บทที่ ๒

ดุลยภาพของครอบครัว

A. บทนำ

เอกชนคนหนึ่ง ๆ ที่เข้าสู่เมืองและต้องการที่จะซื้อที่ดินเพื่ออยู่อาศัย จะเผชิญกับความยากลำบาก ในการตัดสินใจว่าเขาควรจะซื้อที่ดินขนาดเท่าใด และควรตั้งอยู่ใกล้กับศูนย์กลางมากน้อยเพียงใด ในความเป็นจริงนั้น เขาจะต้องพิจารณาถึงคุณสมบัติต่าง ๆ ที่มีอยู่ และส่วนประกอบของเชื้อชาติของเพื่อนบ้านใกล้เคียง คุณภาพของโรงเรียนในบริเวณนั้น ความห่างไกลจากญาติมิตรที่เขามีอยู่ในเมือง และปัจจัยอื่น ๆ อีกจำนวนมาก อย่างไรก็ตาม เอกชนที่เรากล่าวถึงเป็น "มนุษย์เศรษฐศาสตร์" ที่ถูกนิยามและลดความสลับซับซ้อนลงให้อยู่ในลักษณะที่เราสามารถดำเนินการวิเคราะห์การตัดสินใจของเขาได้* โดยเขาต้องการที่จะทำให้ความพอใจของตนเองสูงสุดด้วยการเป็นเจ้าของและบริโภคสินค้าที่เขาชอบและหลีกเลี่ยงสิ่งที่เขาไม่ชอบ ยิ่งไปกว่านั้นในความเป็นจริง เอกชนจะเป็นครอบครัวหนึ่ง ๆ ซึ่งอาจประกอบไปด้วยสมาชิกหลาย ๆ คน การตัดสินใจของพวกเขาอาจจะกระทำโดยสมาชิกทั้งหมดของครอบครัว หรือมอบหมายให้อยู่ในการรับผิดชอบของสมาชิกคนใดคนหนึ่งก็ได้ แต่อย่างไรก็ตาม เราจะไม่เข้าไปยุ่งเกี่ยวว่า รสนิยมเหล่านี้จะมีที่มาอย่างไร แต่จะทำเพียงง่าย ๆ คือ เพียงให้รู้ว่ามันคืออะไรเท่านั้น และถ้ามีการกำหนดรสนิยมดังกล่าวนี้มาให้ ครอบครัวแบบธรรมดาสามัญนี้จะจ่ายเงินที่เขามีอยู่ เพื่อทำความพอใจให้สูงสุด

---

* การลดความสลับซับซ้อนเพื่อให้ง่ายแก่การวิเคราะห์ มักอยู่ในรูปของกฎเกณฑ์ข้อสมมติฐาน ซึ่งข้อได้เปรียบและเสียเปรียบของกฎเกณฑ์ดังกล่าว ได้มีการวิพากย์วิจารณ์กันอย่างถี่ถ้วนแล้วในที่อื่น ๆ ดังนั้น การวิพากย์วิจารณ์ต่อไปในที่นี้จึงไม่จำเป็น อย่างไรก็ตาม ในส่วนที่เกี่ยวกับการเลือกที่ตั้งเพื่ออยู่อาศัยและโครงสร้างในเมืองโดยเฉพาะนั้น มีคำวิจารณ์ที่น่าสนใจอย่างมาก ซึ่งเริ่มต้นขึ้นโดย Walter Firey (~~Land Uses in Central Boston~~, chap. 1), ซึ่งวิจารณ์การลดความสลับซับซ้อนเพื่อง่ายแก่การวิเคราะห์ของพวกนักนิเวศน์วิทยา และคำโต้ตอบของกลุ่มนักนิเวศน์วิทยาอาจจะพบได้ใน Amos Hawley, ~~Human Ecology~~, pp. 179-180, 286.

เมืองที่เอกชนนี้เข้ามาอาศัยอยู่เป็นเมืองแบบง่าย ๆ กล่าวคือ มันตั้งอยู่บนพื้นราบที่ไม่มีคุณสมบัติใด ๆ การขนส่งเป็นไปได้ในทุก ๆ ทิศทาง การจ้างงานทั้งหมดรวมทั้งสินค้าและบริการทั้งหมดมีเสนออยู่เฉพาะที่ศูนย์กลางของเมืองเท่านั้น ที่ดินจะถูกซื้อและขายอย่างเสรีโดยปราศจากข้อจำกัดทางสถาบันใด ๆ และปราศจากคุณสมบัติที่ก่อให้เกิดขึ้นโดยโครงสร้างใด ๆ ที่มีอยู่บนพื้นดิน บริการเทศกิจ และอัตราภาษีเป็นแบบเดียวกันหมดทั้งเมือง เอกชนรับรู้ราคาของที่ดินทุก ๆ แปลง และจากทัศนะของเขาราคานี้จะเป็นข้อเท็จจริงที่กำหนดมาให้ โดยจะไม่เปลี่ยนแปลงแต่อย่างใด ไม่ว่าเขาจะตัดสินใจอย่างไรก็ตาม

ในบทนี้ เราจะแสวงหาคำตอบว่าเอกชนจะซื้อที่ดินขนาดเท่าใดและที่ไหนในเมืองดังกล่าว การค้นพบสิ่งเหล่านี้จะช่วยให้ได้ผลลัพท์ดุลยภาพสำหรับเอกชน วิธีการแสวงหาคำตอบดังกล่าวในบทนี้ จะใช้ทฤษฎีดุลยภาพของผู้บริโภคแบบสากลนิยม แม้ว่าธรรมชาติที่ผิดปกติของปัญหาอาจจะนำไปสู่การเบี่ยงเบนที่ไม่ได้คาดการณ์ไว้จากทฤษฎีก็ตาม อย่างไรก็ตาม แม้ว่าทฤษฎีแบบสากลนิยมจะเป็นที่เพียงพอและน่าพอใจ สำหรับการอธิบายดุลยภาพของเอกชน แต่ในกรณีของเรานี้ ทฤษฎีดังกล่าวไม่สามารถช่วยให้รวมเอาผลลัพท์ของเอกชนทั้งหมดเข้าด้วยกัน เพื่อที่จะได้ผลลัพท์ของตลาดโดยไม่ต้องมีการปรับปรุงกันอย่างขนานใหญ่ได้ เพื่อที่ผู้อ่านจะได้เข้าใจการปรับปรุงทฤษฎีดังกล่าวนี้ เราจะพิจารณาผลลัพท์แบบสากลนิยมที่ได้นี้อย่างถี่ถ้วน และจะอธิบายอย่างละเอียดในหน้าถัดไป โดยเริ่มด้วยการวิเคราะห์จากรูปภาพ และตามด้วยการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ สำหรับผู้อ่านที่ไม่ค่อยคุ้นเคยกับกรณีทั่ว ๆ ไปของทฤษฎีดุลยภาพของผู้บริโภคแบบสากลนิยม เราได้นำเสนอสาระสำคัญของมันทั้งในแบบรูปภาพ และลักษณะทางคณิตศาสตร์ไว้ในส่วนแนบ C

B. ผลลัพท์ทางรูปภาพของดุลยภาพเอกชน

ในการอธิบายถึงดุลยภาพของเอกชนด้วยการใช้รูปภาพนั้น เราจะต้องนำเสนอด้วยกราฟทั้งทางด้านทางเลือกทั้งหมดที่เปิดไว้ให้เอกชนเลือก และแบบแผนการเลือกปฏิบัติของเอกชนนั้น ๆ และเมื่อเราเอารูปทั้งสองมาประกอบเข้าด้วยกัน เราก็จะสามารถสังเกตุได้ว่า ทางเลือกที่เปิดอยู่ทางใดที่เอกชนจะเลือก

<u>ทางเลือกที่เปิดอยู่สำหรับเอกชน</u>

เอกชนจะมีรายได้ที่ใช้สอยได้จำนวนที่แน่นอนจำนวนหนึ่ง ซึ่งเขาจะสามารถจ่ายได้ตามที่เขาต้องการ จากรายได้ดังกล่าวนี้เขาจะต้องจ่ายสำหรับต้นทุนที่ดินของเขา ต้นทุนการเดินทางไปทำงาน รวมทั้งสินค้าและบริการอื่น ๆ ทั้งหมด (ครอบคลุมไปถึงการออมด้วย) ในที่นี้เราต้องการที่จะอธิบายด้วยรูปภาพถึงทางเลือกทุก ๆ ทางที่เปิดอยู่สำหรับผู้บริโภค ทั้งนี้จะขึ้นอยู่กับข้อจำกัดทางด้านงบประมาณของเอกชนนั้น ๆ ด้วย ข้อจำกัดดังกล่าวอาจแสดงได้ดังนี้

รายได้ของเอกชน = ต้นทุนที่ดิน + ต้นทุนการเดินทางไปทำงาน + ค่าใช้จ่ายอื่น ๆ ทั้งหมด

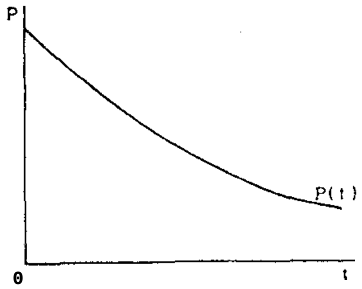
ในตอนแรกนี้ ขอให้เราพิจารณาถึงค่าใช้จ่ายของเอกชน สำหรับสินค้าและบริการทุก ๆ อย่าง นอกเหนือจากต้นทุนที่ดินและการเดินทางไปทำงาน เอกชนสามารถซื้อสินค้าที่มีความหลากหลายกันอยู่อย่างมาก ในปริมาณที่มากขึ้นหรือน้อยลงก็ได้ตามความต้องการของเขา เราอาจแทนปริมาณสินค้าแต่ละอย่างที่เขาซื้อด้วย $z_1, z_2, \ldots, z_n$ สำหรับสินค้าแต่ละอย่างซึ่งมีอยู่ n ประเภท ถ้าราคาสินค้า n ประเภทนี้เป็น $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ก็จะหมายความว่า ค่าใช้จ่ายของเอกชนสำหรับสินค้าหนึ่งใด, z_i, จะเท่ากับราคาของสินคาคูณดวยปริมาณสินค้าที่เขาซื้อ : $p_i z_i$ ดังนั้นค่าใช้จ่ายทั้งหมดสำหรับสินค้าและบริการในกลุ่มนี้จะเท่ากับ

$$p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_n z_n$$

อย่างไรก็ตาม เพื่อให้ง่ายขึ้น เราก็จะรวมเอาสินค้าและบริการที่แตกต่างกันเหล่านี้ทั้งหมดเข้าเป็นกลุ่มสินค้าหนึ่ง ๆ, z, โดยราคาของกลุ่มสินค้านี้จะเป็นดัชนีราคา, p_z, ดังนั้น ค่าใช้จ่ายสำหรับสินค้าและบริการทุกอย่างที่นอกเหนือจากต้นทุนที่ดินและการเดินทางไปทำงานจะเป็น $p_z z$ การลดความสลับซับซ้อนหรือความยุ่งยากลงด้วยวิธีนี้ จะไม่กระทบกระเทือนต่อหลักเหตุและผลของการวิเคราะห์ที่จะตามมา โดยในฐานะของทางเลือกหนึ่ง z อาจจะพิจารณาว่าเป็นเงิน และ p_z เป็นหนึ่งก็ได้

ประการที่สอง ให้เราพิจารณาค่าใช้จ่ายของเอกชนสำหรับที่ดิน โดยตามทัศนะของเอกชนแล้วโครงสร้างของราคาถูกกำหนดให้ ซึ่งจะกำหนดราคาของที่ดินในสถานที่ตั้งแต่ละ

แห่ง โครงสร้างของราคานี้จะแสดงโดยเส้น $P(t)$ ในรูปที่ ๑ โดยที่ราคาของที่ดิน, P, ผันแปรไปตามระยะทางจากศูนย์กลางของเมือง, t,[๒] ด้วยการนำเสนอโครงสร้างของราคาแบบนี้ มันจะเป็นที่กระจ่างชัดว่า เมื่อสถานที่ตั้งถูกเลือกราคาที่ดินที่กำหนดไว้จะถูกนำมาใช้ทันที



รูปที่ ๑ โครงสร้างของราคาที่ดิน

อย่างไรก็ตาม ในการซื้อที่ดินผู้บริโภคไม่เพียงแต่จะต้องเลือกสถานที่ตั้งเท่านั้น แต่ยังจะต้องตัดสินใจด้วยว่า เขาจะซื้อที่ดินในปริมาณเท่าใด ซึ่งเราจะแทนปริมาณที่ซื้อนี้ด้วยตัวอักษร q ดังนั้น ค่าใช้จ่ายสำหรับที่ดินจะเท่ากับราคาที่ดินคูณด้วยปริมาณที่ดินที่ซื้อ : $P(t)q$

ประการที่สาม เราต้องการที่จะพิจารณาถึงต้นทุนการเดินทางไปทำงาน ซึ่งจะเพิ่มขึ้นตามระยะทางที่เพิ่มขึ้นจากศูนย์กลางของเมือง เราจะแสดงถึงต้นทุนดังกล่าวนี้ด้วยฟังก์ชั่น $k(t)$ โดย t หมายถึง สถานที่ตั้งเดียวกับที่ใช้ใน $P(t)$

ดังนั้นในตอนนี้ เราก็สามารถที่จะเขียนสมการงบประมาณ ซึ่งจะประกอบไปด้วยทางเลือกทั้งหมดที่เปิดให้สำหรับบุคคลหนึ่ง ๆ ที่มีรายได้ y ดังนี้

$$(2:1) \qquad y = p_z z + P(t)q + k(t)$$

---

[๒] ในที่นี้ขอสมมติว่า ราคาของที่ดินลดลงเมื่อระยะทางจากศูนย์กลางของเมืองเพิ่มขึ้น ซึ่งเราจะเห็นในโอกาสต่อ ๆ ไปว่า นี่เป็นข้อกำหนดที่จะก่อให้เกิดดุลยภาพของทั้งเอกชนและตลาด และมันก็เป็นจริงในเมืองส่วนใหญ่ด้วยเช่นเดียวกัน

โดย y = รายได้

p_z = ราคาของกลุ่มสินค้า

$P(t)$ = ราคาที่ดินที่ระยะทาง t จากศูนย์กลางของเมือง

q = ปริมาณที่ดิน

$k(t)$ = ต้นทุนการเดินทางไปทำงานในระยะทาง t

t = ระยะทางจากศูนย์กลางของเมือง

สมการ (2:1) นี้ประกอบไปด้วยทางเลือกที่เป็นไปได้ทั้งหมด ที่เอกชนสามารถจับจ่ายใช้สอยเงินของเขาได้ ในตอนนี้เราจะวาดรูปฟังก์ชั่นนี้ออกมาซึ่งสามารถกระทำได้ในลักษณะแบบสามมิติของตัวแปร z, q และ t ตัวแปรทั้งสามตัวนี้จะกำหนดค่าซึ่งกันและกัน ทั้งนี้ เพราะรายได้ (y) และราคาของกลุ่มสินค้า (p_z) ถูกกำหนดให้ส่วนราคาที่ดิน, $P(t)$, และต้นทุนการเดินทางไปทำงาน, $k(t)$, เป็นฟังก์ชั่นของ t เราจะได้พื้นผิว ๓ มิติ ซึ่งจะแสดงถึงทางเลือกทั้งหมดที่เปิดให้สำหรับผู้บริโภค และพื้นผิวนี้จะถูกเรียกว่า <u>จุดของโอกาส</u> ทุก ๆ จุดบนพื้นผิวนี้จะเป็นทางเลือกที่เป็นไปได้ซึ่งเปิดให้แก่ผู้บริโภค ส่วนจุดใด ๆ ที่ไม่อยู่บนพื้นผิวนี้จะไม่ใช่ทางเลือกที่เป็นไปได้สำหรับผู้บริโภค[๓] เพื่อที่เราจะอธิบายพื้นผิวจุดของโอกาสดังกล่าวนี้ เราจะพิจารณาส่วนต่าง ๆ ของมันด้วยการกำหนดให้ตัวแปรทั้งสามคงที่ทีละตัวแปร และคอยสังเกตุถึงการเบี่ยงเบนของตัวแปรสองตัวที่เหลือ

---

[๓] จุดของโอกาสเป็นหลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไปของเส้นงบประมาณหรือเส้นราคาในกรณีปกติ โดยทั้งสองเส้นนี้จะอธิบายถึงทางเลือกทั้งหมดที่มีเสนออยู่สำหรับรายได้ที่แน่นอนหนึ่ง ๆ อย่างไรก็ตาม เส้นงบประมาณพิจารณาถึงทางเลือกระหว่างสินค้าต่าง ๆ ที่มีราคาคงที่ แต่ในกรณีของเรานี้ จุดของโอกาสพิจารณาถึงสินค้า, q, ที่มีราคา, $P(t)$, แตกต่างกันไป และสินค้า, t, ที่ไม่มีราคาแต่อย่างใด แต่เป็นตัวกำหนดราคาของสินค้า q และต้นทุนการเดินทางไปทำงาน, $k(t)$, ดังนั้น จึงอาจถือว่าเส้นงบประมาณเป็นกรณีพิเศษของจุดของโอกาส โดยทั้งสองอันทำหน้าที่ช่วยในการวิเคราะห์เหมือน ๆ กัน

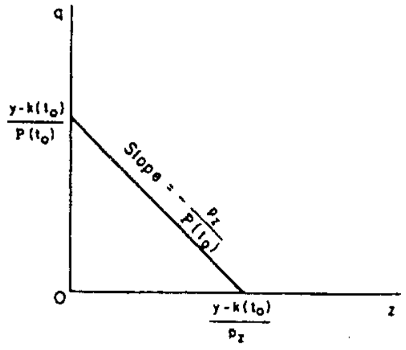
ในตอนแรกนี้ เราจะกำหนดให้ t คงที่ที่ระยะทางหนึ่ง ๆ, $t = t_0$, โดยปล่อยให้เอกชนสามารถเลือกปริมาณที่แตกต่างกันของที่ดิน, q, และกลุ่มของสินค้า, z, ในขณะที่ระยะทางในตอนนี้คงที่ที่ t_0 ระยะทางที่คงที่จะทำให้ราคาที่ดินคงที่ที่ $P(t)$ รวมทั้งต้นทุนการเดินทางไปทำงานคงที่ที่ $k(t_0)$ ดังนั้น สมการ (2:1) จะกลายเป็น

$$y = p_z z + P(t_0)q + k(t_0)$$

ซึ่งอาจจะเขียนใหม่ได้เป็น

$$q = \frac{y - k(t_0)}{P(t_0)} - \frac{p_z}{P(t_0)} z$$

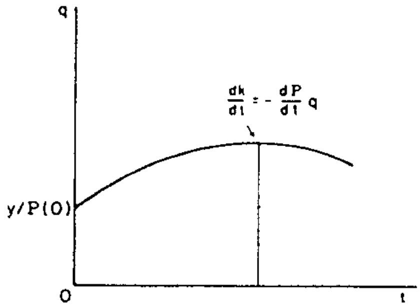
ซึ่งจะเป็นสมการเชิงเส้นที่มีความลาดชันเท่ากับมูลค่าติดลบของอัตราส่วน ระหว่างราคาของสินค้าทั้งสอง จุดตัดแกนของเส้นดังกล่าวจะเป็น $q = 0,\ z = [y - k(t_0)]/p_z$ และ $z = 0,$ $q = [y - k(t_0)]/P(t_0)$ ซึ่งเราจะแสดงไว้ในรูปที่ ๒



รูปที่ ๒ จุดของโอกาสระหว่าง q กับ z เมื่อ t คงที่ที่ t_0

สมการที่แสดงไว้ข้างต้นนี้ ไม่ได้เป็นสมการเชิงเส้นแบบง่าย ๆ อย่างที่คาดหวังเอาไว้ ทั้งนี้เพราะราคาที่ดิน, $P(t)$, ในตัวหารจะลดลงเมื่อระยะทางจากศูนย์กลางของเมืองเพิ่มขึ้น ซึ่งก็จะหมายความว่าปริมาณของที่ดินที่จะซื้อ, q, จะเพิ่มขึ้นตามระยะทางเนื่องจากที่ดินมีราคาถูกลง แต่ในทางกลับกัน ระยะทางมีส่วนเข้าไปเกี่ยวข้องกับตัวตั้งในสมการด้วย โดยอยู่ในรูปของต้นทุนการเดิน

ทางไปทำงาน, $k(t)$, ซึ่งก็คือ เมื่อระยะทางเพิ่มขึ้นจะทำให้ต้นทุนการเดินทางไปทำงานเพิ่มขึ้น ผลก็คือ ขนาดของที่ดินที่เอกชนจะซื้อจะลดลง (เพราะรายได้ที่เหลือของเขาหลังจากหักต้นทุนการเดินทางไปทำงานแล้วจะลดลง) ดังนั้น ระยะทางจะมีผลต่อปริมาณของที่ดินที่เอกชนจะซื้อในทิศทางที่หักล้างกัน ซึ่งเราอาจจะแสดงปริมาณที่ดินที่ซื้อต่อระยะทางได้ด้วยเส้นโค้งในรูปที่ ๓ โดยเส้น q ที่ผันแปรตาม t จะโค้งขึ้นเรื่อย ๆ จนถึงจุดที่ต้นทุนการเดินทางไปทำงานหน่วยเพิ่มที่กำลังเพิ่มขึ้น เท่ากับการประหยัดที่รู้สึกได้จากการที่ราคาที่ดินลดลงพอดี หลังจากนั้น ปริมาณของที่ดินที่เอกชนจะซื้อจะลดลงเมื่อระยะทางเพิ่มขึ้น เพราะต้นทุนการเดินทางหน่วยเพิ่มเพิ่มขึ้นเร็วกว่าการประหยัดจากการลดลงของราคาที่ดิน (ดูส่วนแนบ E ข้อสังเกตุที่ ๑ สำหรับการพิสูจน์หาจุดเปลี่ยนของเส้นโค้ง)



รูปที่ ๓ จุดของโอกาสระหว่าง q กับ t เมื่อ z คงที่ที่ z_0

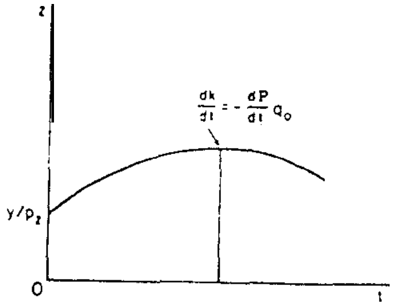
ประการสุดท้าย สมมติให้ q คงที่ที่ q_0 โดยยอมให้ t และ z ผันแปรได้ สมการ (2:1) จะกลายเป็น

$$y = p_z z + P(t)q_0 + k(t)$$

ซึ่งอาจจะเขียนใหม่ได้เป็น

$$z = \frac{y - P(t)q_0 - k(t)}{p_z}$$

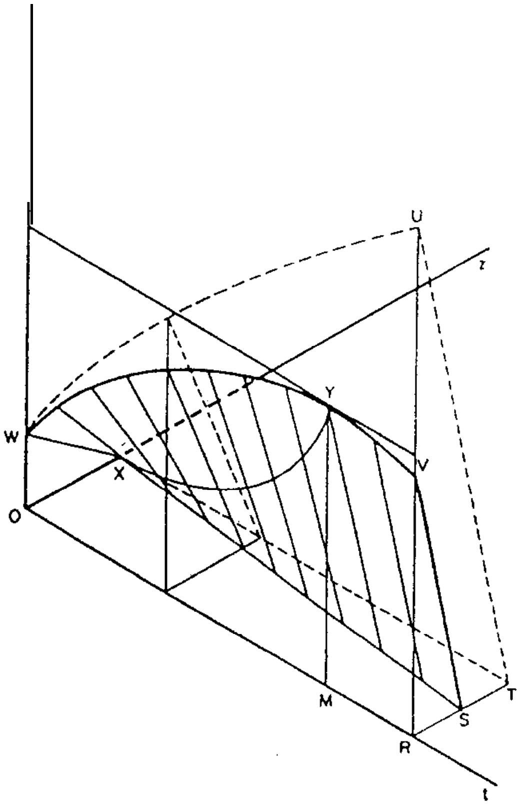
ตัวหารของสมการนี้, p_z, คงที่ แต่ทางด้านตัวตั้งจะประกอบไปด้วยผลกระทบของตัว t ในสองทิศ, ทาง กล่าวคือ ทางแรก $P(t)q_0$ จะมีผลทำให้ z เพิ่มขึ้นไปตามค่า t ทั้งนี้เนื่องจาก $P(t)$ ลดลงเมื่อ t เพิ่มขึ้น และตัวแปรนี้นำหน้าด้วยเครื่องหมายลบ ซึ่งก็หมายความว่า z จะเพิ่มขึ้น เมื่อ t เพิ่มขึ้น สำหรับตัวแปรอีกตัวหนึ่ง, $k(t)$, ซึ่งนำหน้าด้วยเครื่องหมายลบเหมือนกัน แต่ต้นทุนการเดินทางไปทำงาน, $k(t)$, นี้จะเพิ่มขึ้นเมื่อ t เพิ่มขึ้น ดังนั้นจะมีผลทำให้ z มีค่าลดลง ผลกระทบต่อปริมาณของกลุ่มสินค้า, z, จะแสดงโดยเส้นโค้งในรูปที่ ๔ ซึ่งอธิบายโดยผลกระทบที่หักล้างกันทั้งสอง ซึ่งกล่าวมาข้างต้นของระยะทาง โดยจะมีผลทำให้ปริมาณของกลุ่มสินค้าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ตราบเท่าที่การประหยัดจากการที่ราคาที่ดินถูกลงเกินกว่าการเพิ่มขึ้นของต้นทุนการเดินทางไปทำงาน แต่ปริมาณของกลุ่มสินค้าจะลดลงเมื่อการเพิ่มขึ้นของต้นทุนการเดินทางไปทำงานนั้นมีมูลค่าเกินกว่าการประหยัดจากการที่ราคาที่ดินลดลง (ดูส่วนแนบ E ข้อสังเกตุที่ ๒ สำหรับการพิสูจน์หาจุดเปลี่ยนของเส้นโค้ง)



รูปที่ ๔ จุดของโอกาสระหว่าง z กับ t เมื่อ q คงที่ที่ q_0

ในตอนนี้ เรามีส่วนประกอบทั้งสามส่วนของพื้นผิวจุดของโอกาสแล้ว และเราอาจวาดมันขึ้นมาในลักษณะแบบสามมิติ ดังที่ได้กระทำในรูปที่ ๕ ได้ ส่วนที่ปรากฏในพื้นราบ q-z คือ เส้นในรูปที่ ๒ ส่วนที่ปรากฏในพื้นราบ q-t คือ เส้นในรูปที่ ๓ และส่วนที่ปรากฏในพื้นราบ z-t คือ เส้นในรูปที่ ๔[๔] พื้นผิวที่มีลักษณะเหมือนหอยนี้จะประกอบไปด้วยส่วนประกอบทั้งหมดของที่ดิน (q) กลุ่มสินค้า (z) และระยะทาง (t) ที่เปิดโอกาสให้ผู้บริโภคเลือกซื้อได้ และผลลัพท์ดุลยภาพของเขาจะเป็นจุดใดจุดหนึ่งบนพื้นผิวของโอกาสนี้[๕] ขอให้สังเกตุว่า ถ้ารายได้ของเอกชนสูงขึ้น พื้นผิวจุดของโอกาสจะอยู่ในตำแหน่งที่สูงกว่าที่แสดงในรูป โดยรูปร่างจะยังคงเดิม และถ้า

รายได้ต่ำลง พื้นผิวจุดของโอกาสจะอยู่ในตำแหน่งต่ำลงด้วย



รูปที่ ๔ พื้นผิวจุดของโอกาส

---

[๔] ที่ $q = 0$ ส่วนประกอบดังกล่าวจะแสดงให้เห็นว่า z ลดลงอยู่ตลอดเวลาเมื่อ t เพิ่มขึ้น ซึ่งเป็นการแน่นอนว่า นี่เป็นกรณีพิเศษของเส้นที่มักจะโค้งเป็นหลังเต่า แต่เกิดขึ้นเพราะจุดสูงสุดของเส้นอยู่ที่ $t = 0$

[๕] พื้นผิวที่ล้อมรอบไว้ด้วยเส้นไข่ปลา จะแสดงถึงจุดของโอกาสที่ควรจะได้ ถ้าไม่มีต้นทุนการเดินทางไปทำงาน ซึ่งเป็นที่แน่นอนว่า มันจะต้องอยู่ในตำแหน่งที่สูงกว่าพื้นผิวของกรณีที่มีต้นทุนการเดินทางไปทำงานด้วย เนื่องจากต้นทุนการเดินทางไปทำงานนี้มีค่าเท่ากับการลดลงในรายได้ หรือการลดลงของอำนาจการซื้อ ดังตัวอย่างเช่น ปริมาณของที่ดิน, $q = RV$, จะถูกซื้อถ้ามันมีต้นทุนการเดินทางไปทำงานด้วย (โดยไม่มีการซื้อ z เลย) จะเป็น $[y - k(R)]/P(R)$ ในขณะที่ปริมาณที่ดิน, $q = RV$, จะถูกซื้อถ้าไม่มีต้นทุนการเดินทางไปทำงาน จะเป็น $y/P(R)$ เพราะฉะนั้น ปริมาณของที่ดินที่สูญเสียไปเพื่อเป็นค่าใช้จ่ายในการเดินทางไปทำงานจะเท่ากับ $k(R)/P(R)$

<u>การเลือกปฏิบัติของเอกชน</u>

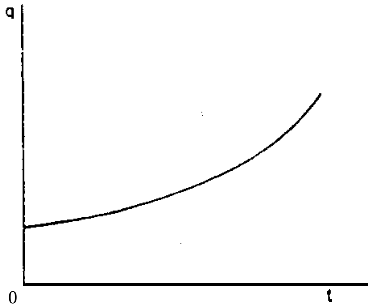
ในตอนนี้สิ่งที่เราต้องกระทำก็คือ การวาดแผนที่ที่จะแสดงถึงการเลือกปฏิบัติของเอกชนขึ้นมา และเมื่อเราเอาแผนที่การเลือกปฏิบัติของเอกชน ประกอบเข้ากับแผนที่ของโอกาสการบริโภคที่เปิดไว้ให้ เราก็จะได้ดุลยภาพของเอกชนที่จะแสดงถึงทางเลือกที่ให้ความพอใจแก่เอกชนได้สูงที่สุด

การเลือกปฏิบัติของเอกชนจะวาดออกมาเป็นแผนที่ได้ โดยผ่านทางพื้นผิวความพอใจเท่ากัน ในกรณีนี้ พื้นผิวความพอใจเท่ากันจะเป็นกลุ่มของส่วนผสมของปริมาณที่ดิน กลุ่มสินค้าและระยะทาง ซึ่งเอกชนจะมีความพอใจเท่าเทียมกันจากการบริโภคส่วนผสมใด ๆ ของกลุ่มส่วนผสมต่าง ๆ เหล่านี้ นั่นก็คือ เราอาจจะกล่าวได้ว่า เอกชนนั้น ๆ จะไม่รู้สึกว่ามีความแตกต่างกันระหว่างส่วนผสมทั้งหมดที่แสดงโดยพื้นผิวความพอใจเท่ากันนี้ และเราจะได้พื้นผิวดังกล่าวด้วยการพิจารณาส่วนประกอบของพื้นผิวนี้ทีละส่วนตามลำดับ เหมือนเช่นที่เราทำในกรณีของพื้นผิวจุดของโอกาสข้างต้น

เราจะเริ่มต้นด้วยการสมมติให้กลุ่มสินค้า, z, คงที่ และยอมให้ปริมาณของที่ดิน, q, และระยะทาง,t, ผันแปรไป ที่ดิน,q, เป็นสินค้าปกติ ซึ่งถ้าอย่างอื่น ๆ คงที่แล้ว เอกชนก็มักพอใจที่จะถือครองที่ดินขนาดใหญ่มากขึ้น ในทางตรงกันข้าม ระยะทาง,t, เป็นสินค้าชั้นเลว โดยถ้าเราสมมติว่าอย่างอื่นคงที่ เอกชนที่มีเหตุผลจะเลือกสถานที่ตั้งที่มีความเข้าได้สูงมากกว่าสถานที่ที่มีความเข้าถึงได้ต่ำ และเนื่องจาก t แสดงถึงระยะทางจากศูนย์กลางของเมือง ซึ่งก็คือระยะทางที่เอกชนจะต้องเดินทางไปสู่แหล่งจับจ่ายซื้อของ การบันเทิงเริงรมย์ และการจ้างงาน ดังนั้น เราอาจกล่าวได้ว่า ความเข้าถึงได้จะลดลงเมื่อ t เพิ่มขึ้น หรือจะกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ เอกชนจะพอใจให้ t มีค่าต่ำ ๆ มากกว่าที่จะมีค่าสูง ๆ ซึ่งก็คือ t อาจถูกพิจารณาว่าเป็นสินค้าที่มีอรรถประโยชน์ (หรือความพอใจ) ติดลบ การเพิ่มขึ้นของ t จะก่อให้เกิดความไม่พึงพอใจมากขึ้น

ในสินค้าทั้งสองอย่างดังกล่าวนี้ เราต้องการที่จะรู้ว่ามันจะผันแปรไปอย่างไร โดยยังคงรักษาระดับความพอใจในการบริโภคของเอกชนให้คงที่อยู่ได้ กำหนดส่วนผสมหนึ่ง ๆ ของที่ดินและระยะทางให้ การเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยของระยะทางจะก่อให้เกิดความไม่พอใจขึ้น และจะต้อง

ได้รับการทดแทนด้วยการเพิ่มขึ้นเล็กน้อยของที่ดินเพื่อให้ความพอใจยังคงอยู่ในระดับเดิม ดังนั้นเส้นความพอใจเท่ากันระหว่างที่ดินกับระยะทางจะเป็นเส้นโค้งขึ้น โดย q เพิ่มขึ้นตาม t ดังในรูปที่ ๖ แต่ถ้าลากเส้นความพอใจเท่ากันขึ้นโดยใช้ปัจจัยความเข้าถึงได้ แทนที่ระยะทางให้ผันแปรกับที่ดิน เราก็จะได้เส้นความพอใจเท่ากันที่ลาดลงมาหาแกน t ซึ่งเป็นรูปร่างปกติของเส้นความพอใจเท่ากันทั่ว ๆ ไป แต่เนื่องจากระยะทางสามารถวัดได้โดยตรง ในขณะที่ความเข้าถึงได้มีความหมายครอบคลุมไปถึงแบบแผนการเลือกปฏิบัติบางอย่างที่กำหนดล่วงหน้าไว้ในใจอยู่ก่อนแล้ว (หรือมูลค่าการรบกวนของระยะทาง) ซึ่งแตกต่างกันไประหว่างเอกชน ดังนั้นสำหรับจุดประสงค์ของเราจึงอาจถือว่า การใช้ระยะทางเป็นตัวแปรจะเหมาะสมกว่า โดยปล่อยให้รูปร่างของเส้นความพอใจเท่ากันทำหน้าที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับความเข้าถึงได้

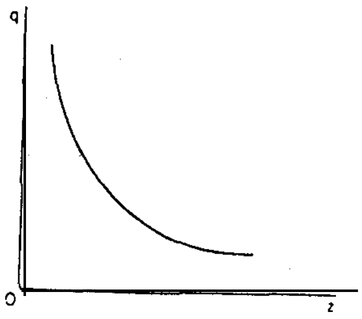


รูปที่ ๖ เส้นความพอใจเท่ากันระหว่าง q กับ t โดยให้ z_o คงที่

ในส่วนที่เกี่ยวกับตำแหน่งหรือทิศทางของเส้นความพอใจเท่ากันนี้ ยังคงเป็นไปตามความเป็นจริงอยู่เหมือนกับในกรณีปกติ กล่าวคือ เส้นความพอใจเท่ากันที่อยู่ต่ำกว่าจะแสดงถึงความพอใจในระดับต่ำกว่า (ที่ดินน้อยลงในระยะทางเท่ากัน หรือระยะทางมากขึ้นสำหรับ

ที่ดินปริมาณเท่าเดิม) และเส้นความพอใจที่อยู่สูงกว่าจะแสดงถึงระดับความพอใจที่สูงกว่า และยังคงเป็นจริงที่กลุ่มของเส้นความพอใจเท่ากันนี้จะไม่ตัดกัน

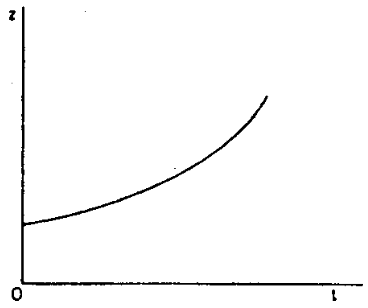
ทีนี้สมมติว่า ระยะทางคงที่ ที่ $t = t_0$ และเราจะคอยสังเกตการเบี่ยงเบนระหว่างที่ดินกับกลุ่มสินค้า โดยถ้ามีการกำหนดส่วนผสมใด ๆ ของ q กับ z ให้ การลดลงเล็กน้อยในตัวแปรหนึ่งจะต้องได้รับการทดแทนโดยการเพิ่มขึ้นเล็กน้อยในอีกตัวแปรหนึ่ง เพื่อที่จะให้ความพอใจยังคงมีระดับเท่าเดิม กรณีการเบี่ยงเบนระหว่าง q กับ z นี้เป็นกรณีปกติของเส้นความพอใจเท่ากันทั่ว ๆ ไป ดังเช่นที่แสดงในรูปที่ ๗ เส้นความพอใจเท่ากันนี้ไม่เพียงแต่จะลาดลงไปทางขวาเท่านั้น แต่ยังโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลางอีกด้วย ด้วยสาเหตุของการลดน้อยถอยลงในอรรถประโยชน์หน่วยเพิ่มของสินค้า



รูปที่ ๗ เส้นความพอใจเท่ากันระหว่าง q กับ z โดย t_0 คงที่

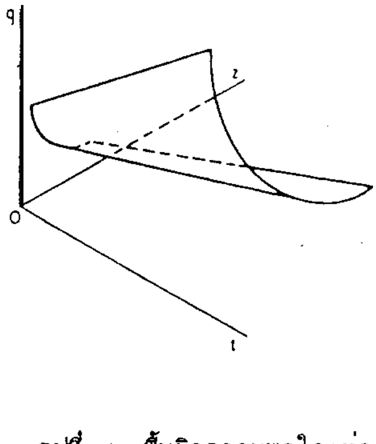
ประการสุดท้าย สมมติให้ปริมาณที่ดินคงที่ ที่ $q = q_0$ และยอมให้ระยะทางกับปริมาณกลุ่มสินค้าผันแปรไปได้ การเพิ่มขึ้นเล็กน้อยของระยะทางจะเพิ่มความยากลำบากของการเดินทางไปทำงาน และต้องการการทดแทนด้วยการเพิ่มขึ้นเล็กน้อยในปริมาณของกลุ่มสินค้าเพื่อให้ความพอใจยังคงเท่าเดิม ซึ่งก็จะทำให้เราได้เส้นความพอใจเท่ากัน ดังในรูปที่ ๘ ที่

ลาดชันสูงขึ้นไปทางขวา



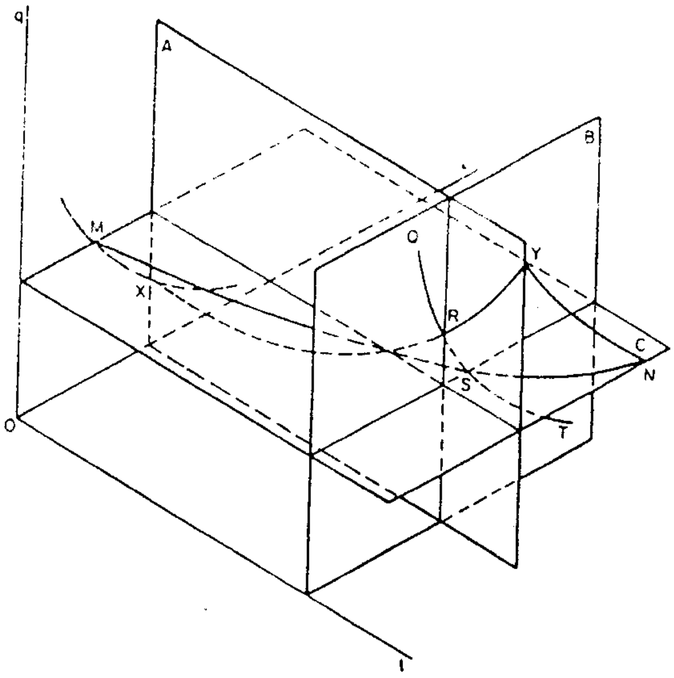
รูปที่ ๘ เส้นความพอใจเท่ากันระหว่าง z กับ t โดย q_0 คงที่

ในตอนนี้เราสามารถที่จะวาดพื้นผิวความพอใจเท่ากันขึ้นมาได้ในลักษณะสามมิติของ z, q และ t โดยการรวมเอาส่วนประกอบทั้งสามส่วนเข้าด้วยกัน ทั้งรูปที่ ๙ และ ๑๐ แสดงถึงพื้นผิวความพอใจเท่ากันดังกล่าว จากรูปที่ ๑๐ ขอให้สังเกตว่า เส้น XY ในพื้นราบ A สอดคล้องกับเส้นในรูปที่ ๖ ข้างต้น ที่ซึ่ง q และ t ผันแปรไปโดย z คงที่; เส้น $QRST$ ในพื้นราบ Bสอดคล้องกับเส้นในรูปที่ ๗ ที่ซึ่ง q และ z ผันแปรไป โดยมี t คงที่; และเส้น MN ในพื้นราบ C สอดคล้องกับเส้นในรูปที่ ๘ ที่ซึ่ง z และ t ผันแปรไปโดยมี q คงที่



รูปที่ ๙ พื้นผิวความพอใจเท่ากัน

พื้นผิวความพอใจเท่ากันที่แสดงไว้ในรูปที่ ๙ แสดงถึงส่วนผสมทั้งหมดของสินค้าทั้งสาม z, q และ t ซึ่งให้ความพอใจแก่เอกชนในระดับที่เท่ากัน สำหรับส่วนผสมของสินค้าเหล่านี้ที่ให้ระดับความพอใจที่แตกต่างออกไป อาจจะแสดงได้โดยพื้นผิวความพอใจเท่ากันที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน โดยที่พื้นผิวที่มีตำแหน่งสูงกว่าจะแสดงถึงระดับความพอใจที่สูงกว่า และพื้นผิวที่อยู่ต่ำกว่าจะแสดงถึงความพอใจที่น้อยลง



รูปที่ ๑๐ ส่วนประกอบต่าง ๆ ในพื้นผิวความพอใจเท่ากัน

<u>ดุลยภาพของเอกชน</u>

ในขณะนี้เรามีคำอธิบายถึงการเลือกปฏิบัติของเอกชน ด้วยการวาดพื้นผิวความพอใจเท่ากัน รวมทั้งคำอธิบายถึงโอกาสที่เปิดให้สำหรับเอกชนหนึ่ง ๆ ด้วยพื้นผิวจุดของโอกาส

ถ้าเรานำพื้นผิวทั้งสองมาประกอบเข้าด้วยกัน เราก็จะสามารถสังเกตเห็นว่า โอกาสที่ปลนองอยู่สำหรับเอกชนแบบใดที่เอกชนนั้นจะเลือก ซึ่งก็จะเป็นส่วนผสมของสินค้าที่แสดงโดยจุดที่พื้นผิวจุดของโอกาสสัมผัสกับพื้นผิวความพอใจเท่ากันที่สูงที่สุดที่เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย (ซึ่งก็คือ จุดที่เอกชนจะได้ความพอใจสูงสุดเท่าที่เขาจะสามารถแสวงหาได้ด้วยข้อจำกัดต่าง ๆ ที่เขามีอยู่) ถ้าจุดดังกล่าวนี้คือ z_i, q_i และ t_i ก็จะหมายความว่า เอกชนจะซื้อกลุ่มสินค้าในปริมาณ z_i ที่ราคา p_z เขาจะถือครองที่ดินปริมาณ q_i ที่ระยะทาง t_i จากศูนย์กลางของเมือง ซึ่งเขาต้องจ่ายในราคา $p(t_i)$ และจะจ่าย $k(t_i)$ เพื่อเป็นต้นทุนการเดินทางไปทำงานของเขา

ด้วยการพิจารณาอย่างระมัดระวังในส่วนที่เกี่ยวกับรูปร่างของพื้นผิวความพอใจเท่ากันและพื้นผิวจุดของโอกาส เราจะสามารถสังเกตเห็นได้อย่างเด่นชัดว่า จุดดุลยภาพของเอกชนจะต้องอยู่ภายในส่วนของจุดของโอกาส (รูปที่ ๕) ที่ล้อมรอบด้วยเส้น WX, XY และ YW ที่จุดดุลยภาพนั้น พื้นผิวจุดของโอกาสและพื้นผิวความพอใจเท่ากันจะสัมผัสซึ่งกันและกัน และเนื่องจากว่าพื้นผิวทั้งสองมีขอบเขตที่ราบเรียบและสัมผัสกันที่จุด ๆ หนึ่ง ดังนั้น ที่จุดสัมผัสนั้นพื้นผิวทั้งสองจะต้องขนานกัน พื้นผิวความพอใจเท่ากัน (ดูรูปที่ ๔) จะมีรูปร่างเหมือนอ่างยาว ๆ ที่เคลื่อนสูงขึ้นและห่างออกจากแกน t แต่ในส่วนของพื้นผิวจุดของโอกาส (ดูรูปที่ ๕) จะเคลื่อนสูงขึ้นและออกห่างจากแกน t เฉพาะส่วนที่อยู่เหนือ WXY (ส่วนพื้นผิว WY) ดังนั้น ก็หมายความว่าการสัมผัสระหว่างพื้นผิวทั้งสองและดุลยภาพของเอกชนจะเป็นไปได้เฉพาะในส่วนนี้เท่านั้น

C. <u>ผลลัพท์ทางคณิตศาสตร์ของดุลยภาพเอกชน</u>

ผลลัพท์ทางคณิตศาสตร์ของดุลยภาพเอกชนนั้นคู่ขนานกับผลลัพท์ทางรูปภาพ แต่จะเป็นสากลและรัดกุมมากกว่า เราอาจเริ่มต้นการวิเคราะห์ของเราได้จากข้อเสนอที่ว่า เอกชนมีรายได้ตามที่กำหนดให้, y, ซึ่งเขาจะจ่ายตามที่เขาเห็นชอบระหว่าง z กับ q หลังจากที่เขาจ่ายต้นทุนการเดินทางไปทำงาน, $k(t)$, ซึ่งเป็นผลมาจากการเลือกที่ตั้งของเขาแล้ว ข้อเสนอดังกล่าวนี้จะแสดงให้เห็นได้ในสมการความสมดุลย์ของงบประมาณ

(2:1) $$y = p_z z + P(t)q + k(t)$$

เหมือนกับที่เคยกระทำมาแล้วคือ เราจะสมมติว่ามีการกำหนดราคาของกลุ่มสินค้ามาให้เป็น p_z รวมทั้งกำหนดฟังก์ชั่นของต้นทุนที่ดินกับระยะทางเป็น $P(t)$ และต้นทุนการเดินทางไปทำงานกับระยะทางเป็น $k(t)$ ปัญหาของเราในตอนนี้คือ การหาส่วนผสมที่เป็นไปได้ของ z, q และ t ซึ่งจะต้องสอดคล้องกับสมการความสมดุลย์ของงบประมาณ (หรือที่เราเรียกก่อนหน้านี้ว่า พื้นผิวจุดของโอกาส) อีกทั้งต้องให้ความพอใจสูงสุดแก่เอกชนด้วย

ความพอใจของเอกชนจะถูกกำหนดให้อยู่ในรูปของฟังก์ชั่น

(2:2) $$u = u(z, q, t)$$

ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ ถ้ามีการกำหนดมูลค่าของ z_o, q_o และ t_o มาให้ เราจะสามารถหาค่า u_o ได้จากฟังก์ชั่นดังกล่าว สำหรับมูลค่าอื่นเช่น z_i, q_i และ t_i เราก็จะได้ค่า u_i ซึ่งถ้า u_i มีค่ามากกว่า u_o เราก็อาจกล่าวได้ว่า ส่วนผสมของ z_i, q_i, t_i เป็นที่พึงปรารถนามากกว่าส่วนผสมของ z_o, q_o และ t_o

เอกชนจะพยายามทำความพอใจของให้สูงที่สุด ภายในขอบเขตที่จำกัดของรายได้ของเขา หรือเราอาจจะกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า ปัญหาของเราคือ การแสวงหาว่าส่วนผสมของ z_i, q_i, t_i ใดที่เป็นไปตามสมการความสมดุลย์ของงบประมาณ (2:1) โดยให้มูลค่า u ในสมการ (2:2) สูงที่สุด ซึ่งอาจกระทำได้ด้วยการหาอนุพันธ์ทางแคลคูลัส การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ (2:2) จะทำให้เราได้

(2:3) $$du = u_z dz + u_q dq + u_t dt$$ [๖]

ที่จุดที่ความพอใจ, u, สูงสุด $du = 0$ ดังนั้น

(2:4) $$du = 0 = u_z dz + u_q dq + u_t dt$$

---

[๖] เพื่อความสะดวกในการพิจารณาเหมือนกับที่ได้กระทำอยู่บ่อย ๆ เราจะแทนอนุพันธ์ส่วนย่อยของฟังก์ชั่นที่เป็นผลมาจากการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรหนึ่ง ๆ โดยชื่อ (ตัวอักษร) ของฟังก์ชั่นนั้น ๆ โดยมีตัวแปรนั้น ๆ เป็นตัวห้อยท้าย เช่น $u_z = \partial u/\partial z$; $u_q = \partial u/\partial q$; $u_t = \partial u/\partial t$

ตามเงื่อนไขของการทำให้ฟังก์ชั่นที่มีตัวแปรหลาย ๆ ตัว มีมูลค่าสูงสุดนั้น เราสามารถกำหนดให้ตัวแปรอื่น ๆ คงที่ โดยให้ตัวแปรสองตัวใด ๆ ผันแปรไป (ซึ่งอนุพันธ์ของตัวคงที่จะเท่ากับ 0) ดังนั้น ถ้าเรากำหนดให้ t คงที่ ส่วน z กับ q ผันแปรไป ผลก็คือ $dt = 0$ และสมการ (2:4) จะกลายเป็น

(2:5) $$du = 0 = u_z dz + u_q dq + 0$$

หรือเราอาจจะเขียนสมการ (2:5) ได้อีกอย่างหนึ่งว่า

(2:6) $$-dz/dq = u_q/u_z$$

ถ้าเรากำหนดให้ q คงที่ ดังนั้น $dq = 0$ และจากสมการ (2:4) เราจะได้

(2:7) $$du = 0 = u_z dz + 0 + u_t dt$$

ซึ่งเราอาจจะเขียนสมการ (2:7) ได้อีกอย่างหนึ่งว่า

(2:8) $$-dz/dt = u_t/u_z$$

ในตอนนี้ เราจะย้อนกลับมาที่สมการความสมดุลย์ของงบประมาณ (2:1) การหาอนุพันธ์ของสมการจะทำให้เราได้

(2:9) $$dy = y_z dz + y_q dq + y_P dP + y_k dk$$

แต่ y ถูกกำหนดให้คงที่ ดังที่เราได้แสดงไว้อย่างเด่นชัดแล้วในสมการ (2:1) ดังนั้น $dy = 0$ และเราสามารถหาอนุพันธ์ส่วนย่อยของตัวแปรต่าง ๆ ได้ดังนี้:

$$y_z = p_z;\ y_q = P(t);\ y_P = q;\ y_k = 1$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (2:9) เราจะได้

(2:10) $$0 = p_z dz + P(t)q + q\ dP + dk$$

เราสามารถที่จะแก้สมการหาค่า dP และ dk ให้อยู่ในเทอมของ dt ด้วยอนุพันธ์ของ $P(t)$ และ $k(t)$ ดังนั้น

$$dP = (dP/dt)dt \text{ และ } dk = (dk/dt)dt$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (2:10) เราจะได้

$$0 = p_z dz + P(t)dq + q(dP/dt)dt + (dk/dt)dt$$

ซึ่งอาจเขียนใหม่ได้ว่า

(2:11) $$0 = pzdz + P(t)dq + dt(q\ dP/dt + dk/dt)$$

ขอให้สังเกตุว่า สมการ (2:11) นี้เป็นสมการ (2:9) ที่เขียนขึ้นมาใหม่เท่านั้นเอง

กฎเกณฑ์ที่ว่า เราสามารถกำหนดให้ตัวแปรอื่น ๆ คงที่ โดยให้ตัวแปรสองตัวใด ๆ ผันแปรไปได้นั้น สามารถประยุกต์ใช้ได้กับตัวแปรที่มีค่าคงที่อยู่แล้ว ได้เช่นเดียวกับตัวแปรที่เราต้องการให้มีค่าสูงสุด เนื่องจาก y มีค่าคงที่ และจากสมการ (2:11) เราจะกำหนดให้ t คงที่ก่อน แล้วค่อยกำหนดให้ q คงที่ทีหลัง ซึ่งเราอาจกล่าวได้เป็น

$$0 = p_z dz + P(t)q + 0$$

และ $$0 = p_z dz + 0 + dt(q\ dP/dt + dk/dt)$$

ซึ่งเราเขียนได้ใหม่เป็น

(2:12) $$-dz/dt = P(t)/p_z$$

(2:13) $$-dz/dt = (q\ dP/dt + dk/dt)/p_z$$

ประกอบสมการ (2:6) และ (2:8) เข้ากับสมการ (2:12) และ (2:13) เราจะได้

(2:14) $$u_q/u_z = P(t)/p_z$$ และ

(2:15) $$u_t/u_z = (q\ dP/dt + dk/dt)/p_z$$

สมการ (2:14) และ (2:15) พร้อมกับสมการความสมดุลย์ของงบประมาณ (2:1) เป็นสมการที่เมื่อเราแก้สมการพร้อม ๆ กันแล้ว ก็จะได้ส่วนผสมของตัวไม่ทราบค่าสาม

ตัว z, q และ t ซึ่งเหมาะสมที่สุดสำหรับเอกชน[๓] เมื่อเราทราบค่าตัวไม่ทราบค่าสามตัวนี้จะช่วยให้เราได้ผลลัพท์ดุลยภาพของเอกชน

<u>การตีความผลลัพท์ทางคณิตศาสตร์</u>

ความหมายของผลลัพท์ทางคณิตศาสตร์ จะเป็นเช่นเดียวกับความหมายที่ได้จากผลลัพท์ทางรูปภาพ เพียงแต่มีความละเอียดมากกว่าเท่านั้น สำหรับสมการความสมดุลย์ทางงบประมาณ (2:1) นั้น ไม่ต้องการคำอธิบายใด ๆ ทั้งนี้ เพราะเราสร้างสมการนี้ขึ้นตามคำนิยาม ซึ่งสมการดังกล่าว จะสอดคล้องกับจุดของโอกาสในผลลัพท์ทางรูปภาพ แต่สำหรับสมการ (2:14) และ (2:15) จะได้รับการพิจารณาอย่างใกล้ชิด

ในขั้นแรกนี้ ขอให้เราพิจารณาถึงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์กับพื้นผิวความพอใจเท่ากัน พื้นผิวความพอใจเท่ากันเป็นจุดของส่วนผสมทั้งหมดระหว่างสินค้า z, q และ t ซึ่งให้ความพอใจเท่ากันแก่เอกชนหนึ่ง ๆ ในแง่ของฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์จะหมายความว่า ส่วนผสมทั้งหมดของ z, q และ t จะให้มูลค่า u เดียวกัน อัตราการทดแทนกันหน่วยเพิ่มระหว่างสินค้า (อัตราที่เอกชนเต็มใจที่จะแลกปริมาณเล็กน้อยของสินค้าอย่างหนึ่ง กับปริมาณเล็กน้อยของสินค้าอื่น) จะแสดงในผลลัพท์ทางรูปภาพด้วยความลาดชันของพื้นผิวความพอใจเท่ากัน โดยความลาดชันนี้ จะวัดขนานไปกับพื้นราบที่กำหนดขึ้นโดยแกนของสินค้าทั้งสอง

---

[๓] อันที่จริง เราไม่ใช่มีเพียงสมการสามสมการและตัวไม่ทราบค่าสามตัวเท่านั้น แต่เรามีตัวไม่ทราบค่าเจ็ดตัว: z, q, t, $P(t)$, dP/dt, $k(t)$ และ dk/dt สมการที่เพิ่มขึ้นมาสี่สมการถูกกำหนดโดยฟังก์ชั่นที่เคยกล่าวไว้แล้ว, $P(t)$ และ $k(t)$ และอนุพันธ์ของมัน, การเพิ่มขึ้นของตัวไม่ทราบค่าและสมการนี้ เกิดขึ้นเมื่อเราถือว่าตัวไม่ทราบค่าที่เพิ่มขึ้นสี่ตัวต้องการผลลัพท์ที่เป็นตัวเลข แต่ถ้าเราพิจารณา F, k, dP/dt และ dk/dt ว่าเป็นฟังก์ชั่นในเทอมของ t ก็หมายความว่า สมการแรกเริ่มสามสมการเพียงพอแล้ว เพราะตอนนี้เราจะมีตัวไม่ทราบค่าเพียงสามตัว ปัญหาที่เกี่ยวกับจำนวนของสมการระหว่างสามกับเจ็ดสมการ จะขึ้นอยู่กับว่า เรานับตัวไม่ทราบค่าและสมการก่อนหรือหลังจากที่เราแทนค่าสำหรับ $P(t)$, $k(t)$, dP/dt และ dk/dt แล้ว

ในส่วนของผลลัพท์ทางคณิตศาสตร์ ความลาดชันนี้ (ซึ่งก็คือ อัตราการทดแทนกันหน่วยเพิ่ม) จะแสดงโดยอัตราส่วนของอรรถประโยชน์หน่วยเพิ่มของสินค้าทั้งสอง อรรถประโยชน์หน่วยเพิ่มของสินค้าหนึ่ง ๆ คือ อนุพันธ์ส่วนย่อยของอรรถประโยชน์, u, ที่เป็นผลมาจากการเปลี่ยนแปลงของสินค้านั้น ๆ ดังนั้น เราอาจจะกล่าวได้ตรงนี้ว่า ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์คือ ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของพื้นผิวความพอใจเท่ากันนั่นเอง

ในตอนนี้ขอให้ย้อนกลับมาที่สมการ (2:14) และ (2:15) ขอให้สังเกตุว่า ข้างซ้ายมือของสมการทั้งสองเป็นอัตราการทดแทนกันหน่วยเพิ่ม ส่วนข้างขวามือของสมการแสดงถึงต้นทุน โดยที่เหมือนกับกรณีปกติทั่ว ๆ ไปของการวิเคราะห์แบบนี้คือ สมการเหล่านี้จะมีความหมายว่า ที่จุดดุลยภาพอัตราการทดแทนกันหน่วยเพิ่มของสินค้าทั้งสอง จะเท่ากับอัตราส่วนต้นทุนหน่วยเพิ่มของมัน มิฉะนั้นแล้วเอกชนนั้น ๆ จะไม่อยู่ในภาวะดุลยภาพ ทั้งนี้ เพราะเขาสามารถเพิ่มความพอใจของเขาได้ด้วยการแสวงหาการบริโภคสินค้า ที่มีราคาถูกกว่าโดยเปรียบเทียบมากขึ้น และลดการบริโภคสินค้าที่มีราคาแพงกว่าโดยเปรียบเทียบลง จนกระทั่งอัตราส่วนต้นทุนหน่วยเพิ่มของสินค้าทั้งสอง เท่ากับอัตราการทดแทนกันหน่วยเพิ่มของสินค้าทั้งสองนั้น

สมการ (2:14) สามารถอธิบายได้ง่ายมาก โดยมันมีความหมายว่า ที่จุดดุลยภาพอัตราการทดแทนกันหน่วยเพิ่ม (u_q/u_z) ระหว่างที่ดิน, q, และกลุ่มสินค้าอื่น ๆ ทั้งหมด, z, จะเท่ากับอัตราส่วนราคาของมัน ซึ่งก็คือ ต้นทุนหน่วยเพิ่มของมันนั่นเอง

ส่วนสมการ (2:15) นั้น มีความสลับซับซ้อนมากกว่า โดยมันมีความหมายว่า ที่จุดดุลยภาพอัตราการทดแทนกันหน่วยเพิ่ม (u_t/u_z) ระหว่างระยะทาง, t, กับกลุ่มของสินค้า, z, จะเท่ากับ $(q\ dP/dt + dk/dt)/p_z$ สำหรับตัวหารนั้น เรารู้อยู่แล้วว่า p_z เป็นราคาและต้นทุนหน่วยเพิ่มของ z ส่วนตัวตั้งแสดงถึงต้นทุนหน่วยเพิ่มของการเปลี่ยนแปลงที่มีผลมาจากการเลือกที่ตั้ง กล่าวคือ มันเป็นการเปลี่ยนแปลงในราคาของที่ดิน, dP/dt, (เมื่อระยะทางจากศูนย์กลางเปลี่ยนแปลงไป) คูณด้วยปริมาณของที่ดิน, q, บวกเข้ากับการเปลี่ยนแปลงในต้นทุนการเดินทางไปทำงาน, dk/dt, ดังนั้น ก็หมายความว่าข้างขวามือของสมการ (2:15)

ยังคงเป็นอัตราส่วนต้นทุนหน่วยเพิ่มระหว่างต้นทุนหน่วยเพิ่มของการเปลี่ยนแปลง ที่เป็นผลมาจากการเลือกที่ตั้งกับต้นทุนหน่วยเพิ่มของกลุ่มสินค้า ซึ่งก็แสดงว่าสมการ (2:15) ยังคงแสดงถึงจุดดุลยภาพของเอกชน เช่นเดียวกับที่แสดงในสมการ (2:14)

เราได้ตั้งข้อสมมติฐานจากข้อเท็จจริงว่า สถานที่ตั้งที่อยู่ใกล้กับศูนย์กลาง จะเป็นที่ต้องการของเอกชนมากกว่าสถานที่ที่อยู่ไกล ๆ เนื่องจากการเดินทางไปทำงานมักถูกพิจารณาว่าเป็นการสร้างความยุ่งยากลำบากใจให้แก่เอกชน ซึ่งก็หมายความว่า u_t เป็นตัวแสดงถึงการเสียอรรถประโยชน์หน่วยเพิ่ม หรือจะกล่าวให้ชัดเจนก็คือ เป็นอรรถประโยชน์ติด...บหน่วยเพิ่ม ซึ่งก็คือ $u_t < 0$ และเราก็ได้ตั้งข้อสมมติฐานจากข้อเท็จจริงอีกประการหนึ่งว่า การเพิ่มขึ้นในกลุ่มสินค้า, z, มีอรรถประโยชน์เป็นบวก ($u_z > 0$) ซึ่งจะมีความหมายเป็นนัย ๆ ว่า $p_z > 0$ ด้วย ดังนั้น เพื่อให้สมการ (2:15) มีความหมายที่ถูกต้องสมจริง เทอม $q\ dP/dt + dk/dt$ จะต้องมีค่าน้อยกว่าศูนย์ด้วย (ขอให้ตระหนักถึงข้อกำหนดทางเอกภาพของคณิตศาสตร์ที่ว่า $-/+ = -$)

ขอให้เราพิจารณาสิ่งที่กล่าวมาข้างต้นนี้อย่างละเอียด โดยเราอาจจะคาดได้ว่า $dk/dt > 0$ เนื่องจากต้นทุนการเดินทางไปทำงานเพิ่มขึ้นตามระยะทางที่ต้องเดินทาง และเป็นสิ่งที่แน่นอนว่า มูลค่าของปริมาณที่ดิน, q, จะต้องไม่ต่ำกว่าศูนย์ (เพราะเอกชนหนึ่ง ๆ จะถือครองที่ดินจำนวนน้อยกว่าศูนย์ไม่ได้) ดังนั้น เราจึงต้องสรุปว่า dP/dt เป็นลบ เพราะมิฉะนั้นแล้ว ค่าทั้งหมดทางขวามือของสมการ (2:15) จะมีค่าเป็นบวก ซึ่งก็จะไม่เป็นไปตามข้อกำหนดเอกภาพทางคณิตศาสตร์ ที่ว่า $- = -$, $+ = +$, จากการพิจารณาข้างต้นทั้งหมดนี้ ก็หมายความว่า เอกชนจะบรรลุจุดดุลยภาพได้ก็เฉพาะในส่วนที่ติดลบของเส้น $P(t)$ โดยถ้า $P(t)$ เป็นบวก (ราคาของที่ดินเพิ่มขึ้นเมื่อระยะทางจากศูนย์กลางเพิ่มขึ้น) เอกชนก็จะเคลื่อนเข้าใกล้ศูนย์กลางมากขึ้น ทั้งนี้ เพราะเขาสามารถได้ที่ดินในราคาที่ถูกกว่า และมีการเดินทางไปทำงานสั้นกว่า ซึ่งนอกจากจะทำให้เราไม่สามารถวิเคราะห์ถึงดุลยภาพของเอกชนแล้ว ยังไม่สอดคล้องกับข้อเท็จจริงที่ปรากฏอยู่ในโลกปัจจุบันด้วย

นอกจากนี้แล้ว เรายังมีข้อสรุปเพิ่มเติมอีกประการคือ เนื่องจากการที่เราต้องการทำจุดดุลยภาพ ดังนั้นจึงจำเป็นที่ $(q\ dP/dt + dk/dt) < 0$ ซึ่งจะหมายความว่า เอกชนจะไม่มีทางที่จะเลือกตั้งถิ่นฐานในสถานที่ที่ $-(q\ dP/dt) < dk/dt$ ข้อสรุปที่เราได้นี้ จะเป็นข้อสรุปเดียวกันกับที่เราได้จากการวิเคราะห์ด้วยรูปภาพข้างต้น ซึ่งก็คือ ข้อสรุปที่กล่าวไว้ว่า เอกชนจะตั้งถิ่นฐานเฉพาะ เมื่อการประหยัดที่ได้จากการที่ราคาที่ดินถูกลง มีมูลค่ามากกว่าต้นทุนการเดินทางไปทำงานที่เพิ่มขึ้น (ซึ่งก็คือ ส่วน WXY ของพื้นผิวจุดของโอกาสในรูปที่ ๔ นั่นเอง)