว [จาก 1.3)]

อนึ่ง โดยเหตุที่สมการเป้าหมายผูกพันธ์กับค่าตัวแปร "R" ซึ่งเป็นตัวแปรที่ยังไม่ทราบค่า ดังนั้น เส้นสมการเป้าหมายซึ่งแสดงถึงรายได้เท่ากันนี้ จึงสามารถเขียนได้มากมายหลายเส้น

โดยแต่ละเส้นจะตัดแกนตั้ง (x_2-intercept) ที่ x_2 มีค่าต่าง ๆ กัน แต่ทุกเส้นจะมีความชัน (slope) เป็น "-5/6" เท่ากันหมด อย่างไรก็ตาม เส้นรายได้เท่ากัน (iso-revenue) ที่อยู่สูงกว่า ย่อมหมายถึงรายได้ที่มากกว่า

2.3) พิจารณาหาตำแหน่งที่จะทำให้เป้าหมายมีค่าสูงสุด ซึ่งในที่นี้ก็คือ ตำแหน่งที่เส้นรายได้เท่ากันเส้นที่สูงที่สุด (เส้น R'R) สัมผัสกับบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้นั่นเอง ซึ่งคือ ตำแหน่งจุด E(6,7) ในกราฟ

ขั้นตอนที่ 3. สรุปผลเฉลยจากกราฟ:

ตำแหน่งซึ่งเป็นผลเฉลยที่ดีที่สุดในที่นี้ คือ จุด E(6,7) ดังนั้น ผลเฉลยที่อ่านค่าได้จากกราฟ ก็คือ:

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = 7$$

และที่สุด $R = 72(00)$: จาก $R = 5x_1 + 6x_2$

โดยสรุปแล้ว บริษัทควรจะผลิตเครื่องคิดเลข (x_1) จำนวน 6 เครื่อง และผลิตเครื่องพิมพ์ดีด (x_2) จำนวน 7 เครื่อง ออกขายในตลาด จึงจะทำให้บริษัทมีรายได้สูงสุด ซึ่งรายได้ที่สูงที่สุดนั้นคือ 72 ร้อยบาท หรือ 7,200 บาท นั่นเอง

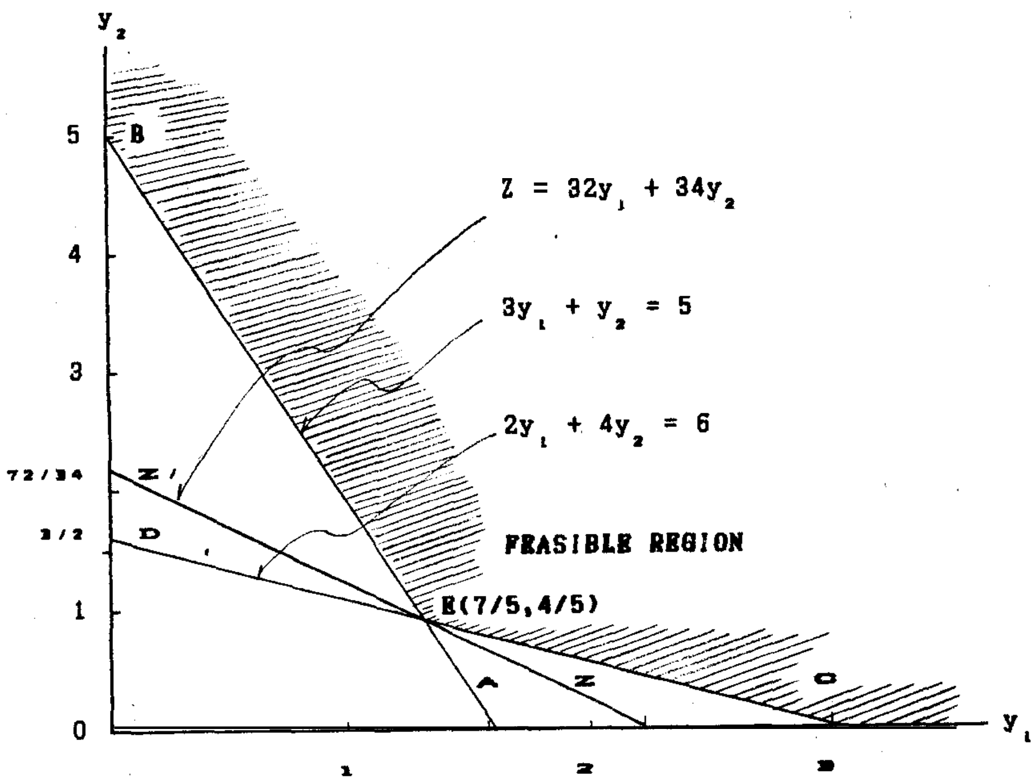
ข) กรณีต้องการค่าต่ำสุด (minimization):

ตัวอย่าง 2-3: การหาค่าต่ำสุดโดยวิธีกราฟ

ในลำดับที่นี้ จะขอแสดงตัวอย่างการหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น กรณีต้องการค่าต่ำสุดโดยวิธีกราฟ จากตัวแบบของกำหนดการ ดังนี้:

Minimize	$Z = 32y_1 + 34y_2$
subject to	$3y_1 + y_2 \geq 5$
	$2y_1 + 4y_2 \geq 6$
and	$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$

รูป 2-2: ภาพกราฟ-กรณีต้องการค่าต่ำสุด



การสร้างภาพกราฟและการหาผลเฉลย:

ขั้นตอนที่ 1. สร้างกราฟแสดงพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้จากเงื่อนไขที่กำหนด:

การสร้างกราฟพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ตามเงื่อนไขที่กำหนด อาจดำเนินการได้ดังนี้:

1.1) พิจารณาเงื่อนไขของการหาค่าต่ำสุดที่กำหนด ซึ่งคือ:

$$3y_1 + y_2 \geq 5$$

และ

$$2Y_1 + 4y_2 \geq 6$$

จากนี้ให้นำเงื่อนไขทั้งสองมาเขียนเป็นสมการในรูปชัดแจ้ง (explicit form) โดยถือเอาตัวแปร y_2 เป็นตัวแปรตาม ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปรต้น y_1 ดังนี้:

$$y_2 = 5 - 3y_1$$

และ

$$Y_2 = \frac{6}{4} - \frac{2}{4}Y_1$$

1.2) นำสมการเงื่อนไขทั้งสองลงเขียนในกระดาษกราฟ โดยให้แกนตั้งแสดงค่าตัวแปรตาม y_2 ส่วนแกนนอนแสดงค่าตัวแปรต้น y_1 ซึ่งจะได้เส้นตรง AB และ CD ตามลำดับ หมายเหตุ: การเขียนกราฟ เขียนเฉพาะส่วนที่เป็นสมการเท่านั้น ซึ่งคือส่วนที่แสดงค่าเท่ากับ

1.3) พิจารณาหาบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ (feasible region) จากเงื่อนไขที่มีอยู่ ซึ่งคือ บริเวณพื้นที่ร่วมที่อยู่บนหรือเหนือเส้น AB และ CB ร่วมกันนั่นเอง ทั้งนี้เพราะทุกจุดตำแหน่งที่อยู่บนเส้นตรง AB แสดงถึงเงื่อนไขที่ว่า $3y_1 + y_2 = 5$ ในขณะเดียวกันพื้นที่ที่อยู่เหนือเส้นตรง AB จะหมายถึง $3y_1 + y_2 > 5$ ดังนั้น บริเวณพื้นที่ที่อยู่บนหรือเหนือเส้นตรง AB ก็จะหมายถึง $3y_1 + y_2 \geq 5$ นั่นเอง ทำนองเดียวกัน บริเวณพื้นที่ที่อยู่บนหรือเหนือเส้นตรง CD ก็จะหมายถึง $2y_1 + y_2 \geq 34$ เช่นเดียวกัน ฉะนั้นแล้ว บริเวณพื้นที่ร่วมที่อยู่บนหรือเหนือเส้นตรง AB และ CB ร่วมกัน ก็หมายถึง บริเวณพื้นที่ที่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดทั้งสองประการร่วมกัน อันเป็นบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ที่ต้องการนั่นเอง และที่สุดพื้นที่ดังกล่าวนี้ก็คือ บริเวณพื้นที่ที่อยู่บนหรือเหนือเส้น CEB ซึ่งได้แลเงาไว้ในภาพกราฟ รูป 2-2

ขั้นตอนที่ 2. พิจารณาตำแหน่งผลเฉลยที่ดีที่สุดในกราฟ จากสมการเป้าหมายที่ต้องการ:

การหาผลเฉลยที่ดีที่สุดในกราฟ อาจดำเนินการเป็นลำดับขั้นตอนย่อย ๆ ได้ดังนี้:

2.1) สร้างเส้นเป้าหมายเท่ากันจากสมการเป้าหมายที่กำหนด โดยเริ่มต้นจากการนำสมการเป้าหมายที่กำหนด มาเขียนเป็นสมการในรูปที่มี y_2 เป็นตัวแปรตาม ดังนี้:

จากสมการเป้าหมาย $Z = 32y_1 \ t\ 34y_2$

ดังนั้น $Y_2 = \frac{Z}{34} - \frac{32}{34}y_1$

2.2) นำสมการเป้าหมายนี้ลงเขียนในภาพกราฟ ซึ่งกราฟนั้นได้แสดงพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ไว้แล้ว [จาก 1.3)]

อนึ่ง โดยเหตุที่สมการเป้าหมายผูกพันธ์กับค่าตัวแปร "Z" ซึ่งเป็นตัวแปรที่ยังไม่ทราบค่า ดังนั้น เส้นสมการเป้าหมายซึ่งแสดงเป้าหมายที่เท่ากันนี้ จึงสามารถเขียนได้มากมายหลายเส้น โดยแต่ละเส้นจะตัดแกนตั้ง (y_2-intercept) ที่ y_2 มีค่าต่าง ๆ กัน แต่ทุกเส้นจะมีความชัน (slope) เป็น "-32/34" เท่ากันหมด อย่างไรก็ตาม เส้นเป้าหมายเท่ากันที่อยู่ต่ำกว่า ย่อมหมายถึงค่าของเป้าหมายที่น้อยกว่า

2.3) พิจารณาหาตำแหน่งที่จะทำให้เป้าหมายมีค่าต่ำที่สุด ซึ่งในที่นี้ก็คือ ตำแหน่งที่เส้นแสดงเป้าหมายเท่ากันเส้นที่ต่ำที่สุด (เส้น Z'Z) สัมผัสกับบริเวณพื้นที่ที่เป็นคำตอบได้ ซึ่งก็คือ ตำแหน่งจุด E(7/5,4/5) ในกราฟ

ขั้นตอนที่ 3. สรุปผลเฉลยจากกราฟ

ตำแหน่งผลเฉลยที่ดีที่สุดในที่นี้ คือ จุด E(7/5,4/5) ดังนั้น ผลเฉลยที่ได้ ก็คือ:

$$y_1 = \frac{7}{5}$$

$$y_2 = \frac{4}{5}$$

และที่สุด $Z = 72$; จาก $Z = 32y_1 + 34y_2$

2.2 การผลเฉลยโดยวิธีพีชคณิต:

การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีพีชคณิต (algebraic method) เป็นวิธีการหาผลเฉลยโดยหลักของการแก้สมการทางพีชคณิตธรรมดา ๆ กล่าวคือ เริ่มจากการหาผลเฉลยที่เป็นไปได้เบื้องต้น (initial feasible solution) จากระบบสมการของกำหนดการที่กำลังพิจารณาอยู่ จากนี้ก็ทำการทดสอบความสมบูรณ์ (test for optimality) เพื่อให้ทราบว่าผลเฉลยที่ได้เบื้องต้นนี้เป็นผลเฉลยที่ดีที่สุดแล้วหรือยัง ถ้าการทดสอบแสดงให้เห็นว่าผลเฉลยที่ได้ไม่ใช่ผลเฉลยที่ดีที่สุด ก็ดำเนินการปรับปรุงให้ได้ผลเฉลยที่ดีกว่าต่อไป กระทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งผลการทดสอบได้แสดงให้เห็นว่า ผลเฉลยที่ได้ท้ายสุดนี้เป็นผลเฉลยที่ดีที่สุด (optimal solution) นั่นคือ ไม่มีวิธีปรับปรุงใด ๆ ที่จะนำไปสู่ผลเฉลยที่ดีกว่านี้อีกแล้ว ผลเฉลยสุดท้ายนี้ก็จะคือผลเฉลยที่ดีที่สุดนั่นเอง

โดยสรุปแล้ว การหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีพีชคณิต อาจดำเนินการเป็นลำดับขั้นตอนได้ 5 ขั้นตอน คือ:

ขั้นตอนที่ 1. ดำเนินการหาผลเฉลยที่เป็นไปได้เบื้องต้น จากเงื่อนไขที่กำหนด:

ขั้นตอนที่ 2. ดำเนินการทดสอบความสมบูรณ์ของผลเฉลยที่ได้ ว่าเป็นผลเฉลยที่ดีที่สุดดังต้องการแล้วหรือยัง

ขั้นตอนที่ 3. ดำเนินการปรับปรุงให้ได้ผลเฉลยที่ดีกว่าต่อไป ถ้าผลการทดสอบแสดงให้เห็นว่าผลเฉลยที่ได้นี้ไม่ใช่ผลเฉลยที่ดีที่สุด