บทที่ 1
ทฤษฎีพฤติกรรมผู้บริโภค
(Theory of Consumer Behavior)

วิธีการขั้นมูลฐานสำหรับการศึกษาทฤษฎีอุปสงค์ของผู้บริโภค เริ่มจากการพิจารณาพฤติกรรมของผู้บริโภค โดยสมมติว่าผู้บริโภคเป็นผู้ที่มีเหตุผล โดยผู้บริโภคมีความรู้อย่างสมบูรณ์เกี่ยวกับข้อมูลทั้งหมดของราคาสินค้าและรายได้ในการตัดสินใจบริโภค ผู้บริโภคจะวางแผนใช้จ่ายรายได้ของเขาเพื่อให้ได้รับความพอใจสูงสุดจากการบริโภคสินค้า ในบทนี้จะศึกษาพฤติกรรมของผู้บริโภค โดยเป็นการวิเคราะห์โดยอาศัยการวัดอรรถประโยชน์ออกมาเป็นหน่วยนับ (Cardinal Utility Approach) และโดยอาศัยการเรียงลำดับอรรถประโยชน์ (Ordinal Utility Approach)

การวิเคราะห์พฤติกรรมของผู้บริโภคโดยอาศัยการวัดอรรถประโยชน์เป็นหน่วยนับ (Cardinal Utility Approach)

ข้อสมมติของการวิเคราะห์ คือ

1. ผู้บริโภคเป็นผู้ที่มีเหตุผล (rationality) โดยมุ่งที่จะแสวงหาอรรถประโยชน์สูงสุดในการบริโภคสินค้า โดยมีข้อจำกัดทางการเงิน

2. อรรถประโยชน์ของสินค้าสามารถวัดออกมาเป็นหน่วยนับได้ (cardinal utility) กล่าวคือ เมื่อผู้บริโภคได้รับสินค้ามาบำบัดความต้องการ ผู้บริโภคสามารถกำหนดตัวเลขหรือจำนวนความพอใจที่ได้รับจากสินค้าออกมาเป็นหน่วยนับได้ที่เรียกว่า ยูทิล (Utils) เช่น ผู้บริโภคสามารถวัดความพอใจที่ได้รับจากการบริโภคสินค้า X เท่ากับ 15 utils และอรรถประโยชน์ของสินค้า Y เท่ากับ 45 utils ดังนั้น อรรถประโยชน์ของสินค้า Y มากกว่าของสินค้า X เท่ากับ 3 เท่า

นอกจากนี้อรรถประโยชน์สามารถวัดโดยหน่วยทางการเงิน (monetary units) ได้ซึ่งเป็นจำนวนเงินที่ผู้บริโภคเต็มใจที่จะจ่ายเพื่อซื้อสินค้าหน่วยเพิ่ม

3. อรรถประโยชน์เพิ่มของเงินคงที่ (constant marginal utility of money) ทั้งนี้เพราะถ้าใช้หน่วยของเงินเป็นมาตรฐานในการวัดอรรถประโยชน์แล้ว อรรถประโยชน์เพิ่มของเงินจะต้องคงที่ ถ้าอรรถประโยชน์เพิ่มของเงินเปลี่ยนแปลงไปเมื่อรายได้ของผู้บริโภคเปลี่ยนแปลง แสดงว่ามาตรฐานในการวัดเป็นตัววัดที่มีความยืดหยุ่นไม่เหมาะสมสำหรับการเป็นตัววัด

4. อรรถประโยชน์รวม(TU) คือผลรวมของอรรถประโยชน์ที่ผู้บริโภคได้รับจากการบริโภคของสินค้าแต่ละชนิด อรรถประโยชน์รวมของกลุ่มสินค้าขึ้นอยู่กับจำนวนของสินค้าแต่ละชนิด และอรรถประโยชน์รวมของสินค้าแต่ละชนิด จะมีลักษณะเป็นอิสระต่อกันหรือเป็นเอกเทศต่อกัน (independent) ซึ่งหมายความว่าอรรถประโยชน์ที่ผู้บริโภคได้รับจากสินค้าชนิดหนึ่งจะเป็นอิสระจากอรรถประโยชน์ที่ได้รับจากการบริโภคสินค้าชนิดอื่น ๆ หรือความพอใจที่ได้รับจากการบริโภคสินค้าชนิดหนึ่งจะขึ้นอยู่กับปริมาณการบริโภคสินค้าชนิดนั้นโดยไม่ขึ้นอยู่กับปริมาณการบริโภคสินค้าชนิดอื่น และฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์รวมของกลุ่มของสินค้าสามารถบวกเพิ่มเติมเข้าไปได้ (additive utility)) ทั้งนี้เพราะความพอใจที่ได้รับจากการบริโภคแต่ละชนิดเป็นเอกเทศต่อกัน ดังนั้นความพอใจที่ได้รับจากการบริโภคสินค้าทั้งหมดเท่ากับผลรวมของความพอใจที่ได้จากการบริโภคสินค้าแต่ละชนิด เช่น ถ้ามีสินค้า n ชนิด โดยบริโภคสินค้าจำนวน $X_1, X_2, \ldots,$ X_n ดังนั้น ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์รวมคือ

$$U = U_1(X_1) + U_2(X_2) + \ldots + U_n(X_n)$$

โดยที่ U = อรรถประโยชน์รวมที่ได้รับจากการบริโภคสินค้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$U_i(X_i)$ = อรรถประโยชน์รวมของสินค้าชนิดที่ i ซึ่งขึ้นอยู่กับปริมาณของสินค้าชนิดที่ i โดยที่ $i = X_1, X_2, \ldots, X_n$

5. ผู้บริโภคแต่ละคนมีความรู้อย่างสมบูรณ์เกี่ยวกับข้อมูลที่ใช้ในการตัดสินใจใช้จ่าย

ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ (Utility Function)

ฟังก์ชั่นที่แสดงถึงอรรถประโยชน์หรือความพอใจที่ผู้บริโภคได้รับ สามารถแสดงได้เป็น 2 รูปแบบ คือ

1. ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ทางตรง (Direct Utility Function)
2. ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ทางอ้อม (Indirect Utility Function)

1. ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ทางตรง (Direct Utility Function)

เมื่อผู้บริโภคได้รับสินค้ามาบำบัดความต้องการและสามารถวัดความพอใจที่ได้รับจากการบริโภคสินค้าออกมาเป็นหน่วยนับที่เรียกว่า ยูทิล (Utils) ได้

ดังนั้นอรรถประโยชน์รวมหรืออรรถประโยชน์ทั้งหมด(Total Utility: TU) หมายถึงจำนวนความพอใจทั้งหมดหรืออรรถประโยชน์ทั้งหมดที่ผู้บริโภคได้รับจากการบริโภคสินค้าจำนวนที่กำหนดให้ในช่วงระยะเวลาหนึ่ง

ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์มักแสดงในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างอรรถประโยชน์ที่ผู้บริโภคได้รับกับปริมาณของสินค้าชนิดหนึ่ง หรือส่วนผสมของสินค้าหลาย ๆ ชนิดที่ผู้บริโภคบริโภค ความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถแสดงในรูปสมการดังนี้

$$U = U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

โดยที่ U = อรรถประโยชน์ทั้งหมดหรือความพอใจทั้งหมดที่ผู้บริโภคได้รับจากการบริโภคสินค้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ = ปริมาณของสินค้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$

ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ดังกล่าวนี้แสดงให้เห็นว่าระดับความพอใจขึ้นอยู่กับปริมาณสินค้าที่บริโภคซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ทางตรง (Direct Utility Function)

ดังนั้นฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ทางตรง (Direct Utility Function) จึงเป็นฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ที่แสดงให้เห็นว่าระดับความพอใจขึ้นอยู่กับปริมาณสินค้าที่บริโภค

ถ้า U = U (Q)

โดย Q = ปริมาณของสินค้าชนิดใด ๆ ที่ผู้บริโภคบริโภค

ค่าของการเปลี่ยนแปลงของอรรถประโยชน์รวมอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงจำนวนของสินค้าที่บริโภคไป 1 หน่วย เรียกว่า อรรถประโยชน์เพิ่ม (Marginal Utility: MU)

อรรถประโยชน์เพิ่ม (MU) หาได้จากอัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงของอรรถประโยชน์รวม กับการเปลี่ยนแปลงของปริมาณสินค้า

$$MU = \frac{\Delta TU}{\Delta Q} = \frac{d\,TU}{d\,Q}$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง TU และ MU คือ เมื่อ TU มีค่าสูงสุด MU มีค่าเท่ากับศูนย์ เมื่อ TU มีค่าลดลง MU มีค่าติดลบ และ MU มีค่าเท่ากับ slope ของ TU

ในกรณีที่บริโภคสินค้าหลายชนิด อรรถประโยชน์เพิ่ม (MU) ของสินค้าแต่ละชนิดหาได้จากค่าอนุพันธ์บางส่วน (Partial derivatives) ของฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์รวม ซึ่งหาได้ดังนี้

$$MU_{X_1} = \frac{\partial U(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_1}$$

$$MU_{X_2} = \frac{\partial U(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_2}$$

$$\vdots \quad = \quad \vdots$$

$$MU_{X_n} = \frac{\partial U(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_n}$$

2. ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ทางอ้อม (Indirect Utility Function)

เนื่องจากการหาระดับอรรถประโยชน์หรือความพอใจที่ขึ้นอยู่กับปริมาณสินค้าที่ใช้บริโภคเป็นสิ่งที่สังเกตุหรือวัดได้ยาก ดังนั้นพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวจึงมีผู้พยายามที่จะวัดความพอใจในสินค้าโดยการใช้ระดับราคาและรายได้ของผู้บริโภคเป็นตัวกำหนดซึ่งสามารถสังเกตหรือคำนวณได้ง่ายกว่า และนี่คือที่มาของการหาฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ทางอ้อม (Indirect Utility Function)

ระดับรายได้เป็นตัวกำหนดที่สำคัญของการบริโภคสินค้า ทั้งนี้เพราะถ้าผู้บริโภคไม่มีรายได้จะไม่สามารถบริโภคสินค้าได้และก็จะไม่ได้รับอรรถประโยชน์ นอกจากนี้อรรถประโยชน์ที่ผู้บริโภคได้รับยังขึ้นอยู่กับราคาสินค้าที่บริโภคด้วย กล่าวคือ การที่ระดับราคาสินค้าเปลี่ยนแปลงไปจะมีผลกระทบอุปสงค์ของผู้บริโภคในสินค้านั้น ซึ่งจะทำให้อรรถประโยชน์ที่ได้รับเปลี่ยนแปลงด้วย

ดังนั้นแทนที่จะแสดงฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ในรูปฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ทางตรงซึ่งความพอใจที่ผู้บริโภคได้รับขึ้นอยู่กับปริมาณของสินค้าและบริการ จึงอาจแสดงในรูปของฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ทางอ้อม (Indirect Utility Function) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าระดับอรรถประโยชน์หรือความพอใจขึ้นอยู่กับราคาสินค้า (P) และรายได้ (I) กล่าวคือ ถ้าราคาสินค้าแพงเกินไปหรือระดับรายได้ต่ำเกินไปก็นไม่อาจบริโภคสินค้าในปริมาณมากได้ จึงทำให้ความพอใจที่ได้รับจากการบริโภคสินค้าลดลง

ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ทางอ้อม (Indirect Utility Function) จึงเป็นฟังก์ชั่นที่เชื่อมโยงระหว่างระดับความพอใจของผู้บริโภคกับราคาสินค้าและรายได้

$$V = V(P_{X_1}, P_{X_2}, \ldots, P_{X_n}, I)$$

โดย V คือ ดัชนีแสดงระดับความพอใจของผู้บริโภค

$P_{X_1}, P_{X_2}, \ldots, P_{X_n}$ คือ ราคาของสินค้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$

I คือ รายได้ของผู้บริโภค

ดังนั้นฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ทางอ้อมจึงหมายถึงฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ที่ราคาของสินค้าและบริการและรายได้ของผู้บริโภคมีผลกระทบโดยตรงต่อปริมาณสินค้าที่

บริโภค และมีผลกระทบทางอ้อมกับอรรถประโยขน์ที่ผู้บริโภคได้รับจากสินค้าและบริการนั้น กล่าวอีกนัยหนึ่งการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้าหรือรายได้ของผู้บริโภคมีส่วนทำให้ปริมาณความต้องการสินค้าและบริการเปลี่ยนไป ซึ่งการเปลี่ยนแปลงในปริมาณหรือชนิดของสินค้าจะมีผลกระทบต่ออรรถประโยชน์หรือความพอใจของผู้บริโภคอีกต่อหนึ่ง

ดุลยภาพของผู้บริโภค (Consumer 's Equilibrium)

ภาวะดุลยภาพของผู้บริโภค คือ ภาวะที่ผู้บริโภคได้รับอรรถประโยชน์หรือความพอใจสูงสุดจากการบริโภคสินค้าและบริการด้วยรายได้ที่มีอยู่อย่างจำกัด

1. กรณีบริโภคสินค้าชนิดเดียว

กรณีที่ผู้บริโภคต้องการใช้เงินจำนวนจำกัดซื้อสินค้าชนิดเดียว โดยทุก ๆ หน่วยของสินค้าที่ซื้อมีราคาเท่ากันเพื่อให้ได้รับความพอใจสูงสุด

สมมติผู้บริโภคซื้อสินค้าชนิดเดียวคือสินค้า X ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์รวมสำหรับสินค้า X คือ

$$U = U(X)$$

สมมุติอรรถประโยชน์เพิ่มของเงิน 1 บาทเท่ากับ 1 ยูทิล ถ้าผู้บริโภคซื้อสินค้า X จำนวน X หน่วย ค่าใช้จ่ายในการซื้อสินค้า X เท่ากับ $P_X.X$ บาท ดังนั้นในการจ่ายเงินซื้อสินค้า X จะสูญเสียความพอใจไปเท่ากับ $P_X.X$

สมมติให้ A เป็นความแตกต่างระหว่างอรรถประโยชน์ที่ได้รับจากสินค้า และอรรถประโยชน์ของเงินที่ต้องจ่าย

$$A = U(X) - P_X.X$$

เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการหาค่าสูงสุดของความแตกต่างระหว่างอรรถประโยชน์ของสินค้า และของเงินที่จ่าย หาได้จากการหา partial derivative ฟังก์ชันมุ่งตรงต่อ X แล้วให้เท่ากับศูนย์

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \frac{\partial U(X)}{\partial X} - P_X = 0$$

$$\frac{\partial U(X)}{\partial X} = P_X$$

$$MU_X = P_X$$

นั่นคือ ในทุก ๆ ครั้งที่จ่ายเงินซื้อสินค้าหรือบริการแต่ละหน่วย ผู้บริโภคจะเปรียบเทียบอรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้าและอรรถประโยชน์เพิ่มของเงิน ซึ่งเท่ากับราคาที่ผู้บริโภคยินดีสินค้าจ่ายเพื่อให้ได้สินค้าหน่วยนั้นหรือราคาของสินค้าหน่วยนั้น และผู้บริโภคจะได้รับอรรถประโยชน์สูงสุด เมื่ออรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้านั้นเท่ากับราคาต่อหน่วยของสินค้านั้น

2. กรณีบริโภคสินค้าหลายชนิด

สมมติผู้บริโภคซื้อสินค้า n ชนิด ซึ่งมีราคาต่างๆ กัน ผู้บริโภคมีฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ (Utility Function) คือ

$$U = U(X, Y, Z, \ldots, n)$$

ผู้บริโภคมีรายได้หรืองบประมาณจำกัด คือ

$$I = P_X.X + P_Y.Y + \ldots + P_n.n$$

ผู้บริโภคจะได้รับอรรถประโยชน์สูงสุดด้วยรายได้ที่มีอยู่อย่างจำกัดโดยใช้วิธีการของ Lagrangian Multiplier Method

$$Z = U(X, Y, Z, \ldots, n) + \lambda(I - P_X.X - P_Y.Y - \ldots - P_n.n)$$

First Order Condition สำหรับค่าสูงสุดของ U โดยหา partial Derivative สมการ Z มุ่งตรงต่อ X, Y, Z, ..., n และ λ แล้วให้เท่ากับศูนย์

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial X} &= Z_X = \frac{\partial U(X, Y, \ldots, n)}{\partial X} - \lambda P_X = 0 \\
\frac{\partial Z}{\partial Y} &= Z_Y = \frac{\partial U(X, Y, \ldots, n)}{\partial Y} - \lambda P_Y = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial Z}{\partial n} &= Z_n = \frac{\partial U(X, Y, \ldots, n)}{\partial n} - \lambda P_n = 0
\end{aligned}\right\} \ldots (1 - 1)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = Z_\lambda = I - P_X.X - P_Y.Y - \ldots - P_n.n = 0 \qquad \ldots.(1 - 2)$$

จากสมการที่ (1 – 1) หาค่า λ จะได้

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{P_X} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Y}}{P_Y} = \ldots\ldots = \frac{\frac{\partial U}{\partial n}}{P_n} = \lambda$$

$$\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_Y}{P_Y} = \ldots\ldots = \frac{MUn}{P_n} = \lambda \qquad \ldots.(1 - 3)$$

และจากสมการที่ (1 – 2) ย้ายข้างจะได้

$$I = P_X.X + P_Y.Y + \ldots + P_n.n \qquad \ldots.(1 - 4)$$

จากสมการที่ (1 – 3) และ (1 – 4) หาค่าของ X, Y, . . . n และ λ ที่ทำให้ได้รับอรรถประโยชน์สูงสุดได้ โดยปริมาณของสินค้า X, Y, . . . n และ λ ที่จะได้รับอรรถประโยชน์สูงสุดมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับ P_X , P_Y , . . . , P_n และ I นั่นคือ

$$\begin{aligned}
X &= X(P_X, P_Y, \ldots, P_n, I) \\
Y &= Y(P_X, P_Y, \ldots, P_n, I) \\
&\vdots \\
n &= n(P_X, P_Y, \ldots, P_n, I) \\
\lambda &= \lambda(P_X, P_Y, \ldots, P_n, I)
\end{aligned}$$

ในที่นี้ ค่าของ λ คือ อรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้าย

ถ้าให้ MU_m = อรรถประโยชน์เพิ่มของเงิน

P_m = ราคาต่อหน่วยของเงิน

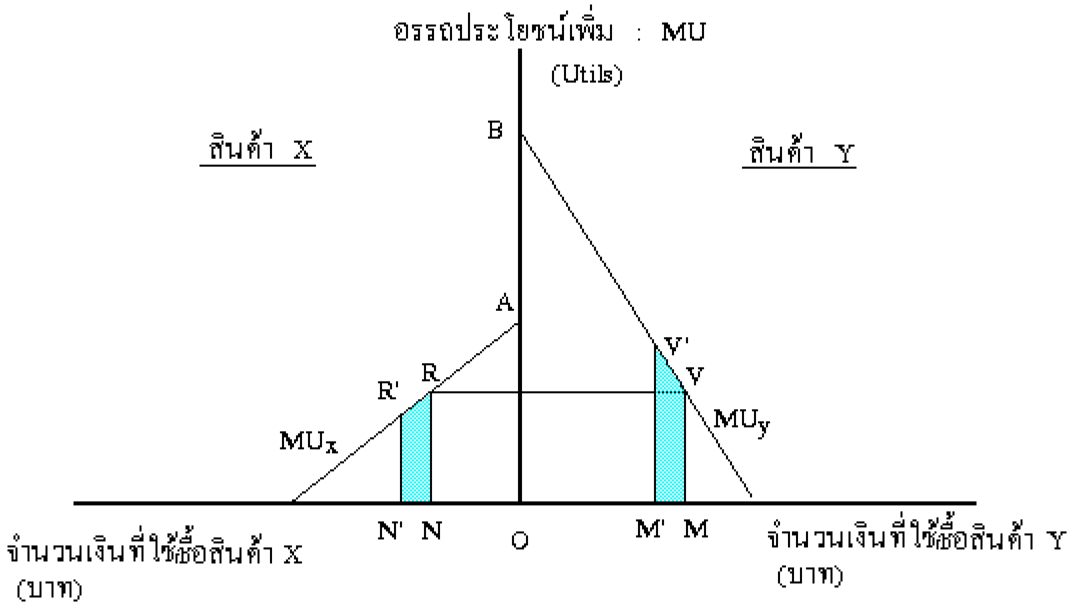
ดังนั้น $$\lambda = \frac{MU_m}{P_m}$$

เงื่อนไขดุลยภาพของผู้บริโภคในการบริโภคสินค้าหลายชนิดที่จะได้รับอรรถประโยชน์สูงสุดด้วยรายได้ที่มีอยู่อย่างจำกัดจะอยู่ ณ จุดที่เงินหนึ่งหน่วยสุดท้ายซึ่งใช้ซื้อสินค้าแต่ละชนิดให้ความพอใจเท่ากัน หรือผู้บริโภคจะใช้เงินซื้อสินค้า X, Y, ..., n จนกระทั่งอรรถประโยชน์เพิ่มต่อเงินหนึ่งหน่วยสุดท้ายของสินค้าแต่ละชนิดเท่ากัน ($\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_Y}{P_Y} = \ldots = \frac{MU_n}{P_n} = \lambda$) และใช้เงินที่มีอยู่ทั้งหมด

การพิจารณาการจัดสรรการใช้จ่ายเงินเพื่อให้ได้รับอรรถประโยชน์สูงสุดด้วยกราฟ

ถ้าสมมติผู้บริโภคมีงบประมาณจำกัด เพื่อซื้อสินค้าสองชนิด คือ สินค้า X และสินค้า Y ผู้บริโภคจะได้รับความพอใจสูงสุดเมื่ออรรถประโยชน์เพิ่มของการใช้จ่ายซื้อสินค้า X เท่ากับอรรถประโยชน์เพิ่มของการใช้จ่ายซื้อสินค้า Y ดังแสดงด้วยรูปที่ 1 – 1

รูปที่ 1 – 1 การหาจุดดุลยภาพของผู้บริโภค



จากรูปที่ 1 – 1 ให้แกนนอนแสดงถึงจำนวนเงินที่ใช้จ่ายในการซื้อสินค้า X และสินค้า Y แกนตั้งแสดงถึงอรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้า X และสินค้า Y ตามกฎการลดน้อยถอยลงของอรรถประโยชน์เพิ่ม เมื่อผู้บริโภคซื้อสินค้ามากขึ้น อรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้าจะลดลง จึงทำให้เมื่อจำนวนเงินใช้จ่ายซื้อสินค้ามากขึ้น อรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้าจะลดลง

ถ้าเดิมผู้บริโภคมีรายได้ทั้งหมดที่มีอยู่จำนวน N′M′ บาท โดยนำเงินจำนวน ON′ บาทไปซื้อสินค้า X และจำนวน OM′ บาทไปซื้อสินค้า Y จะเห็นได้ว่าการจัดสรรการใช้จ่ายเงินดังกล่าวนี้ทำให้อรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้ายในการซื้อสินค้า X น้อยกว่าอรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้ายในการซื้อสินค้า Y ซึ่งจากรูปอรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหน่วยที่ N′ บาทในการซื้อสินค้า X เท่ากับ N′R′ ยูทิล น้อยกว่าอรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหน่วยหน่วยที่ M′ บาทในการซื้อสินค้า Y ซึ่งเท่ากับ M′V′ ยูทิล ซึ่งการจัดสรรการใช้จ่ายเงินดังกล่าวนี้ผู้บริโภคจะได้รับความพอใจ

ทั้งหมดเท่ากับ พื้นที่ ON′R′A บวกด้วยพื้นที่ OBV′M′ ยูทิล ถ้าผู้บริโภคต้องการได้รับความพอใจสูงสุดจากการใช้จ่ายเงินทั้งหมดจะต้องจัดสรรการใช้จ่ายเงินในการซื้อสินค้าทั้งสองชนิดใหม่ โดยลดการซื้อสินค้า X และเพิ่มการซื้อสินค้า Y จนทำให้อรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้ายในการซื้อสินค้า X เท่ากับอรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้ายในการซื้อสินค้า Y

ถ้าสมมุติผู้บริโภคใช้จ่ายเงินซื้อสินค้า X ลดลงและนำไปใช้จ่ายซื้อสินค้า Y เพิ่มขึ้น โดยสมมุติให้เงินจำนวน N′N บาทที่ใช้จ่ายซื้อสินค้า X ลดลง เท่ากับเงินจำนวน M′M บาทที่นำไปใช้จ่ายซื้อสินค้า Y เพิ่มขึ้น และทำให้อรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้ายที่ใช้จ่ายซื้อสินค้าทั้งสองชนิดเท่ากันพอดี โดยการจัดสรรเงินใหม่นี้ทำให้ความพอใจทั้งหมดลดลงจากการลดการบริโภคสินค้า X มีค่าเท่ากับพื้นที่ N′R′RN ยูทิล และการใช้จ่ายเงินซื้อสินค้า Y เพิ่มขึ้นเท่ากับ M′M บาท (ซึ่งเท่ากับ N′N บาท) ทำให้ได้รับความพอใจทั้งหมดเพิ่มขึ้นเท่ากับพื้นที่ M′V′VM ยูทิล จะเห็นได้ว่าความพอใจที่เพิ่มขึ้นมากกว่าความพอใจที่ลดลง สรุปได้ว่า ถ้ามีการจัดสรรการใช้จ่ายในการซื้อสินค้าทั้งสองชนิดใหม่ โดยจ่ายเงินจำนวน ON บาทซื้อสินค้า X และจ่ายเงินจำนวน OM บาทซื้อสินค้า Y ทำให้ผู้บริโภคได้รับความพอใจสูงสุด ซึ่งเท่ากับพื้นที่ ONRA บวกด้วยพื้นที่ OBVM ยูทิล ซึ่งมากกว่าเดิม (โดยความพอใจทั้งหมดจากการใช้จ่ายเดิมเท่ากับพื้นที่ ON′R′A บวกด้วยพื้นที่ OBV′M′ ยูทิล)

การพิจารณาทางด้านคณิตศาสตร์เพื่อหาการจัดสรรเงินในการใช้จ่ายที่จะได้รับความพอใจสูงสุด

ถ้าให้ N = จำนวนเงินที่ใช้จ่ายในการซื้อสินค้า X

M = จำนวนเงินที่ใช้จ่ายในการซื้อสินค้า Y

และให้ $N + M = 50$

อรรถประโยชน์เพิ่มของเงินที่ใช้จ่ายเงินซื้อสินค้า X และสินค้า Y มีรูปสมการคือ

$$MU_X = 40 - N$$

$$MU_Y = 80 - 2M$$

ให้หาจำนวนเงินที่ใช้จ่ายซื้อสินค้า X และสินค้า Y ที่ทำให้ผู้บริโภคได้รับอรรถประโยชน์สูงสุด

เนื่องจากผู้บริโภคจะได้รับความพอใจทั้งหมดสูงสุดเมื่ออรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้ายที่ใช้จ่ายในการซื้อสินค้า X และสินค้า Y เท่ากัน ในที่นี้จะอยู่ที่

$$MU_X = MU_Y$$

$$40 - N = 80 - 2M$$

แทนค่า $N = 50 - M$ จะได้

$$40 - (50 - M) = 80 - 2M$$

$$M = 30$$

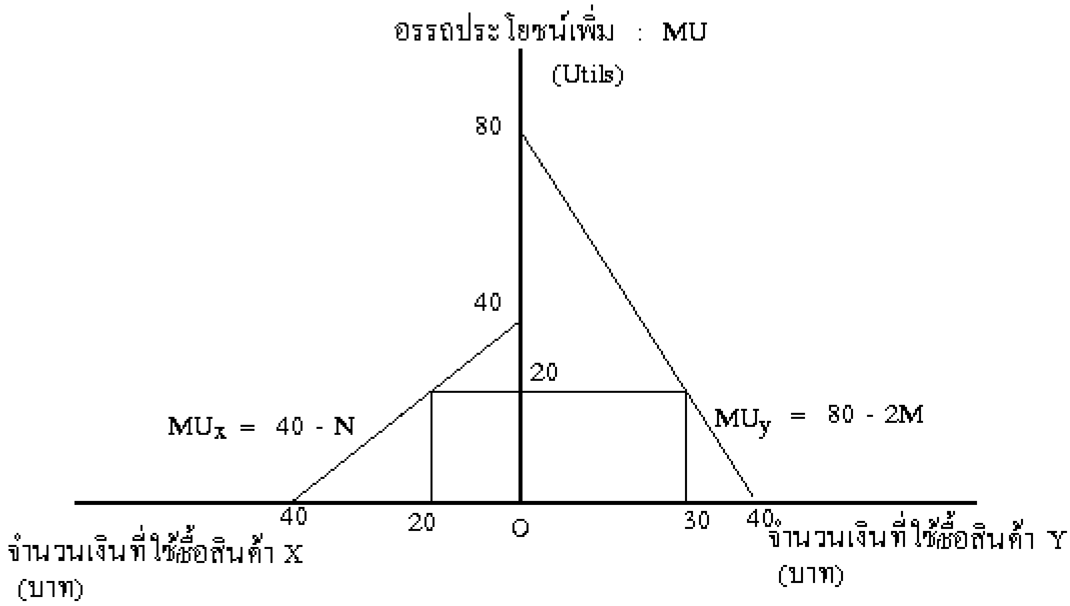
ดังนั้น $N = 20$

และได้ $MU_X = 40 - N = 20$

$$MU_Y = 80 - 2M = 20$$

สรุปได้ว่า อรรถประโยชน์เพิ่มของเงินที่ใช้จ่ายในการซื้อสินค้าทั้งสองชนิดจะเท่ากับ 20 Utils โดยการจัดสรรที่ดีที่สุดของเงินจำนวน 50 บาทไปใช้จ่ายในการซื้อสินค้า X เท่ากับ 20 บาท และใช้จ่ายไปในการซื้อสินค้า Y เท่ากับ 30 บาท ดังแสดงได้ด้วยรูปที่ 1 - 2

รูปที่ 1 – 2 แสดงการจัดสรรเงินในการซื้อสินค้าที่ให้ความพอใจสูงสุด

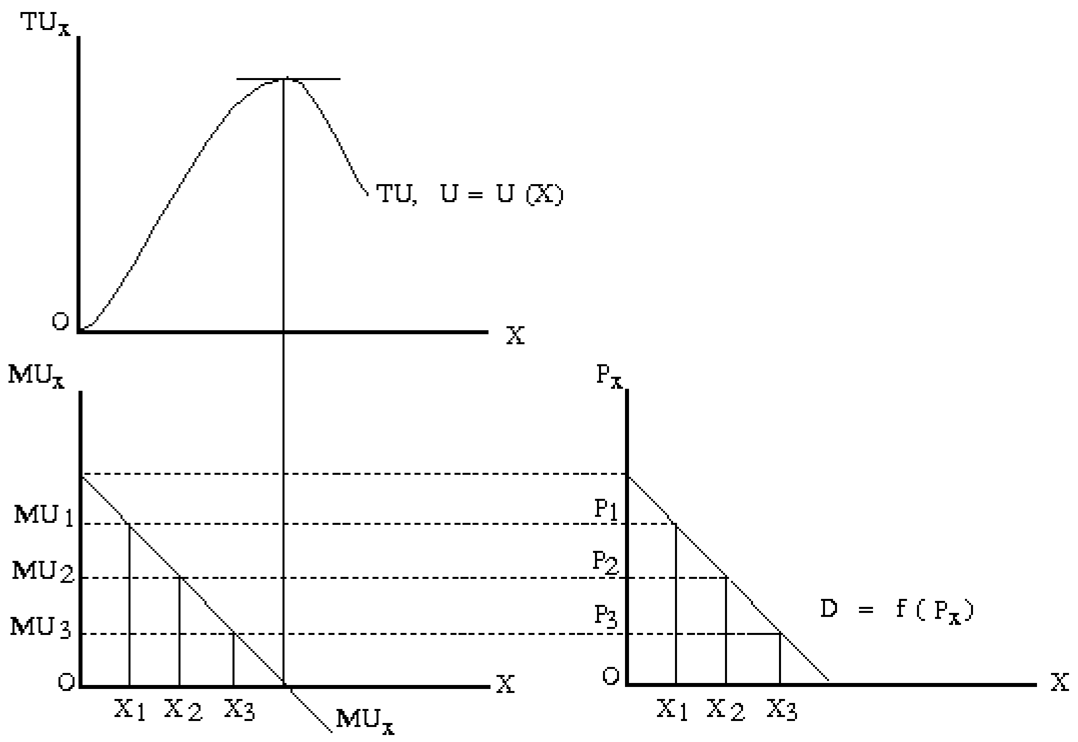


การหาเส้นอุปสงค์โดยวิธี Cardinal Utility Approach

1. กรณีที่บริโภคสินค้าชนิดเดียว

การหาเส้นอุปสงค์ของผู้บริโภคอาศัยข้อสมมติฐานที่ว่า อรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้าลดน้อยถอยลง (diminshing marginal utility) ในกรณีที่บริโภคสินค้าชนิดเดียว อรรถประโยชน์เพิ่ม (MU) ของสินค้า ก็คือค่า Slope ของฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์รวม (TU) เส้น TU เพิ่มขึ้นแต่เพิ่มในอัตราที่ลดลง จนกระทั่ง TU สูงสุดแล้ว ถ้าบริโภคสินค้าเพิ่มขึ้น TU จะลดลง ดังนั้น MU จะลดลงอย่างต่อเนื่อง และจะมีค่าเป็นลบเมื่อ TU มีค่าลดลง

รูปที่ 1 – 3 การสร้างเส้นอุปสงค์โดยวิธี Cardinal Utility Approach



ถ้าสมมุติอรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้ายมีค่าคงที่เท่ากับ 1 util/บาท เนื่องจากผู้บริโภคจะได้รับอรรถประโยชน์สูงสุดจากการบริโภคสินค้าชนิดหนึ่งเมื่อใช้จ่ายซื้อสินค้าจนกระทั่งอรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้า เท่ากับราคาต่อหน่วยของสินค้านั้น ดังนั้นเส้นอุปสงค์สำหรับสินค้า X คือส่วนที่เส้น MU ของสินค้า X มีค่าเป็นบวก ทั้งนี้เพราะราคาสินค้าที่มีค่าเป็นลบจะไม่สมเหตุผลในทางเศรษฐศาสตร์ ในรูปที่ 1 – 3 การบริโภคสินค้า X จำนวน X_1 หน่วย อรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้า X เท่ากับ MU_1 ยูทิล ซึ่งถ้าวัด MU ในรูปของหน่วยเงินตรา (monetary units) สมมติ MU_1 มีค่าเท่ากับราคา P_1 บาท ดังนั้น ณ ระดับราคา P_1 บาทต่อหน่วย อุปสงค์ของผู้บริโภคสำหรับสินค้า X เท่ากับ X_1 หน่วย ในทำนองเดียวกัน การบริโภคสินค้า X จำนวน X_2 หน่วย อรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้ามีค่าเท่ากับ MU_2 ยูทิล ซึ่งมีค่าเท่ากับราคา P_2 บาทต่อ

หน่วย และพิจารณาในทำนองเดียวกันสำหรับสินค้าปริมาณอื่นๆ ก็จะได้เส้นอุปสงค์สำหรับสินค้า X โดยเส้น อุปสงค์ในกรณีนี้ก็คือเส้นอรรถประโยชน์ของสินค้า X (MU_X) ในส่วนที่มีค่าเป็นบวก และจากการที่วิธีการ Cardinal Utility Approach ตั้งข้อสมมติฐานว่าอรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้าลดน้อยถอยลง (diminishing marginal utility) จึงทำให้เส้นอุปสงค์มี Slope เป็นลบ แต่การที่เส้นอุปสงค์ที่มีค่า Slope เป็นลบ อย่างไรก็ตามมีข้อโต้แย้งว่าการที่เส้นอุปสงค์ที่มีค่า Slope เป็นลบ ไม่จำเป็นต้องมีอรรถประโยชน์เพิ่มลดลง ดังจะได้พิจารณาให้เห็นชัดเจนในหัวข้อข้อวิจารณ์ของ Cardinal Utility Approach

การหาสมการอุปสงค์สำหรับสินค้าโดยทางคณิตศาสตร์

สมมุติอรรถประโยชน์เพิ่มของเงิน MU_X คงที่เท่ากับ λ ยูทิล และราคาต่อหน่วยของเงิน (P_m) เท่ากับ 1 บาท นั่นคืออรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้าย ($\frac{MU_m}{P_m}$) เท่ากับ λ ยูทิล/บาท

ถ้าฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้า X คือ

$$MU_X = b - mX \qquad \text{โดยที่} \quad b > 0,\ m > 0$$

จะหาสมการอุปสงค์ของสินค้า X ได้ดังนี้

เนื่องจากผู้บริโภคจะได้รับอรรถประโยชน์สูงสุดจากการบริโภคสินค้า X ณ จุดที่

$$\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_m}{P_m}$$

ดังนั้น

$$\frac{b - mX}{P_X} = \lambda$$

$$X = \frac{b - \lambda P_X}{m} \qquad \ldots.(1-5)$$

สมการที่ (1 - 5) จะเป็นสมการอุปสงค์สำหรับสินค้า X

ตัวอย่างการหาสมการอุปสงค์

สมมุติฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้า X คือ

$$MU_X = 150 - 2X$$

และสมมุติอรรถประโยชน์เพิ่มของเงิน MU_X คงที่เท่ากับ 3 ยูทิล และราคาต่อหน่วยของเงิน (P_m) เท่ากับ 1 บาท จงหาสมการอุปสงค์สำหรับสินค้า X

จากเงื่อนไขดุลยภาพของผู้บริโภคอยู่ที่

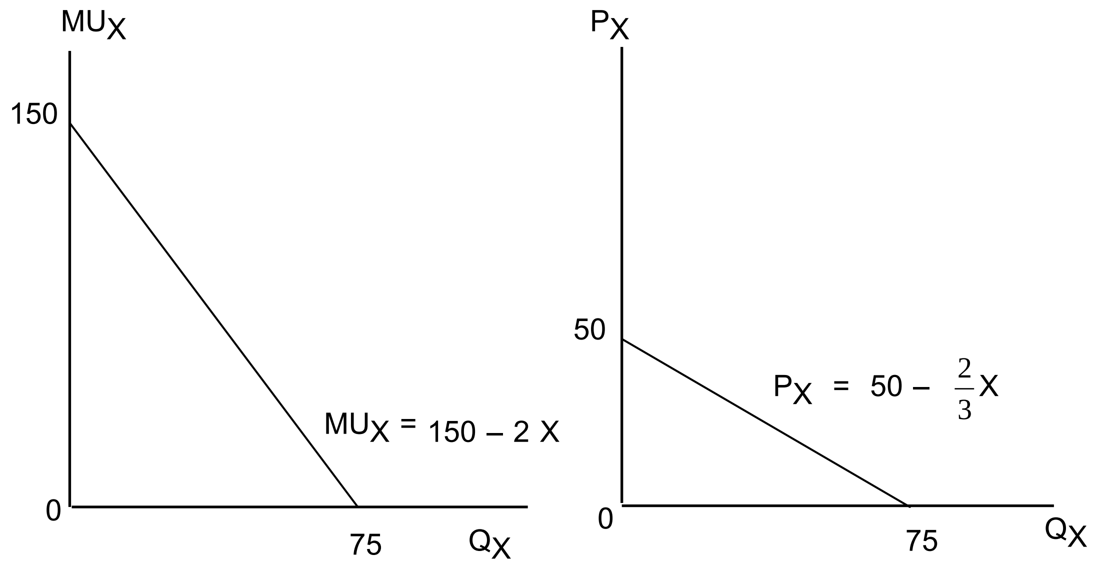
$$\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_m}{P_m}$$

ดังนั้น
$$\frac{150 - 2X}{P_X} = 3$$

$$P_X = 50 - \frac{2}{3}X$$

จากข้อสรุปที่ได้สามารถแสดงได้ในรูปที่ 1 – 4

รูปที่ 1 – 4 แสดงเส้นอุปสงค์สำหรับสินค้า X



2. กรณีบริโภคสินค้าหลายชนิด

ผู้บริโภคจะได้รับความพอใจสูงสุดจากการบริโภคสินค้าเมื่อใช้จ่ายจนกระทั่งอรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้ายของสินค้าแต่ละชนิดเท่ากันพอดี

เงื่อนไขดุลยภาพของผู้บริโภคเมื่อบริโภคสินค้า n ชนิดอยู่ที่

$$\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_Y}{P_Y} = \ldots\ldots = \frac{MU_n}{P_n}$$

และสมการงบประมาณจำกัดคือ

$$I = \sum_{i=X}^{n} P_i Q_i \qquad \text{โดยที่ } i = X, Y, \ldots, n$$

สมมติว่าผู้บริโภคซื้อสินค้า 2 ชนิด คือ สินค้า X และสินค้า Y ด้วยรายได้จำกัดเท่ากับ I_1 บาท ราคาต่อหน่วยของสินค้า X และสินค้า Y เท่ากับ P_{X_1} และ P_{Y_1} บาท ตามลำดับ โดยให้ราคาสินค้า X แพงกว่าราคาสินค้า Y เป็น 2 เท่า นั่นคือ $P_{X_1} = 2P_{Y_1}$ และสมมติว่าผู้บริโภคได้รับความพอใจสูงสุดด้วยรายได้ที่มีอยู่อย่างจำกัดโดยบริโภคสินค้า X และสินค้า Y จำนวน X_1 และ Y_1 หน่วยตามลำดับ โดยอรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้า X และสินค้า Y เท่ากับ MU_{X_1} และ MU_{Y_1} utils ตามลำดับ ดังนั้นดุลยภาพของผู้บริโภคอยู่ ณ จุดที่

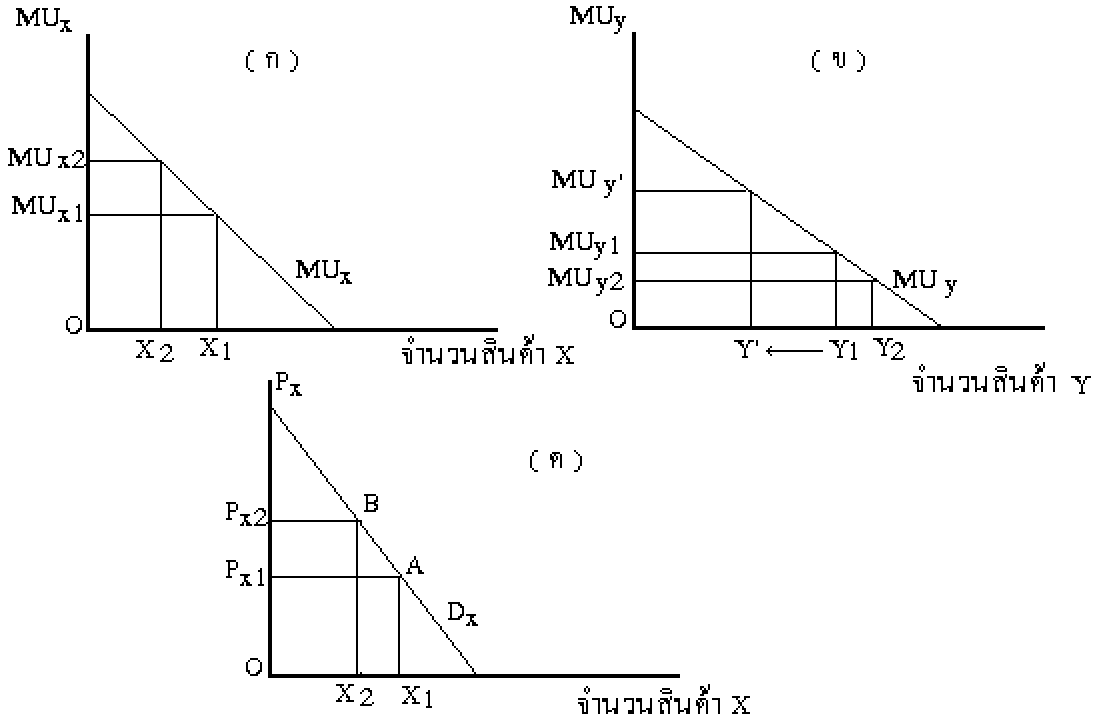
$$\frac{MU_{X_1}}{P_{X_1}} = \frac{MU_{Y_1}}{P_{Y_1}}$$

$$I_1 = P_{X_1} \cdot X_1 + P_{Y_1} \cdot Y_1$$

โดย $MU_{X_1} = 2\,MU_{Y_1}$

และจากข้อมูลเงื่อนไขดุลยภาพของผู้บริโภคนี้ สามารถที่จะกำหนดจุดๆ หนึ่งบนเส้นอุปสงค์ของสินค้า X ได้ โดยเมื่อราคาสินค้า X เท่ากับ P_{X_1} บาทต่อหน่วย ผู้บริโภคจะซื้อสินค้า X จำนวน X_1 หน่วย การแสดงการหาเส้นอุปสงค์พิจารณาได้จากรูปที่ 1 – 5

รูปที่ 1 – 5 แสดงการหาเส้นอุปสงค์สำหรับสินค้า X จากเงื่อนไขดุลยภาพของผู้บริโภค



จากรูปที่ 1 – 5 (ก) และ (ข) อรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้า X และสินค้า Y แสดงโดยเส้น MU_X และ MU_Y โดยเหตุที่ P_{X_1} สูงกว่า P_{Y_1} เป็น 2 เท่า ดังนั้น ณ จุดดุลยภาพของผู้บริโภค ถ้าผู้บริโภคซื้อสินค้า X จำนวน X_1 หน่วย และซื้อสินค้า Y จำนวน Y_1 หน่วย จะต้องได้ว่า OMU_{X_1} มีค่าเป็น 2 เท่าของ OMU_{Y_1} เมื่อทราบว่าราคาสินค้า X เท่ากับ P_{X_1} บาทต่อหน่วย ผู้บริโภคจะซื้อสินค้า X เท่ากับ X_1 หน่วย ก็นำเอาความสัมพันธ์ที่ได้มานี้กำหนดจุดๆ หนึ่งบนเส้นอุปสงค์สำหรับสินค้า X ได้ในรูปที่ 1 – 5 (ค) สมมติว่าเป็นจุด A

ต่อไปสมมติว่า ราคาสินค้า X เพิ่มขึ้นจาก P_{X_1} บาทต่อหน่วยเป็น P_{X_2} บาทต่อหน่วย ถ้าสมมติว่าผู้บริโภคต้องการบริโภคสินค้า X ปริมาณ X_1 หน่วยเท่าเดิม ดังนั้น

MU_X จะคงเดิม จะทำให้

$$\frac{MU_{X_1}}{P_{X_1}} < \frac{MU_{X_1}}{P_{X_2}}$$

แต่เนื่องจากผู้บริโภคมีรายได้จำนวนจำกัด ดังนั้นเมื่อผู้บริโภคยังคงซื้อสินค้า X จำนวน X_1 หน่วยเท่าเดิม ในขณะที่ราคาสินค้า X เพิ่มขึ้นจาก P_{X_1} บาทต่อหน่วย เป็น P_{X_2} บาทต่อหน่วย ทำให้รายจ่ายในการซื้อสินค้า X เพิ่มขึ้น ผู้บริโภคจึงมีเงินเหลือซื้อสินค้า Y ลดลงจาก Y_1 หน่วยเป็น Y' หน่วย แต่การซื้อสินค้า Y ลดลงนี้ จะทำให้ MU_Y เพิ่มขึ้นจาก MU_{Y_1} utils เป็น $MU_{Y'}$ utils ซึ่งมีผลทำให้ผู้บริโภคไม่ได้อยู่ ณ จุดดุลยภาพ โดย

$$\frac{MU_{X_1}}{P_{X_2}} < \frac{MU_{Y'}}{P_{Y_1}}$$

ทั้งนี้เพราะแต่เดิม MU_{X_1} มากกว่า MU_{Y_1} เป็น 2 เท่า แต่เมื่อผู้บริโภคซื้อสินค้า Y ลดลง ทำให้ MU_Y เพิ่มขึ้นจาก MU_Y เป็น $MU_{Y'}$ จึงมีผลให้ MU_{X_1} มากกว่า $MU_{Y'}$ ไม่ถึง 2 เท่า และ P_{X_2} ก็สูงกว่า P_{X_1}

เมื่อผู้บริโภคไม่ได้อยู่ ณ จุดดุลยภาพ การที่จะอยู่ดุลยภาพได้จะต้องเพิ่ม MU_X ให้สูงขึ้น จึงต้องลดการบริโภคสินค้า X ลง และนำเงินส่วนที่เหลือไปบริโภคสินค้า Y มากขึ้น ซึ่งมีผลให้ MU_Y มีค่าลดลง สมมติผู้บริโภคเปลี่ยนแปลงการบริโภคสินค้า X และสินค้า Y จาก X_1 เป็น X_2 หน่วย และจาก Y_1 เป็น Y_2 หน่วย ซึ่งมีผลทำให้ผู้บริโภคได้ดุลยภาพอีกครั้งหนึ่ง โดยการบริโภคปริมาณดังกล่าวนี้ ทำให้อรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้า X และสินค้า Y เท่ากับ MU_{X_2} และ MU_{Y_2} utils โดยที่ $MU_{X_2} > MU_{X_1}$ และ $MU_{Y_2} < MU_{Y_1}$ และ $X_2 < X_1$ และ $Y_2 > Y_1$ ดังนั้นจุดดุลยภาพใหม่ของผู้บริโภคคือ

$$\frac{MU_{X_2}}{P_{X_2}} = \frac{MU_{Y_2}}{P_{Y_1}}$$

$$I_1 = P_{X_2}.X_2 + P_{Y_1}.Y_2$$

จากที่พิจารณาดังกล่าวข้างต้นนี้ สรุปได้ว่าถ้ารายได้และราคาสินค้า Y คงที่ เมื่อราคาสินค้า X แพงขึ้น ผู้บริโภคจะลดการซื้อสินค้า X ลง และในทำนองเดียวกันจะสามารถพิจารณาในกรณีที่ราคาสินค้า X มีราคาถูกลง ซึ่งจะได้ว่าผู้บริโภคจะซื้อสินค้า X เพิ่มขึ้น การพิจารณาดังกล่าวนี้เป็นการอธิบายพฤติกรรมของผู้บริโภคในการซื้อสินค้าที่ทำให้ได้ รับความพอใจสูงสุด

ถ้านำความสัมพันธ์ของราคาและปริมาณความต้องการซื้อมากำหนดจุดความสัมพันธ์จะได้เส้นอุปสงค์ของสินค้า เช่นจากที่พิจารณาข้างต้นสรุปได้ว่า เมื่อราคาสินค้า X เท่ากับ P_{X_1} บาทต่อหน่วย จะทำให้ปริมาณซื้อสินค้า X เท่ากับ X_1 หน่วย ก็จะได้จุดหนึ่งบนเส้นอุปสงค์สำหรับสินค้า X สมมุติว่าเป็นจุด A ในรูปที่ 1 – 5 (ค) ต่อมาเมื่อราคาสินค้า X แพงขึ้นเป็น P_{X_2} บาทต่อหน่วย ผู้บริโภคจะลดปริมาณสินค้า X ลง ทำให้ปริมาณซื้อ X เท่ากับ X_2 หน่วย สมมติเป็นจุด B ในรูปที่ 1 - 5 (ค) และต่อไปสมมติราคาสินค้า X เปลี่ยนแปลงไปอีก ก็จะใช้วิธีการเดียวกับที่พิจารณามาแล้ว ถ้าลากเส้นเชื่อมจะดความสัมพันธ์ของราคาและปริมาณความต้องการซื้อสินค้า X ก็จะได้เส้นอุปสงค์สำหรับสินค้า X

ตัวอย่างการคำนวณหาสมการอุปสงค์สำหรับสินค้าที่ได้รับอรรถประโยชน์สูงสุด

สมมติฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์รวมสำหรับการบริโภคสินค้า X และสินค้า Y เป็นฟังก์ชั่นของปริมาณสินค้า X และสินค้า Y คือ

$$U = U(X, Y)$$

ความพอใจในการบริโภคสินค้า X และสินค้า Y เป็นเอกเทศต่อกัน โดยอรรถประโยชน์รวมจากการบริโภคสินค้า X และสินค้า Y มีรูปสมการคือ

$$TU_X = \ln X$$

$$TU_Y = \ln Y$$

ถ้ารายได้ของผู้บริโภคมีจำกัดเท่ากับ I บาท และราคาสินค้า X และสินค้า Y เท่ากับ P_X และ P_X บาทต่อหน่วย จะหาสมการอุปสงค์ของสินค้า X และสินค้า Y ที่ได้รับอรรถประโยชน์สูงสุดได้ดังนี้

จากฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์รวมของสินค้า X และสินค้า Y ที่กำหนดให้ จะได้อรรถประโยชน์รวมสำหรับการบริโภคของงสินค้า X และสินค้า Y คือ

$$U = \ln X + \ln Y$$

อรรถประโยชน์เพิ่มของงสินค้า X และสินค้า Y คือ

$$MU_X = \frac{1}{X}$$

$$MU_y = \frac{1}{Y}$$

จะเห็นได้ว่าอรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้า X และสินค้า Y เป็นไปตามกฎการลดน้อยถอยลงของอรรถประโยชน์เพิ่ม

ถ้าผู้บริโภคมีรายได้จำกัด เท่ากับ I บาท และราคาต่อหน่วยของสินค้า X และสินค้า Y เท่ากับ P_X และ P_Y บาทต่อหน่วย ตามลำดับ สมการอุปสงค์สำหรับสินค้า X และสินค้า Y สามารถหาได้ดังนี้

จากสมการของ Lagrange คือ

$$Z = \ln X + \ln Y + \lambda\,(I - P_X.\,X - P_Y.\,Y)$$

First Order Condition สำหรับค่าสูงสุดของ U โดยการหา Partial derivative สมการ Z มุ่งตรงต่อ X , Y และ λ แล้วให้เท่ากับศูนย์

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{1}{X} - \lambda P_X = 0 \qquad \ldots.(1-6)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{1}{Y} - \lambda P_Y = 0 \qquad \ldots.(1-7)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = I - P_X.X - P_Y.Y = 0 \qquad \ldots.(1-8)$$

จากสมการที่ (1 – 6) , (1 – 7) และ (1 – 8) หาค่าของ X, Y และ λ ได้

ดังนั้นสมการอุปสงค์ของสินค้า X และสินค้า Y คือ

$$X = \frac{I}{2P_X}$$

$$Y = \frac{I}{2P_Y}$$

และสมการอรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้าย (λ) คือ

$$\lambda = \frac{2}{I}$$

จากสมการอุปสงค์ของสินค้า X และสินค้า Y จะเห็นได้ว่าถ้า I คงที่ การเปลี่ยนแปลงในราคาของสินค้า จะทำให้ปริมาณความต้องการซื้อของสินค้านั้นเปลี่ยนแปลงในทิศทางตรงกันข้าม

ถ้าทราบค่าของ I, P_X และ P_X ก็จะทราบปริมาณการบริโภคของสินค้า X และสินค้า Y และอรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้าย (λ) ที่ทำให้ได้รับอรรถประโยชน์สูงสุดได้

ข้อวิจารณ์ Cardinal Utility Approach

ข้อสมมติฐานของ Cardinal Utility Approach มีจุดอ่อนหลายประการ คือ

1. ในความเป็นจริง อรรถประโยชน์ หรือความพอใจที่ได้รับจากสินค้าต่างๆ ไม่มีผู้บริโภคคนใดวัดออกมาเป็นหน่วยนับ

2. ข้อสมมติฐานที่ว่าอรรถประโยชน์เพิ่มของเงินคงที่ (constant marginal utility of money) ไม่เป็นจริง ทั้งนี้เพราะ เมื่อรายได้เพิ่มสูงขึ้น อรรถประโยชน์เพิ่มของเงินจะเปลี่ยนแปลง

3. ข้อสมมติฐานที่ว่าอรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้าจะลดน้อยถอยลง

(diminishing marginal utility) ซึ่งอาจจะไม่เป็นจริงเสมอไป เพราะสินค้าบางอย่าง เช่น ทองคำ เพชร พลอย ฯลฯ เมื่อผู้บริโภคได้รับสินค้าเหล่านี้มา อรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้าเพิ่มขึ้น แทนที่จะลดลง

4. จากข้อสมมติฐาน ของ Cardinal Utility Approach ที่ว่าอรรถประโยชน์รวมของสินค้าจะมีลักษณะเป็นอิสระต่อกัน (independent) และสามารถบวกเพิ่มเติมเข้าไปได้ (additivity) และอรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้าลดน้อยถอยลง (diminishing marginal utility) ซึ่งถ้าสมมติฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ที่ไม่เป็นไปตามข้อสมมติฐานข้างต้น ก็สามารถหาสมการอุปสงค์ได้อย่างเดียวกัน ดังพิจารณาได้ดังนี้

สมมุติฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์รวมจากการบริโภคสินค้า X และสินค้า Y คือ

$$U = XY$$

ดังนั้น $$MU_X = \frac{\partial U}{\partial X} = Y$$

$$MU_Y = \frac{\partial U}{\partial Y} = X$$

จะเห็นว่าฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ไม่เป็นไปตามข้อสมมติฐานของ Cardinal Utility Approach คือมีลักษณะขึ้นอยู่ต่อกัน (dependent) และไม่สามารถบวกเพิ่มเติมเข้าไปได้ (non-additivity) และอรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้ามีลักษณะคงที่ (constant marginal utility)

ถ้ากำหนดให้ผู้บริโภคมีรายได้เท่ากับ I บาท และราคาต่อหน่วยของสินค้า X และ สินค้า Y เท่ากับ P_X และ P_Y บาทต่อหน่วย สมการอุปสงค์สำหรับสินค้า X และสินค้า Y สามารถหาได้ดังนี้

จากดุลยภาพของผู้บริโภค $$\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_Y}{P_Y}$$

และ $$I = P_X.X + P_Y.Y$$

แทนค่า MU_X และ MU_Y จะได้

$$\frac{Y}{P_X} = \frac{X}{P_Y}$$

$$\therefore \quad P_X.X = P_Y.Y$$

แทนค่า $P_X.X = P_Y.Y$ ในสมการงบประมาณจะได้

$$X = \frac{I}{2P_X}$$ ซึ่งเป็นสมการอุปสงค์ของสินค้า X

$$Y = \frac{I}{2P_Y}$$ ซึ่งเป็นสมการอุปสงค์ของสินค้า Y

ในกรณีที่ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์รวมของสินค้า X และสินค้า Y มีลักษณะขึ้นอยู่ต่อกัน (dependent) และไม่สามารถบวกเพิ่มเติมเข้าไปได้ (non - additivity) และอรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้ามีลักษณะเพิ่มขึ้น (increasing marginal utility)โดยมีรูปสมการ คือ

$$U = X^2 Y^2$$

$$MU_X = \frac{\partial U}{\partial X} = 2XY^2$$

$$MU_Y = \frac{\partial U}{\partial Y} = 2X^2Y$$

โดยกำหนดข้อมูลเกี่ยวกับรายได้ และราคาสินค้า X และสินค้า Y เหมือนเดิม จะหาสมการอุปสงค์ของสินค้า X และสินค้า Y ได้ดังนี้

เงื่อนไขดุลยภาพของผู้บริโภคที่ได้รับอรรถประโยชน์สูงสุด คือ

$$\frac{2XY^2}{P_X} = \frac{2X^2Y}{P_Y}$$

หรือ $P_X.X = P_Y.Y$

แทนค่า $P_X.X = P_Y.Y$ ในสมการงบประมาณจะได้

$$X = \frac{I}{2P_X}$$ ซึ่งเป็นสมการอุปสงค์ของสินค้า X

$$Y = \frac{I}{2P_Y}$$ ซึ่งเป็นสมการอุปสงค์ของสินค้า Y

จะเห็นได้ว่าการฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์รวมที่มีลักษณะต่างกันแต่จะได้สมการอุปสงค์ที่เหมือนกัน ดังนั้นข้อสมมุติต่าง ๆ ในการวัดอรรถประโยชน์แบบหน่วยนับ (Cardinal Utility Approach) จึงไม่จำเป็นต้องอธิบายพฤติกรรมของเส้นอุปสงค์เสมอไป ทั้งนี้เพราะสามารถหาข้อสรุปได้เหมือนกันจากข้อสมมุติฐานที่แตกต่างกัน นั่นคือการที่ตั้งข้อสมมุติฐานว่าอรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้ามีลักษณะลดน้อยถอยลง (diminishing marginal utility) จึงทำให้เส้นอุปสงค์มี Slope เป็นลบ แต่จากที่พิจารณาดังกล่าวข้างต้นนี้เส้นอุปสงค์ที่มี Slope เป็นลบ ไม่จำเป็นต้องมีอรรถประโยชน์เพิ่มลดลง

การวิเคราะห์พฤติกรรมของผู้บริโภคโดยอาศัยการเรียงลำดับอรรถประโยชน์ (Ordinal Utility Approach)

เนื่องจากการวิเคราะห์พฤติกรรมของผู้บริโภคโดยอาศัยการวัดอรรถประโยชน์ออกมาเป็นหน่วยนับมีจุดอ่อน จึงได้พัฒนาการวิเคราะห์พฤติกรรมของผู้บริโภคเป็นการวิเคราะห์โดยอาศัยการเรียงลำดับอรรถประโยชน์

ข้อสมมติฐานในการวิเคราะห์ ได้แก่

1. ความมีเหตุผล (Rationality) สมมุติว่าผู้บริโภคเป็นผู้ที่มีเหตุผลโดยมุ่งที่จะแสวงหาอรรถประโยชน์สูงสุด เมื่อกำหนดรายได้ และราคาสินค้ามาให้ และผู้บริโภคมีความรู้ความสมบูรณ์เต็มที่เกี่ยวกับข้อมูลทั้งหมด

2. ผู้บริโภคสามารถเรียงลำดับอรรถประโยชน์ที่ได้รับจากสินค้า (Utility is ordinal) โดยผู้บริโภคจะเรียงลำดับความพอใจที่ได้รับจากสินค้าแต่ละกลุ่มว่ามากกว่า น้อยกว่า หรือเท่ากัน ซึ่งเรียกว่า Completeness ถ้าลำดับของความพอใจที่ได้รับจากสินค้ากลุ่มต่างๆ เท่ากัน ก็จะทำให้ได้เส้นความพอใจเท่ากัน (Indifference Curve : IC) และความพอใจจะถูกเรียงลำดับในรูปของแผนภาพของเส้นความพอใจเท่ากัน

3. อรรถประโยชน์รวมของผู้บริโภคขึ้นอยู่กับจำนวนของสินค้าที่บริโภค โดยผู้บริโภคจะเห็นว่าสินค้าเป็นสิ่งที่น่าปรารถนาจึงทำให้กลุ่มของสินค้าที่มีจำนวนมากจะให้ความพอใจมากกว่ากลุ่มของสินค้าที่มีจำนวนน้อย (more is prefered to less)

4. ความพอใจของผู้บริโภคมีลักษณะคงเส้นคงวา (consistency) กล่าวคือ ถ้าช่วงเวลาหนึ่ง ผู้บริโภคได้เรียงลำดับความพอใจ โดยชอบกลุ่มของสินค้ากลุ่ม A มากกว่ากลุ่ม B ผู้บริโภคก็จะไม่กลับไปชอบของสินค้ากลุ่ม B มากกว่ากลุ่มของสินค้ากลุ่ม A ในอีกช่วงเวลาหนึ่ง นอกจากนี้ความสัมพันธ์ระหว่างสินค้าสามารถถ่ายทอดได้ (Transitivity) กล่าวคือถ้า ผู้บริโภคชอบกลุ่มของสินค้ากลุ่ม A มากกว่ากลุ่ม B และชอบกลุ่มของสินค้ากลุ่ม B มากกว่ากลุ่ม C ก็จะสามารถถ่ายทอดได้ว่า ผู้บริโภคชอบกลุ่มของสินค้ากลุ่ม A มากกว่ากลุ่ม C นั่นคือ รสนิยมของผู้บริโภคและลำดับความพอใจระหว่างส่วนผสมของสินค้าจะเป็นไปอย่างสม่ำเสมอคงเส้นคงวา

5. อัตราการทดแทนกันของสินค้ามีลักษณะลดลง (Diminishing marginal rate of substitution) ซึ่งแสดงว่าลักษณะของเส้นแห่งความพอใจเท่ากันจะมีลักษณะโค้งเข้าหาจุดต้นกำเนิด (Convex to the origin)

ในการพิจารณาดุลยภาพของผู้บริโภค (Consumer's Equilibrium) ซึ่งแสดงการหาเงื่อนไขการเลือกกลุ่มของสินค้าที่ทำให้ได้อรรถประโยชน์สูงสุด จะต้องใช้เส้นแห่งควาพอใจเท่ากัน และเส้นงบประมาณมาวิเคราะห์

ความชอบของผู้บริโภค

ในการเปรียบเทียบความพอใจกลุ่มของสินค้าต่าง ๆ ที่บริโภค ผู้บริโภคมีข้อสมมุติพื้นฐานดังนี้

1. ผู้บริโภคสามารถเปรียบเทียบได้อย่างครบถ้วนกับสินค้ากลุ่มอื่น ๆ ทั้งหมดที่มีอยู่ว่าพอใจกลุ่มใดมากหรือน้อยกว่ากลุ่มใด

2. ความพอใจสามารถถ่ายทอดได้ (Transitivity) กล่าวคือ ถ้าผู้บริโภคพอใจสินค้ากลุ่ม A มากกว่ากลุ่ม B และพอใจกลุ่ม B มากกว่ากลุ่ม C ก็ย่อมพอใจกลุ่ม A

มากกว่า C

3. กลุ่มของสินค้าที่มีจำนวนมากย่อมให้ความพอใจแก่ผู้บริโภคมากกว่ากลุ่มของสินค้าที่มีจำนวนน้อย

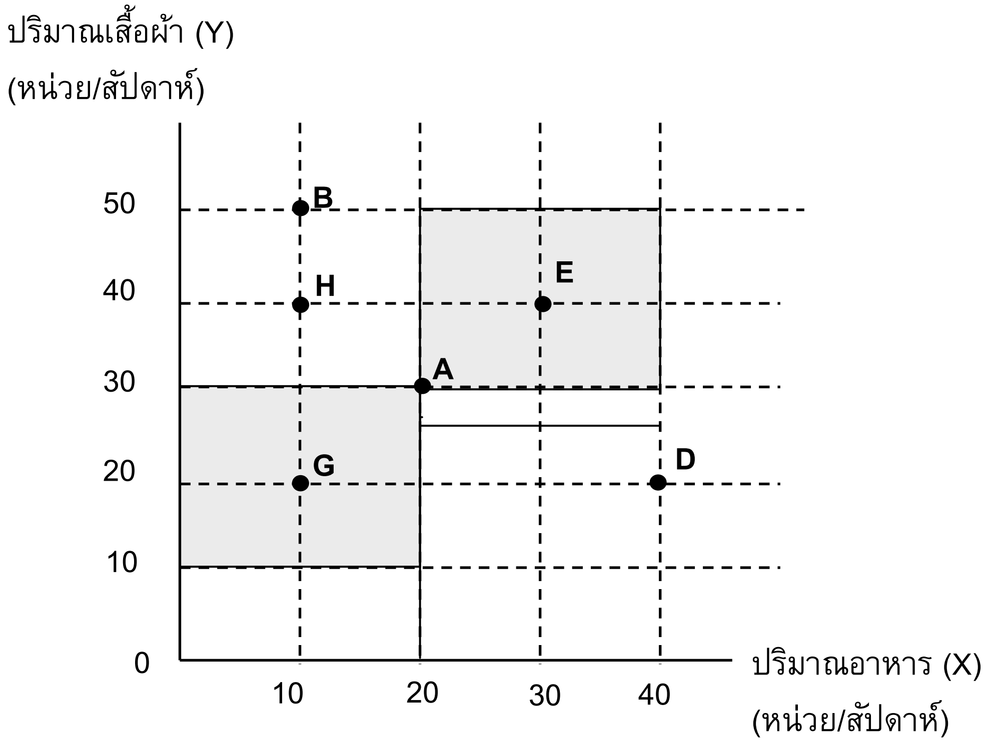
ถ้าสมมุติว่าสินค้า 2 ชนิด คือ อาหาร (X) และเสื้อผ้า (Y) สามารถจัดเป็นกลุ่มของสินค้าได้ 6 กลุ่มทางเลือก ดังนี้

ตารางที่ 1 – 1 กลุ่มต่าง ๆ ของการบริโภคสินค้า

กลุ่มสินค้า	ปริมาณอาหาร (X) (หน่วย/สัปดาห์)	ปริมาณเสื้อผ้า (Y) (หน่วย/สัปดาห์)
A	20	30
B	10	50
D	40	20
E	30	40
G	10	20
H	10	40

จากตารางสามารถนำไปเขียนเป็นรูปได้ดังรูปที่ 1 – 6

รูปที่ 1 – 6 แสดงระดับความพอใจของบุคคล



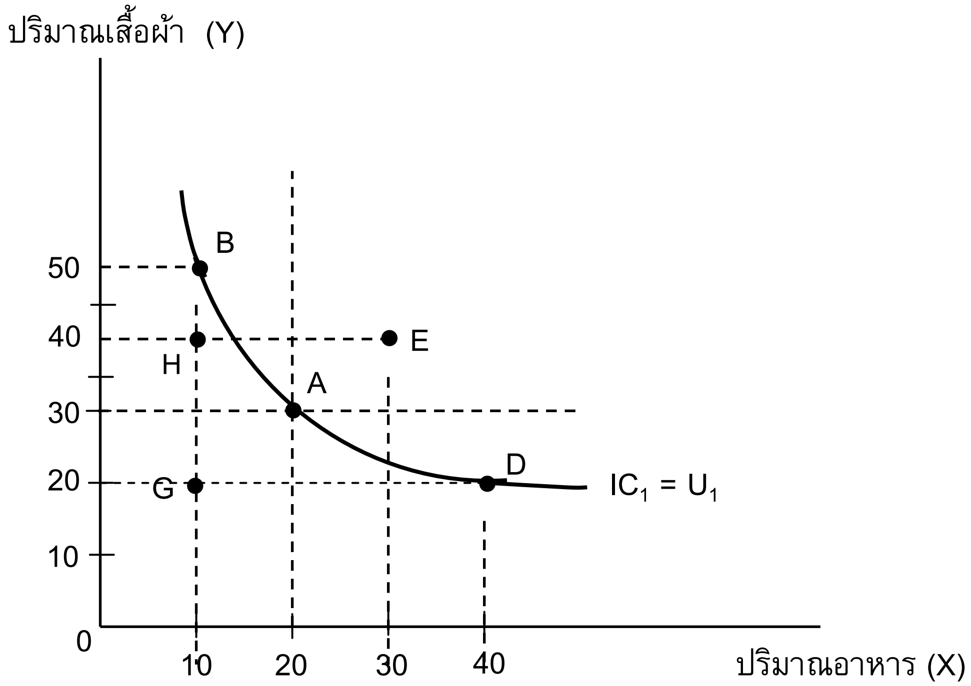
เนื่องจากผู้บริโภคจะพอใจกลุ่มของสินค้าที่มีจำนวนมากมากกว่ากลุ่มของสินค้าที่มีจำนวนน้อย จึงทำให้สามารถสรุปได้ว่า ผู้บริโภคพอใจสินค้ากลุ่ม A มากกว่ากลุ่ม G และพอใจกลุ่ม E มากกว่ากลุ่ม A แต่การจะเปรียบเทียบความพอใจกลุ่ม A กับกลุ่ม B , D หรือกลุ่ม H ยังไม่สามารถสรุปได้จนกว่าจะมีข้อมูลเพิ่มเติม

ถ้าผู้บริโภคสามารถเปรียบเทียบได้อย่างครบถ้วนกับสินค้ากลุ่มอื่น ๆ ทั้งหมดที่มีอยู่ว่าพอใจกลุ่มใดมากหรือน้อยกว่ากลุ่มใด จากตารางและรูปเมื่อพิจารณาข้อสมมุติทำให้สรุปได้ว่าผู้บริโภคพอใจกลุ่ม A มากกว่ากลุ่ม G และพอใจกลุ่ม E มากกว่ากลุ่ม A แต่การจะเปรียบเทียบระหว่างกลุ่ม A กับกลุ่ม B , D หรือ H ยังไม่สามารถหาคำตอบ ได้จนกว่าจะมีข้อมูลเพิ่มเติม

เส้นความพอใจเท่ากัน (Indifference Curve: IC)

ถ้ามีข้อมูลเพิ่มเติมว่า กลุ่มของการบริโภคอาหารและเสื้อผ้ากลุ่ม A , B และ D ซึ่งบริโภคสินค้าทั้งสองชนิดปริมาณต่างกันแต่ให้ความพอใจเท่ากันเท่ากับ U_1 กลุ่มของการบริโภคกลุ่ม A , B และ D จะอยู่บนเส้นความพอใจเท่ากันเส้นเดียวกัน (U_1) แสดงว่าทางเลือกทั้งสามทางเลือกให้ความพอใจต่อผู้บริโภคไม่ต่างกัน เมื่อลากเส้นที่แสดงส่วนผสมต่าง ๆ กันของปริมาณการบริโภคสินค้า 2 ชนิดที่ให้ความพอใจเท่ากันก็จะได้เส้นความพอใจเท่ากันได้ดังรูปที่ 1 – 7

รูปที่ 1 – 7 เส้นความพอใจเท่ากัน



ดังนั้น **เส้นความพอใจเท่ากัน (Indifference Curve: IC)** จึงเป็นเส้นที่แสดงส่วนผสม (ทางเลือก) ต่างๆ กันของปริมาณการบริโภคสินค้า 2 ชนิดที่ทุกๆ ส่วนประกอบให้ความพอใจเท่ากัน

จากรูปที่ 1 – 7 จะสามารถเปรียบเทียบกลุ่ม A กับทุกกลุ่มที่เหลือได้ว่า

(1) กลุ่มสินค้า A ให้ความพอใจมากกว่ากลุ่ม H และ G เนื่องจาก H อยู่ใต้เส้น IC_1

(2) กลุ่มสินค้า A ให้ความพอใจเท่ากับกลุ่ม B และ D เนื่องจากอยู่บนเส้น IC_1 เหมือนกัน

(3) กลุ่มสินค้า A ให้ความพอใจน้อยกว่ากลุ่ม E

ในการบริโภคสินค้า 2 ชนิด คือ อาหารและเสื้อผ้าจะได้ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ คือ

$$U = U(X, Y)$$

โดยที่ U = อรรถประโยชน์ทั้งหมด

X = ปริมาณเสื้อผ้าที่บริโภค

Y = ปริมาณอาหารที่บริโภค

ในการบริโภคสินค้ากลุ่มต่าง ๆ บนเส้นความพอใจเท่ากัน(Indifference Curve: U) เส้นเดียวกันจะได้รับความพอใจเท่ากัน ดังนั้นสมการของเส้นความพอใจเท่ากัน (Idifference Curve Equation) คือ

$$U^o = U(X, Y) = k$$

โดยที่ k คือ ค่าคงที่

total differential ของฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ คือ

$$dU^o = \frac{\partial U}{\partial X} dX + \frac{\partial U}{\partial Y} dY$$

$$dU^o = U_X dX + U_Y dY \qquad \text{. . . . . (1 – 9)}$$

สมการที่ (1 – 9) แสดงให้เห็นว่าการเปลี่ยนแปลงทั้งหมดในอรรถประโยชน์อันเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงในจำนวนการบริโภคสินค้า X และสินค้า Y เท่ากับอรรถประโยชน์เพิ่มจากการเปลี่ยนแปลงไปหนึ่งหน่วยของสินค้า X คูณด้วยการ

เปลี่ยนแปลงในจำนวนสินค้า X บวกด้วย อรรถประโยชน์เพิ่มจากการเปลี่ยนแปลงไปหนึ่งหน่วยของสินค้า Y คูณด้วยการเปลี่ยนแปลงในจำนวนสินค้า Y

จากคำนิยามบนเส้นความพอใจเท่ากันเส้นใด ๆ อรรถประโยชน์หรือความพอใจจะเท่ากัน ดังนั้น

$$U_X \, dX + U_Y \, dY = 0$$

$$-\frac{dY}{dX} = \frac{U_x}{U_y}$$

เนื่องจาก $\frac{U_X}{U_Y} = MRS_{X.Y}$

ดังนั้น $-\frac{dY}{dX} = \frac{U_x}{U_y} = MRS_{X.Y}$ . . . . . (1 – 10)

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ Slope ของเส้นความพอใจจะหาได้จาก

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{d\,MRS_{X.Y}}{dX}$$

$$= -\frac{1}{U_Y^2}\left[\left(U_{XX}U_Y + U_{XY}\,U_Y\frac{dY}{dX}\right) - \left(U_{XY}U_X + U_{YY}\,U_X\frac{dY}{dX}\right)\right]$$

$$\therefore \frac{d^2Y}{dX^2} = -\frac{1}{U_y^3}\left[U_{XX}U_Y^2 - 2\,U_{XY}\,U_X\,U_Y + U_{YY}\,U_X^2\right] > 0 \quad . . (1 – 11)$$

สมการที่ (1 – 11) ที่หาได้ แสดงให้เห็นว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ Slope ของเส้นความพอใจเท่ากันจะต้องมีค่าเป็นบวก

เส้นงบประมาณหรือเส้นราคา (Budgert line or Price Line)

เส้นงบประมาณ คือ เส้นที่แสดงถึงส่วนประกอบ (ส่วนผสม) ของปริมาณการบริโภคสินค้า 2 ชนิด ซึ่งทุกๆ ส่วนประกอบของสินค้าทั้ง 2 ชนิดจะใช้จ่ายด้วยงบประมาณที่เท่ากัน

สมมุติผู้บริโภคนำเงินได้ที่มีอยู่อย่างจำกัดไปซื้อสินค้า X และสินค้า Y ดังนั้น สมการเส้นงบประมาณของการบริโภคสินค้า X และสินค้า Y ด้วยรายได้ที่มีอยู่จำกัด I บาท คือ

$$I = P_X . X + P_Y . Y$$

หรือ $$Y = \frac{I}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y} . X \qquad \ldots\ldots (1 - 12)$$

ถ้าผู้บริโภคได้รับเงินทั้งหมดในการซื้อสินค้า X เพียงอย่างเดียว ผู้บริโภคจะซื้อสินค้า X ได้เป็นจำนวนเท่ากับ $\frac{I}{P_X}$ หน่วย ซึ่งคือจุดตัดทางแกนปริมาณสินค้า X แต่ถ้าผู้บริโภคใช้เงินใช้เงินทั้งหมดในการซื้อสินค้า Y เพียงอย่างเดียว ผู้บริโภคจะซื้อสินค้า Y ได้เป็นจำนวนเท่ากับ $\frac{I}{P_Y}$ หน่วย ซึ่งคือจุดตัดทางแกนปริมาณสินค้า Y และถ้าผู้บริโภคใช้เงินทั้งหมดในการซื้อทั้งสินค้า X และสินค้า Y จะซื้อสินค้าได้ตามสมการ $Y = \frac{I}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y} .X$ เมื่อนำส่วนประกอบต่าง ๆ กันของการบริโภคสินค้า X และสินค้า Y ที่ผู้บริโภคซื้อได้ด้วยเงินงบประมาณที่เท่ากันจะได้เส้นงบประมาณซึ่งมีลักษณะเป็นเส้นตรงทอดลงจากซ้ายไปขวา ดังนั้นถ้าผู้บริโภคมีรายได้จำกัด ณ ระดับราคาสินค้า X และสินค้า Y ที่กำหนดให้ จำนวนของสินค้า X และสินค้า Y ที่ผู้บริโภคสามารถซื้อได้จะอยู่ ณ จุดใดจุดหนึ่งบนเส้นงบประมาณ โดยไม่สามารถบริโภคได้เกินกว่านี้ เส้นงบประมาณจึงอาจเรียกได้ว่า เส้นการเป็นไปได้ในการบริโภค (Consumption Possibility Line)

จาก $$I = P_X . X + P_Y . Y$$

$$dI = P_X . dX + P_Y . dY$$

บนเส้นงบประมาณเดียวกัน ปริมาณเงินที่ใช้จ่ายซื้อสินค้าเท่ากัน ฉะนั้น $dI = 0$

$$P_X . dX + P_Y . dY = 0$$

ดังนั้น Slope ของเส้นงบประมาณ $= -\frac{dY}{dX} = \frac{P_X}{P_Y}$ . . . . (1 – 13)

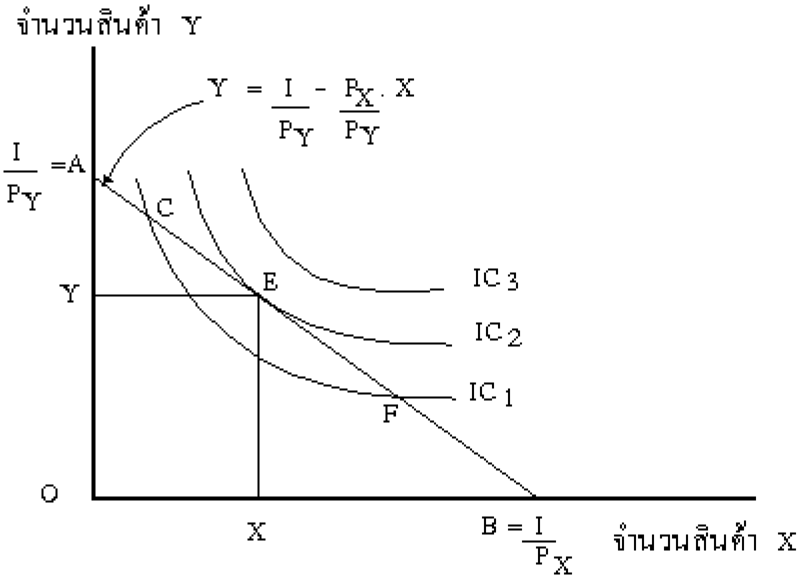
(ถ้าให้แกนตั้งแทนปริมาณสินค้า Y และแกนนอนแทนปริมาณสินค้า X)

สมการที่ (1 – 13) แสดงว่า Slope ของเส้นงบประมาณแสดงถึงสัดส่วนของราคาสินค้า (price ratio) จึงเรียกเส้นงบประมาณได้อีกอย่างว่าเส้นราคา (Price Line)

ส่วนผสมของสินค้าที่ให้อรรถประโยชน์สูงสุด

ดุลยภาพของผู้บริโภคจะอยู่ ณ จุดที่เส้นความพอใจเท่ากันสัมผัสกับเส้นงบประมาณซึ่งจะทำให้ Slope ของเส้นความพอใจเท่ากันเท่ากับ Slope ของเส้นงบประมาณ

รูปที่ 1 – 8 ดุลยภาพของผู้บริโภค



จากรูปที่ 1 – 8 ผู้บริโภคจะได้รับความพอใจสูงสุดจากการบริโภคสินค้า X และสินค้า Y เมื่อบริโภคสินค้า ณ จุด E โดยได้รับความพอใจอยู่บนเส้น IC_2 และบริโภคสินค้า X จำนวน OX หน่วย และ บริโภคสินค้า Y จำนวน OY หน่วย

ณ จุด E Slope ของเส้น IC = Slope ของเส้นงบประมาณ

$$\frac{MU_X}{MU_Y} = -\frac{dY}{dX} = \frac{P_X}{P_Y}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{หรือ} \quad \dfrac{MU_X}{P_X} = \dfrac{MU_Y}{P_Y} \\ \text{โดยซื้อได้ด้วยรายได้จำกัด} \quad I = P_X.X + P_Y.Y \end{array}\right\} \quad . . . (1 – 14)$$

การหาอรรถประโยชน์สูงสุด (The Maximization of Utility)

ในการบริโภคสินค้า ผู้บริโภคที่มีเหตุผลต้องการที่จะบริโภคสินค้าให้ได้รับความพอใจมากที่สุด อย่างไรก็ตามผู้บริโภคไม่สามารถบริโภคสินค้าโดยไม่จำกัดจำนวนได้ เนื่องจากมีรายได้อยู่อย่างจำกัด

สมมุติในการบริโภคสินค้า X และสินค้า Y ผู้บริโภคมีรายได้จำกัดเท่ากับ I บาท ดังนั้นสมการงบประมาณของผู้บริโภคคือ

$$I = P_X.X + P_Y.Y$$

การหาค่าสูงสุดของอรรถประโยชน์ทำได้ดังนี้

วิธีที่ 1

เพื่อที่จะหาค่าสูงสุดของอรรถประโยชน์ด้วยรายได้ที่มีอยู่อย่างจำกัด ผู้บริโภคจะต้องหาส่วนผสมของสินค้า X และสินค้า Y ที่สอดคล้องกับสมการงบประมาณ และให้ได้อรรถประโยชน์สูงสุดด้วย ดังนั้นจากสมการงบประมาณจำกัด หาค่า Y จะได้

$$Y = \frac{I - P_X.X}{P_Y}$$

แทนค่า Y ในฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์จะได้

$$U = U\left(X, \frac{I - P_X.X}{P_Y}\right)$$

เนื่องจากความสัมพันธ์ที่คงที่ระหว่างสินค้า X และสินค้า Y โดยผ่านทางข้อจำกัดของงบประมาณ ดังนั้นจึงสามารถหาค่าสูงสุดของอรรถประโยชน์มุ่งตรงต่อ X ได้ โดยเงื่อนไขอันดับแรก (First order condition) จะต้องได้ว่า $\frac{dU}{dX}$ = 0 และเงื่อนไขอันดับที่สอง (Second order condition) จะต้องได้ว่า $\frac{d^2U}{dX^2} < 0$

โดยเงื่อนไขอันดับแรก (First order condition) จะต้องได้ว่า $\frac{dU}{dX} = 0$

$$\frac{dU}{dX} = U_X + U_Y\left(-\frac{P_X}{P_Y}\right) = 0$$

$$\frac{U_X}{U_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \qquad \ldots\ldots (1 – 15)$$

เนื่องจาก $\frac{U_X}{U_Y} = MRS_{X.Y}$

$$\therefore \quad MRS_{X.Y} = \frac{U_X}{U_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \qquad \ldots\ldots (1 – 16)$$

แสดงว่าเงื่อนไขอันดับแรกของการหาค่าอรรถประโยชน์สูงสุดจะต้องได้ว่าอัตราหน่วยสุดท้ายของการทดแทนกันของสินค้า (MRS) จะเท่ากับอัตราส่วนของราคา (price ratio)

จากสมการที่ (1 – 15) สามารถเขียนได้ว่า

$$\frac{U_X}{P_X} = \frac{U_Y}{P_Y} \qquad \ldots\ldots (1 – 17)$$

สมการที่ (1 – 17) สามารถหาปริมาณการบริโภคสินค้า X และสินค้า Y ที่ได้รับอรรถประโยชน์สูงสุดได้ โดยมีสมการงบประมาณเป็นข้อจำกัดคือ

$$I = P_X . X + P_Y . Y$$

เงื่อนไขอันดับที่สอง (second order condition) สำหรับค่าสูงสุดจะต้องได้ว่า $\frac{d^2U}{dX^2} < 0$

$$\frac{d^2U}{dX^2} = U_{XX} + 2U_{XY}\left(-\frac{P_X}{P_Y}\right) + U_{yy}\left(-\frac{P_X}{P_Y}\right)^2 < 0 \quad ...(1-18)$$

แทนค่า $\frac{P_X}{P_Y}$ จากสมการ (1 – 15) และเอา U_Y^2 คูณตลอด จะได้

$$U_{XX}U_Y^2 - 2U_{XY}U_XU_Y + U_{YY}U_X^2 < 0 \quad ....(1-19)$$

หรือ $2U_{XY}U_XU_Y - U_{XX}U_Y^2 - U_{YY}U_X^2 > 0$ ....(1 – 20)

จากที่ได้หาค่าของอัตราการเปลี่ยนแปลงของ Slope ของเส้นความพอใจเท่ากันมาแล้วในสมการที่ (1 – 11) ซึ่งได้ว่า

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -\frac{1}{U_Y^3}\left(U_{XX}U_Y^2 - 2U_{XY}U_XU_Y + U_{YY}U_X^2\right) > 0 \quad ., (1-21)$$

จากสมการที่ (1 – 19) แสดงให้เห็นว่าเทอมที่อยู่ในวงเล็บของสมการที่ (1 – 21) มีค่าเป็นลบ และเนื่องจาก U_Y มีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้นเงื่อนไขอันดับที่สองจะต้องได้ด้วยว่า ค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ Slope ของเส้นแห่งความพอใจเท่ากัน ($\frac{d\,MRS_{X.Y}}{dX}$ หรือ $\frac{d^2Y}{dX^2}$) ณ จุดดุลยภาพของผู้บริโภคจะต้องมีค่าเป็นบวก

วิธีที่ 2

การหาค่าสูงสุดของอรรถประโยชน์อาจหาได้โดยวิธีการของ Lagrange multiplier ดังนี้

สมมติฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์รวมของผู้บริโภค คือ

$$U = U(X, Y)$$

และผู้บริโภคมีงบประมาณจำกัด คือ

$$I = P_X.X + P_Y.Y$$

โดยวิธีการของ Lagrange multiplier method

$$Z = U(X, Y) + \lambda (I - P_X . X - P_Y . Y)$$

First Order Condition สำหรับค่าสูงสุดของฟังก์ชั่น Z โดยหา partial derivative มุ่งตรงต่อ X, Y, Z, และ λ แล้วให้เท่ากับศูนย์

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial X} &= Z_X = \frac{\partial U}{\partial X} - P_X . \lambda = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial Y} &= Z_Y = \frac{\partial U}{\partial Y} - P_Y . \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (1-22)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = Z_\lambda = I - P_X . X - P_Y . Y = 0 \quad \ldots . (1-23)$$

จากสมการ (1 – 22) หาค่า λ

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{P_X} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Y}}{P_Y} = \lambda$$

หรือ $$\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_Y}{P_Y} = \lambda \quad \ldots\ldots (1-24)$$

และจากสมการที่ (1 – 23) จะได้ว่า

$$I = P_X . X + P_Y . Y \quad \ldots\ldots (1-25)$$

จะเห็นได้ว่าเงื่อนไขดุลยภาพที่ได้จะเหมือนกันทั้งวิธี Cardinal Utility Approach และ Ordinal Utility Approach

จากสมการที่ (1 – 24) และ (1 – 25) สามารถหาค่า X, Y และ λ ที่จะทำให้ผู้บริโภคได้รับความพอใจสูงสุดได้ ซึ่งก็คือสมการอุปสงค์ของสินค้า X และสินค้า Y และสมการอรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งบาทสุดท้าย (λ) โดยมีรูปสมการดังนี้

$$\left.\begin{aligned} X &= X(P_X, P_Y, I) \\ Y &= Y(P_X, P_Y, I) \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (1-26)$$

$$\lambda = \lambda(P_X, P_Y, I)$$

Second Order Condition สำหรับการหาค่าสูงสุดของ U หาได้โดยใช้ Bordered Hessian Determinant จะต้องมีค่าเป็นบวก หรือมีค่ามากกว่าศูนย์ นั่นคือ

$$|\overline{H}_2| = \begin{vmatrix} U_{XX} & U_{XY} & -P_X \\ U_{XY} & U_{YY} & -P_Y \\ -P_X & -P_Y & 0 \end{vmatrix} > 0$$

$$= 2U_{XY}P_XP_Y - U_{YY}P_X^2 - U_{XX}P_Y^2 > 0$$

ถ้าแทนค่า $P_X = \frac{U_X}{\lambda}$ และ $P_Y = \frac{U_Y}{\lambda}$ และคูณตลอดด้วย $\lambda^2 > 0$ จะได้

$$\left[\overline{H}_2\right] = 2U_{XY}U_XU_Y - U_{YY}U_X^2 - U_{XX}U_Y^2 > 0$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าเงื่อนไขอันดับที่สองที่ได้จะเหมือนกับสมการที่ (1 – 20) แสดงว่าผู้บริโภคบรรลุเป้าหมายของการแสวงหาอรรถประโยชน์สูงสุด

ถ้าหากแทนค่า X และ Y ที่ได้รับอรรถประโยชน์สูงสุดที่หาได้ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของ P_X , P_Y และ I ลงในฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของปริมาณการบริโภคของสินค้า X และสินค้า.Y จะได้ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ที่ขึ้นอยู่กับราคาสินค้าและรายได้ ซึ่งเรียกว่าอรรถประโยชน์ทางอ้อม (Indirect Utility Function) ซึ่งมีรูปสมการคือ

$$V = V(P_X, P_Y, I)$$

และจากฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ทางอ้อม (Indirect Utility Function) สามารถหาค่าของ I ได้ โดยค่าของ I จะอยู่ในรูปเป็นฟังก์ชั่นของ P_X , P_Y และ I นั่นคือ

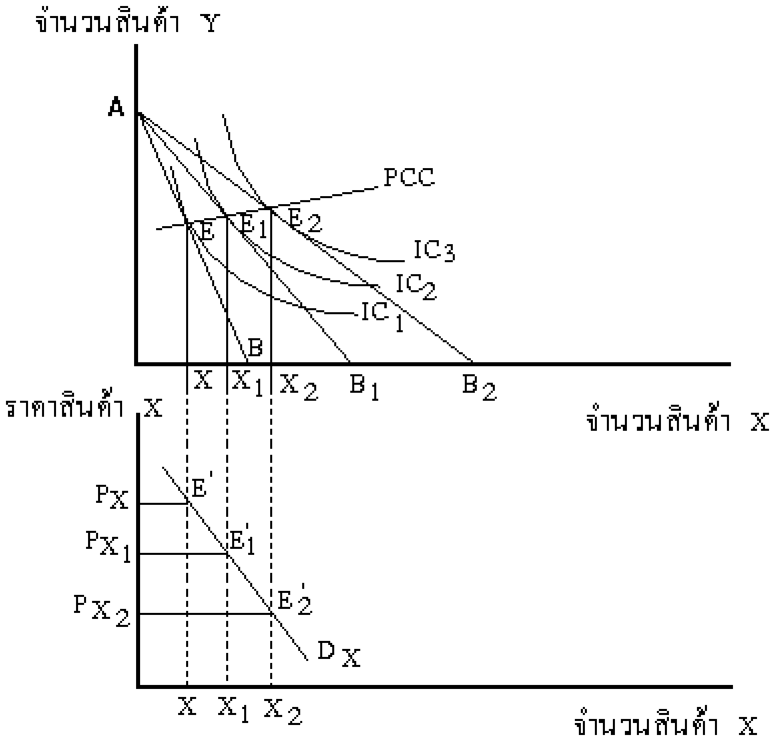
$$I = I(P_X, P_Y, I)$$

สมการ I ดังกล่าวนี้เรียกว่า สมการรายจ่าย (Expenditure Function)

การหาเส้นอุปสงค์โดย Ordinal Utility Approach

จากจุดดุลยภาพของผู้บริโภคโดยใช้เส้นความพอใจเท่ากันและเส้นงบประมาณ ถ้าสมมติให้เงินได้ของผู้บริโภค ราคาสินค้า Y และรสนิยมของผู้บริโภค คงที่ เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้า X จะมีผลให้เส้นงบประมาณเปลี่ยนแปลง ซึ่งมีผลให้จุดดุลยภาพของผู้บริโภคเปลี่ยนแปลงไป และเมื่อลากเส้นเชื่อมจุดดุลยภาพของผู้บริโภคก็จะได้เส้นแนวทางในการบริโภคตามราคา (Price Consumption Curve : PCC) และจากเส้น PCC นี้สามารถจะหาเส้นอุปสงค์ของผู้บริโภคคนใดคนหนึ่งสำหรับสินค้า X ได้

รูปที่ 1 – 9 แสดงการหาเส้นอุปสงค์จากเส้น PCC



จากรูปที่ 1 – 9 เมื่อราคาสินค้า X ลดลงจาก P_X เป็น P_{X_1} และ P_{X_2} บาทต่อหน่วย ทำให้เส้นงบประมาณเปลี่ยนจากเส้น AB เป็นเส้น AB_1 และ AB_2 ตามลำดับ และ

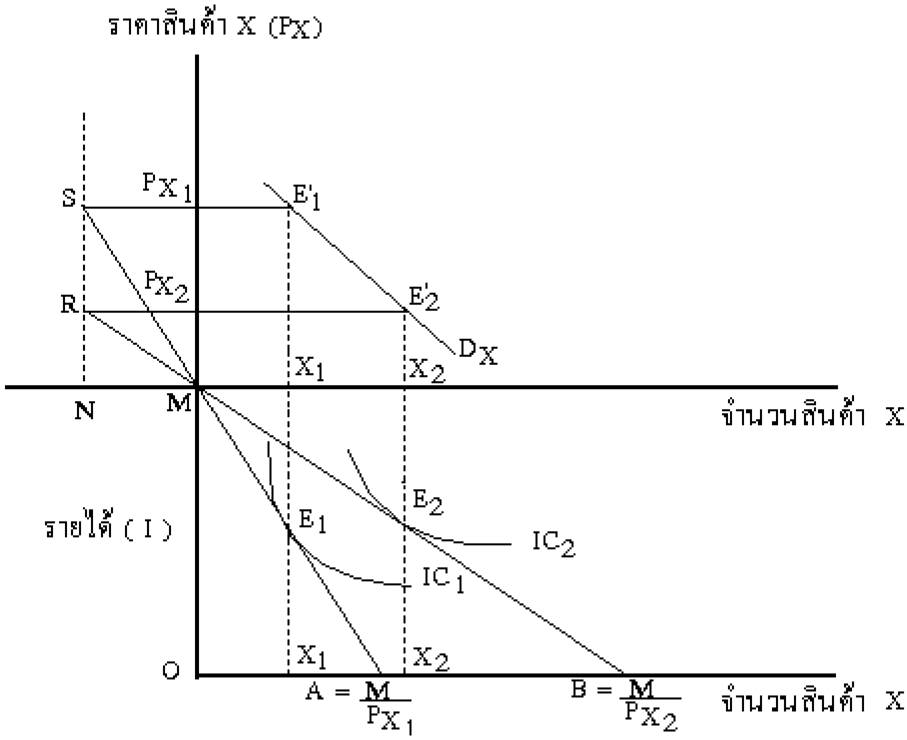
ไปสัมผัสกับเส้นความพอใจเท่ากันเส้นที่สูงขึ้นไป เมื่อลากเส้นเชื่อมจุดสัมผัสนี้ก็จะได้เส้น PCC และจากนี้ก็สามารถหาเส้นอุปสงค์ของสินค้า X ได้ โดยเส้นอุปสงค์นี้จะเป็นของบุคคลใดบุคคลหนึ่ง (Individual demand curve) ทั้งนี้เพราะแผนภาพของเส้นความพอใจเท่ากัน (Idifference map) เป็นของผู้บริโภคคนใดคนหนึ่ง ซึ่งได้จัดอันดับ (rank) ความพอใจที่ได้จากการบริโภคสินค้า

จากรูปที่ 1 – 9 ที่จุด E ณ ระดับราคาสินค้า X เท่ากับ P_X บาทต่อหน่วย ผู้บริโภคซื้อสินค้า X เท่ากับ X หน่วย และที่จุด E_1 ราคาสินค้า X เท่ากับ P_{X_1} บาทต่อหน่วย ปริมาณซื้อสินค้า X เท่ากับ X_1 หน่วย ทำนองเดียวกันที่จุด E_2 ราคาสินค้า X เท่ากับ P_{X_2} บาทต่อหน่วย ปริมาณซื้อสินค้า X เท่ากับ X_2 หน่วย เมื่อลากเส้นเชื่อมจุดต่างๆ ก็จะได้เส้นอุปสงค์สำหรับสินค้า X ของผู้บริโภคคนใดคนหนึ่ง

เส้นอุปสงค์ประเภทนี้ เรียกว่า เส้นอุปสงค์ตามปกติทั่วไป (Ordinary demand curve) หรือเส้นอุปสงค์แบบของมาร์แชล (Marshallian demand curve) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของปริมาณสินค้าซึ่งผู้บริโภคซื้อ ณ ระดับราคาต่างๆ กันของสินค้าของสินค้าชนิดนั้น โดยที่ราคาสินค้าชนิดอื่น รายได้ที่เป็นตัวเงิน และรสนิยมของผู้บริโภค (แผนภาพของเส้นความพอใจเท่ากัน) ไม่เปลี่ยนแปลง ในกรณีเช่นนี้จะเห็นได้ว่า เงินได้ที่แท้จริง (real income) ของผู้บริโภคจะเปลี่ยนแปลงไปตามสัดส่วนของราคาของสินค้า X ต่อราคาสินค้า Y ($\frac{P_X}{P_Y}$) ที่เปลี่ยนแปลงไป

การสร้างเส้นอุปสงค์โดยวิธีทางกราฟอาจหาได้อีกทางโดยการสมมติให้แกนตั้งเป็นรายได้ที่เป็นตัวเงินของผู้บริโภค (I) และแกนนอนแสดงถึงปริมาณซื้อของสินค้า X

รูปที่ 1 – 10 แสดงการหาเส้นอุปสงค์สำหรับสินค้า X



ถ้าสมมติเดิมรายได้ของผู้บริโภคเท่ากับ M บาท และราคาต่อหน่วยของสินค้า X เท่ากับ P_{X_1} บาท ถ้าผู้บริโภคไม่ซื้อสินค้า X เลย จะมีเงินเหลืออยู่สำหรับซื้อสินค้าอื่นเท่ากับ M บาท แต่ถ้าผู้บริโภคใช้จ่ายเงินทั้งหมดไปในการซื้อสินค้า X จะซื้อสินค้า X ได้เท่ากับ OA หน่วย หรือเท่ากับ $\frac{M}{P_{X_1}}$ หน่วย ถ้าลากความสัมพันธ์ของปริมาณซื้อของสินค้า X และจำนวนเงินที่ผู้บริโภคมีเหลืออยู่สำหรับซื้อสินค้าอื่นจะได้เส้นงบประมาณ (Budget Line) จากรูปที่ 1 – 10 เส้นงบประมาณคือเส้น MA โดยมีลักษณะเป็นเส้นตรงทอดลงจากซ้ายไปขวา และ Slope ของเส้นงบประมาณ MA หาได้จาก

$$\text{Slope ของเส้นงบประมาณ AB} = \frac{M}{\frac{M}{P_{X_1}}}$$

$$= P_{X_1}$$

นั่นคือจะได้ว่า Slope ของเส้นงบประมาณเท่ากับ ราคาต่อหน่วยของสินค้า X

ถ้าสมมุติว่าจุดดุลยภาพเริ่มแรกของผู้บริโภคอยู่ที่จุด E_1 ผู้บริโภคซื้อสินค้า X เท่ากับ X_1 หน่วย และเหลือเงินเท่ากับ E_1X_1 บาท เพื่อใช้ซื้อสินค้าอื่น ต่อมาสมมติว่าราคาสินค้า X ลดลงจาก P_{X_1} เป็น P_{X_2} บาทต่อหน่วย โดยที่รายได้ของผู้บริโภคเท่าเดิม เส้นงบประมาณเปลี่ยนมาเป็น MB จุดดุลยภาพใหม่ของผู้บริโภคอยู่ที่จุด E_2 โดยผู้บริโภคจะซื้อสินค้า X เท่ากับ X_2 หน่วย และเหลือเงินเท่ากับ E_2X_2 บาท เพื่อใช้ซื้อสินค้าอื่น

เพื่อแสดงการเส้นอุปสงค์สำหรับสินค้า X โดยวิธีกราฟ จากจุด M ลากเส้นขนานแกนนอนหรือแกนปริมาณสินค้า X และลากต่อไปทางซ้ายของจุด M โดยใช้สเกลเท่ากับ 1 หน่วย ซึ่งตามรูปเท่ากับ MN หน่วย และจากเส้น MA ลากเส้นตรงต่อขึ้นไปได้เส้น SM ซึ่งมีค่า Slope เท่ากับ $\frac{SN}{MN}$ และมีค่าเท่ากับ Slope ของเส้น MA จึงทำให้ SN มีค่าเท่ากับ P_{X_1} และสามารถกำหนดจุดความสัมพันธ์ของราคาและปริมาณซื้อได้ เช่นที่จุด E_1' เมื่อราคาสินค้า X เท่ากับ P_{X_1} บาทต่อหน่วย ปริมาณซื้อของสินค้า X เท่ากับ X_1 หน่วย และในทำนองเดียวกันจากเส้น MB ลากเส้นตรงต่อขึ้นไปได้เส้น RM ซึ่งมีค่า Slope เท่ากับ $\frac{RN}{MN}$ และมีค่าเท่ากับ Slope ของเส้น RM จึงทำให้ RN มีค่าเท่ากับ P_{X_2} ดังนั้นเมื่อราคาสินค้า X เท่ากับ P_{X_2} บาทต่อหน่วย ปริมาณซื้อของสินค้า X เท่ากับ X_2 หน่วย จะได้จุด E_2' เมื่อลากเส้นแสดงความสั้มพันธ์ของราคาสินค้า X และปริมาณซื้อของสินค้า X จะได้เส้นอุปสงค์ของสินค้า X

เส้นอุปสงค์แบบปกติ (Ordinary demand curve) หรือเส้นอุปสงค์แบบของมาร์แชล (Marshallian demand curve)

เส้นอุปสงค์ที่สร้างขึ้นตามรูปที่ 1 – 9 และรูปที่ 1 – 10 เป็นเส้นอุปสงค์ตามปกติทั่วไป (Ordinary demand curve) หรือเส้นอุปสงค์ที่สร้างขึ้นตามแบบของมาร์แชล (Marshallian demand curve) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของปริมาณสินค้าชนิด

หนึ่งที่ผู้บริโภคซื้อ ณ ระดับราคาต่างๆ กันของสินค้าชนิดนั้น ดยที่เงินได้ที่แท้จริง (real income) ของผู้บริโภคจะเปลี่ยนแปลงไปตามสัดส่วนของราคาสินค้า (price ratio) ที่เปลี่ยนแปลงไป หรืออาจกล่าวได้ว่าอุปสงค์แบบของมาร์แชลแสดงถึงปริมาณซื้อของสินค้าชนิดหนึ่งที่ทำให้ผู้ซื้อของสินค้านั้นได้รับอรรถประโยชน์เพิ่มของเงินคงที่

ฟังก์ชั่นอุปสงค์แบบปกติหรืออาจเรียกง่ายๆ ว่า ฟังก์ชั่นอุปสงค์ (Demand function) สามารถหามาได้จากการวิเคราะห์อรรถประโยชน์สูงสุดจากเงื่อนไขอันดับแรก (first order condition) ของการหาค่าสูงสุดของอรรถประโยชน์จะสามารถหาฟังก์ชั่นอุปสงค์ของสินนค้าที่เป็นฟังก์ชั่นของราคาสินค้าทุกชนิด และรายได้ของผู้บริโภค

ถ้าสมมุติผู้บริโภคบริโภคสินค้า 2 ชนิดคือสินค้า X และสินค้า Y สมการเส้นอุปสงค์หาได้จากเงื่อนไขดุลยภาพของผู้บริโภค คือ

$$\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_Y}{P_Y}$$

และสมการงบประมาณจำกัด คือ

$$I = P_X . X + P_Y . Y$$

ฟังก์ชั่นอุปสงค์แบบของมาร์แชล (The Marshallian Demand Function) ของสินค้า X และสินค้า Y มีรูปสมการ คือ

$$X = X(P_X, P_Y, I)$$

$$Y = Y(P_X, P_Y, I)$$

ถ้าสมมุติราคาสินค้า Y (P_Y) และรายได้ของผู้บริโภค (I) คงที่ สมการอุปสงค์สำหรับสินค้า X จะเขียนได้ดังนี้

$$X = X(P_X)$$

และในทำนองเดียวกัน ถ้าสมมุติราคาสินค้า X (P_X) และรายได้ของผู้บริโภค (I) คงที่ สมการอุปสงค์สำหรับสินค้า Y จะเขียนได้ดังนี้

$$Y = Y(P_Y)$$

ตัวอย่างการหาสมการอุปสงค์โดยใช้วิธีทางคณิตศาสตร์

สมมุติฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ของการบริโภคสินค้า X และสินค้า Y คือ

$$U = U(X, Y) = \frac{1}{4} X.Y$$

ถ้าผู้บริโภคมีรายได้เท่ากับ I บาท ราคาต่อหน่วยของสินค้า X และสินค้า Y เท่ากับ P_X และ P_Y บาท ตามลำดับ สมการอุปสงค์สำหรับสินค้า X และสินค้า Y สามารถหาได้ดังนี้

โดยวิธีการของ Lagrangian Multiplier Method

$$Z = \frac{1}{4} X.Y + \lambda (I - P_X.X - P_Y.Y)$$

First Order Condition สำหรับค่าสูงสุดของฟังก์ชั่น Z โดยหา partial derivative มุ่งตรงต่อ X, Y, Z, และ λ แล้วให้เท่ากับศูนย์

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = Z_X = \frac{1}{4} Y - P_X.\lambda = 0 \qquad \text{....(1 – 27)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = Z_Y = \frac{1}{4} X - P_Y.\lambda = 0 \qquad \text{....(1 – 28)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = Z_\lambda = I - P_X.X - P_Y.Y = 0 \qquad \text{....(1 – 29)}$$

จากสมการที่ (1 – 27) และ (1 – 28) หาค่า λ จะได้

$$\frac{Y}{4P_X} = \frac{X}{4P_Y}$$

หรือ $P_X.X = P_Y.Y$ ..... (1 – 30)

แทนค่าสมการที่ (1 – 30) ในสมการที่ (1 – 29) จะได้สมการอุปสงค์ของสินค้า X และสินค้า Y คือ

$$X = \frac{I}{2P_X}$$

$$Y = \frac{I}{2P_Y}$$

อรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้าย (λ) มีรูปสมการ คือ

$$\lambda = \frac{I}{8P_X P_Y}$$

จะสังเกตได้ว่าสมการอุปสงค์สำหรับสินค้า X และสินค้า Y และอรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้าย (λ) ที่ทำให้ผู้บริโภคได้รับอรรถประโยชน์สูงสุดจะขึ้นอยู่กับราคาของสินค้า X , ราคาของสินค้า Y และรายได้ของผู้บริโภค นั่นคือ

$$X = X(P_X, P_Y, I)$$

$$Y = Y(P_X, P_Y, I)$$

$$\lambda = \lambda(P_X, P_Y, I)$$

เมื่อแทนค่า X และ Y ที่ทำให้ผู้บริโภคได้รับอรรถประโยชน์สูงสุดในฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์รวมจะได้ฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ทางอ้อม (Indirect Utility Function) คือ

$$U^* = V = \frac{I^2}{16P_X P_Y}$$

จะเห็นได้ว่าฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ทางอ้อมที่ได้จะเป็นฟังก์ชั่นของราคาสินค้า X (P_X) ราคาสินค้า Y (P_Y) และรายได้ของผู้บริโภค (I)

คุณสมบัติของฟังก์ชั่นอุปสงค์แบบของมาร์แชล

ฟังก์ชั่นอุปสงค์แบบของมาร์แชลมีคุณสมบัติดังนี้

1. ทุกจุดบนเส้นอุปสงค์ของมาร์แชลแสดงถึงปริมาณซื้อที่ทำให้ผู้บริโภคได้รับความพอใจสูงสุด ณ ระดับราคาต่าง ๆ กัน โดยที่ราคาสินค้าชนิดอื่น ๆ และรายได้คงที่

2. ระดับความพอใจสูงสุดจะเปลี่ยนแปลงไปตามการเปลี่ยนแปลงของราคา กล่าวคือ ถ้าราคาสินค้าสูงขึ้น ระดับความพอใจลดลง และระดับความพอใจจะเพิ่มขึ้น ถ้าราคาสินค้าลดลง การที่ระดับความพอใจเปลี่ยนแปลงไปตามระดับราคาเช่นนี้ เส้นอุปสงค์แบบของมาร์แชลจึงมีชื่อเรียกอีกอย่างว่า " Uncompensated Demand Function "

3. เส้นอุปสงค์ของมาร์แชลจะมีคุณสมบัติเป็นเอกมัยภาพฟังก์ชั่นลำดับที่ศูนย์ (homogeneous function of degree zero) เมื่อเทียบกับราคาและรายได้ ซึ่งหมายความว่า ถ้าราคาสินค้าทุกชนิดและรายได้เปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกันและในสัดส่วนที่เท่ากัน ปริมาณความต้องการซื้อไม่เปลี่ยนแปลง หรือที่เรียกว่าไม่มีภาพลวงตาทางการเงิน (money illusion)

ภาพลวงตาทางการเงินอาจเกิดขึ้นเมื่อรายได้ที่เป็นตัวเงิน (money income) ของผู้บริโภคเพิ่มขึ้นในขณะเดียวกันราคาสินค้าก็เพิ่มขึ้นในสัดส่วนเดียวกัน การที่รายได้ของผู้ยริโภคเพิ่มขึ้นทำให้ผู้บริโภคเข้าใจผิดคิดว่าตนมีฐานะดีขึ้น แต่ในความจริงแล้วรายได้ที่แท้จริง (real income) ของผู้บริโภคไม่เพิ่มขึ้นแต่อย่างใด (รายได้ที่แท้จริงหาได้จากอัตราส่วนของรายได้ที่เป็นตัวเงินกับราคาสินค้า) ดังนั้นการที่ผู้บริโภครู้สึกว่าฐานะดีขึ้นจึงอาจมีการเปลี่ยนแปลงในระดับอุปสงค์ทั้ง ๆ ที่ในความเป็นจริงแล้วน่าจะบริโภคในปริมาณเท่าเดิมเนื่องจากรายได้ที่แท้จริงไม่ได้พิ่มขึ้น ซึ่งปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นนี้เรียกว่าภาพลวงตาทางการเงิน

การที่เส้นอุปสงค์แบบของมาร์แชลมีคุณสมบัติเป็นเอกมัยภาพฟังก์ชั่นลำดับที่ศูนย์ (homogeneous function of degree zero) เมื่อเทียบกับราคาและรายได้ จึงทำให้ปริมาณความต้องการซื้อหรือสมการอุปสงค์แบบของมาร์แชลไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อรายได้และราคาสินค้าเปลี่ยนแปลงในทิศทางเดียวกันและในสัดส่วนที่เท่ากัน ดังพิสูจน์ได้ดังนี้

จากฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ยังคงเหมือนกับตัวอย่างเดิมคือ

$$U = \frac{1}{4} X.Y$$

และสมการงบประมาณจำกัดคือ $I = P_X . X + P_Y . Y$

จะได้สมการอุปสงค์ของสินค้า X และสินค้า Y คือ

$$X = \frac{I}{2P_X}$$

$$Y = \frac{I}{2P_Y}$$

สมการอุปสงค์ของสินค้า X และสินค้า Y จะเป็นฟังก์ชั่นของ P_X, P_Y และ I นั่นคือ

$$X = X(P_X, P_Y, I)$$

$$Y = Y(P_X, P_Y, I)$$

สมมุติว่ารายได้ของผู้บริโภคและราคาสินค้าทุกชนิดเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นเป็นเปอร์เซ็นต์ที่เท่ากัน

สมมุติให้ k = สัดส่วนของรายได้และราคาเปลี่ยนแปลงไป

ดังนั้นสมการงบประมาณของผู้บริโภคคือ

$$kI = kP_X.X + kP_Y.Y$$

จาก Lagrangian Function คือ

$$V = \frac{1}{4}X.Y + \lambda(kI - kP_X.X - kP_Y.Y)$$

First Order Condition สำหรับค่าสูงสุดของฟังก์ชั่น V โดยหา partial derivative มุ่งตรงต่อ X, Y, Z, และ λ แล้วให้เท่ากับศูนย์ ($\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\partial V}{\partial \lambda} = 0$)

$$\frac{\partial V}{\partial X} = Z_X = \frac{1}{4}Y - kP_X.\lambda = 0. \quad \ldots(1-31)$$

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = Z_Y = \frac{1}{4}X - kP_Y.\lambda = 0 \quad \ldots(1-32)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = Z_\lambda = kI - kP_X.X - kP_Y.Y = 0 \quad \ldots(1-33)$$

จากสมการที่ (1 – 31) และ (1 – 32) หาค่า λ จะได้

$$\frac{Y}{4kP_X} = \frac{X}{4kP_Y}$$

หรือ $P_X . X = P_Y . Y$ ..... (1 – 34)

แทนค่าสมการที่ (1 – 34) ในสมการที่ (1 – 33) จะได้

$$kI - kP_Y . Y - kP_Y . Y = 0$$

$$Y = \frac{kI}{2kP_Y} = \frac{I}{2P_Y} \quad \text{..... (1 – 35)}$$

สมการที่ (1 – 35) คือสมการอุปสงค์สำหรับสินค้า Y

แทนค่าสมการที่ (1 – 35) ในสมการที่ (1 – 34) จะได้

$$X = \frac{P_Y}{P_X}\left(\frac{kI}{2kP_Y}\right) = \frac{I}{2P_X} \quad \text{..... (1 – 36)}$$

สมการที่ (1 – 36) คือสมการอุปสงค์ของสินค้า X

สมการอุปสงค์สำหรับสินค้า X และสินค้า Y จะเป็นฟังก์ชั่นของ kP_X, kP_Y และ kI นั่นคือ

$$X = X(kP_X, kP_Y, kI)$$

$$Y = Y(kP_X, kP_Y, kI)$$

จะเห็นว่าอุปสงค์สำหรับสินค้า X และสินค้า Y ไม่เปลี่ยนแปลง คือยังคงบริโภคสินค้า X เท่ากับ $\frac{I}{2P_X}$ และบริโภคสินค้า Y เท่ากับ $\frac{I}{2P_Y}$ จากที่พิจารณานี้แสดงให้เห็นว่าผู้บริโภคไม่มีปัญหาภาพลวงตาทางด้านการเงิน (money illusion)

เส้นอุปสงค์โดยเปรียบเทียบ (Comparative Demand Curve)

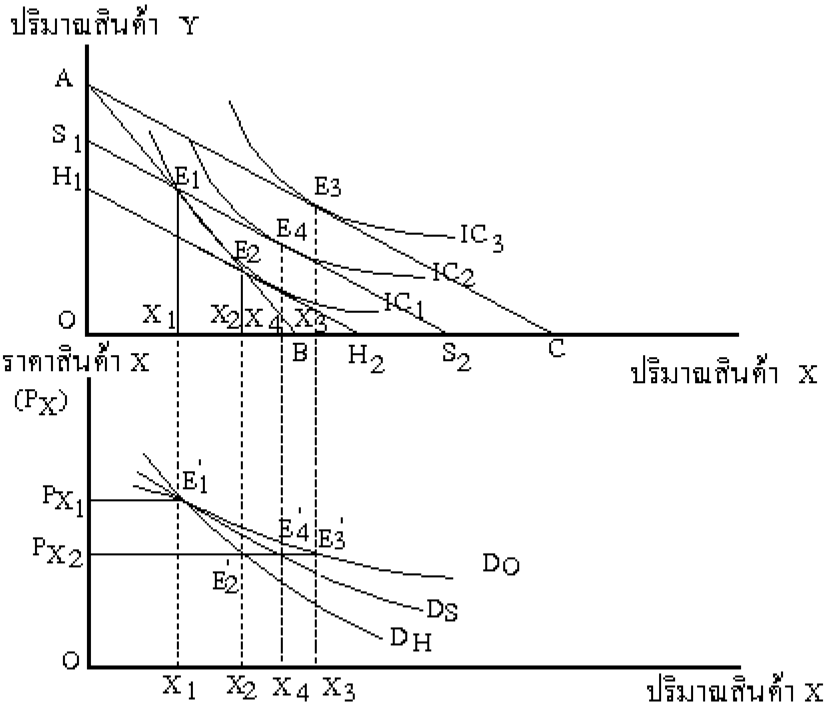
เส้นอุปสงค์ที่ได้พิจารณามาแล้วข้างต้นได้มาจากการพิจารณาเส้นงบประมาณสัมผัสกับเส้นความพอใจเท่ากัน ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ของราคาและปริมาณความต้องการซื้อคู่หนึ่งๆ ทำให้ได้เส้นอุปสงค์ซึ่งเรียกว่าเส้นอุปสงค์แบบปกติ (Ordinary demand curve) ซึ่งแสดงให้เห็นการเปลี่ยนแปลงทั้งหมดของปริมาณความต้องการซื้ออันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงราคา (price effects)

เส้นอุปสงค์อาจหาได้โดยวิธีการวัดการเปลี่ยนแปลงเงินได้ที่แท้จริงโดยวิธีการของ Hicks หรือที่เรียกว่า Hicksian effects และโดยวิธีการของ Slutsky หรือที่เรียกว่า Slutsky's effects

เส้นอุปสงค์ตามวิธีการของ Hicks หรือเส้นอุปสงค์แบบของฮิกซ์ (Hicksian demand curve) เป็นเส้นที่แสดงความสัมพันธ์ของราคาและปริมาณซื้อซึ่งเงินได้ที่แท้จริงถูกรักษาไว้ให้คงที่ (constant real income) ในนัยของอรรถประโยชน์หรือความพอใจที่ได้รับเท่าเดิม นั่นคือ ทำให้ผู้บริโภคคงอยู่บนเส้นความพอใจเท่ากันเส้นเดิม

สำหรับเส้นอุปสงค์ตามวิธีการของ Slutsky หรือเส้นอุปสงค์แบบของสลัสกี้ (Slutsky's demand curve) เป็นเส้นอุปสงค์ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของราคาและปริมาณความต้องการซื้อ ซึ่งยังคงรักษาให้เงินได้ที่แท้จริงที่มองเห็นได้คงที่ (apparent real income constant) โดยทำให้ผู้บริโภคสามารถซื้อสินค้ากลุ่มเดิมได้ หรือซื้อสินค้าได้จำนวนเท่าเดิม (original bundel)

รูปที่ 1 – 11 แสดงการหาเส้นอุปสงค์แบบปกติ เส้นอุปสงค์ตามวิธีของ Hicks และของ Slutsky



D_O = Ordinary demand curve

D_S = Apparent real income constant (Slutsky)

D_H = Real income constant (Hicks)

จากรูปที่ 1 – 11 สมมติเดิมผู้บริโภคมีรายได้เท่ากับ I_1 บาท ราคาต่อหน่วยของสินค้า X และสินค้า Y เท่ากับ P_{X_1} และ P_{Y_1} บาท ได้เส้นงบประมาณคือ AB ต่อมาราคาสินค้า X ถูกลงเป็น P_{X_2} บาทต่อหน่วย โดยที่รายได้และราคาสินค้า Y คงที่ ทำให้เส้นงบประมาณเปลี่ยนเป็นเส้น AC จากรูปจะเห็นได้ว่า การเคลื่อนย้ายของจุดดุลยภาพ

จากจุด E_1 เป็นจุด E_3 หรือการบริโภคสินค้า X เพิ่มจาก OX_1 เป็น OX_3 หน่วย แสดงผลของการเปลี่ยนแปลงปริมาณสินค้า X เมื่อราคาสินค้า X ลดลง ซึ่งได้รวมผลทางด้านรายได้และผลของการใช้สินค้าทดแทนกัน หรือแสดงให้เห็นการเปลี่ยนแปลงทั้งหมดของปริมาณความต้องการซื้ออันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงทางราคา (price effect) โดยเมื่อราคาสินค้า X เท่ากับ P_{X_1} บาทต่อหน่วย ปริมาณซื้อสินค้า X เท่ากับ OX_1 หน่วย และเมื่อราคาสินค้า X เท่ากับ P_{X_2} บาทต่อหน่วย ปริมาณซื้อสินค้า X เท่ากับ OX_3 หน่วย เมื่อลากความสัมพันธ์ของราคาสินค้า X และปริมาณความต้องการซื้อสินค้า X ก็จะได้เส้นอุปสงค์แบบปกติ (Ordinary demand curve: D_O) หรือเส้นอุปสงค์ตามแบบของมาร์แชล (Marshallian demand curve)

ตามการวิเคราะห์ของ Hicks การที่ราคาสินค้า X ลดลงทำให้รายได้ที่แท้จริง (real income) เพิ่มขึ้น จึงต้องลดรายได้ที่เป็นตัวเงินของผู้บริโภคลงมาจนกระทั่งทำให้ผู้บริโภคกลับเข้ามาอยู่บนเส้นความพอใจเท่ากันเส้นเดิมก่อนมีการเปลี่ยนแปลงราคา สมมุติลดรายได้ที่เป็นตัวเงินลงโดยอาจใช้วิธีการเก็บภาษีจนรายได้ลดลงเหลือเท่ากับ I_3 บาท ($I_3 < I_1$) ทำให้ได้เส้นงบประมาณเส้นใหม่ คือ H_1H_2 ซึ่งสัมผัสกับเส้นความพอใจเท่ากัน IC_1 ที่จุด E_2 ดังนั้นเส้นอุปสงค์ซึ่งเงินได้ที่แท้จริงถูกรักษาไว้ให้คงที่ (real income constant) และทำให้ผู้บริโภคคงอยู่บนระดับความพอใจระดับเดิม ตามวิธีการของ Hicks หาได้โดยเมื่อราคาสินค้า X เท่ากับ P_{X_1} บาทต่อหน่วย ปริมาณความต้องการซื้อสินค้า X เท่ากับ OX_1 หน่วย เมื่อราคาสินค้า X เท่ากับ P_{X_2} บาทต่อหน่วย ปริมาณซื้อสินค้า X เท่ากับ OX_2 หน่วย และสำหรับระดับราคาอื่นๆ ก็จะพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน ทำให้ความสัมพันธ์ของราคาและปริมาณซื้อซึ่งเงินได้ที่แท้จริงคงที่โดยนัยของอรรถประโยชน์ที่ได้รับเท่าเดิม และก็จะได้เป็นเส้นอุปสงค์ตามวิธีการของ Hicks ซึ่งเรียกว่าเส้นอุปสงค์ที่ได้รับการชดเชย (Compensation Demand Curve) หรือเส้นอุปสงค์ที่รายได้ที่แท้จริงคงที่ (Real income constant demand curve)

ในกรณีที่ราคาสินค้า X เพิ่มขึ้นทำให้รายได้ที่แท้จริง (real income) ลดลง จะต้องจ่ายเงินชดเชย (Subsidy) เพื่อเพิ่มรายได้ที่เป็นตัวเงินให้กับผู้บริโภคจนกระทั่งทำให้ผู้บริโภคกลับเข้าสู่ระดับความพอใจเท่ากันเส้นเดิมก่อนมีการเปลี่ยนแปลงราคา และจะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างราคาและปริมาณซื้อที่ทำให้เงินได้ที่แท้จริงคงที่โดย

ผู้บริโภคจะอยู่บนระดับความพอใจเท่ากันเส้นเดิม ซึ่งเป็นเส้นอุปสงค์ตามวิธีการของ Hicks

ดังนั้นเส้นอุปสงค์ที่ได้รับการชดเชย (Compensation Demand Curve) หรือเส้นอุปสงค์แบบของฮิกซ์ (Hicksian Demand Curve) จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างราคาของสินค้าชนิดหนึ่งกับปริมาณซื้อของสินค้าชนิดนั้น เมื่อกำหนดให้ราคาสินค้าชนิดอื่น และอรรถประโยชน์ที่ผู้บริโภคได้รับคงที่

สำหรับการหาเส้นอุปสงค์ตามวิธีการของ Slutsky ซึ่งมีการชดเชยการเปลี่ยนแปลงของราคาโดยให้ผู้บริโภคมีรายได้ที่แท้จริงที่มองเห็นได้คงที่ (apparent real income constant) จะพบว่าในกรณีที่ราคาสินค้า X ลดลง จะทำให้รายได้ที่แท้จริงเพิ่มขึ้น จึงต้องลดรายได้ที่เป็นตัวเงินลง จนกระทั่งผู้บริโภคสามารถซื้อสินค้าได้จำนวนเท่าเดิม สมมุติรายได้ลดลงจนเท่ากับ I_2 บาท ($I_3 < I_2 < I_1$) ทำให้เส้นงบประมาณเปลี่ยนจาก AC เป็น S_1S_2 และไปสัมผัสกับเส้นความพอใจเท่ากัน IC_2 ณ จุด E_4 ดังนั้น เมื่อราคาสินค้า X ลดลงจาก P_{X_1} เป็น P_{X_2} บาทต่อหน่วย ทำให้ปริมาณซื้อสินค้า X เพิ่มขึ้นจาก OX_1 หน่วยเป็น OX_4 หน่วย เมื่อลากเส้นเชื่อมความสัมพันธ์ระหว่างราคา และปริมาณซื้อเมื่อรักษาเงินได้ที่แท้จริงที่มองเห็นได้ให้คงที่ ก็จะได้เส้นอุปสงค์ตามวิธีการของ Slutsky (Slutsky’s demand curve) หรือที่เรียกว่า เส้นอุปสงค์ที่รายได้ที่แท้จริงที่มองเห็นได้คงที่ (Apparent real income constant demand curve)

จะเห็นได้ว่าวิธีการของ Hicks ในทางปฏิบัติเป็นไปได้ยากกว่าวิธีการของ Slutsky ทั้งนี้เพราะต้องทราบถึงเส้นความพอใจเท่ากันของผู้บริโภคก่อน และไม่สามารถคำนวณออกมาเป็นตัวเลขได้ เพราะต้องอาศัยเส้นความพอใจเท่ากัน

การใช้วิธีทางคณิตศาสตร์หาสมการเส้นอุปสงค์ที่ได้รับการชดเชย (Compensated demand curve)

จากการที่เส้นอุปสงค์ที่ได้รับการชดเชย (Compensated demand curve) หรือเส้นอุปสงค์แบบของฮิกซ์ (Hicksian demand curve) แสดงถึงปริมาณของสินค้าชนิดหนึ่ง

ที่ผู้บริโภคซื้อ ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของราคาสินค้าเมื่อมีการชดเชยในรูปของภาษีหรือการให้เงินอุดหนุนเพื่อให้ผู้บริโภคยังคงได้รับอรรถประโยชน์ในระดับเดิมภายหลังจากที่มีการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้า ดังนั้นเส้นอุปสงค์ที่ได้รับการชดเชย (Compensated demand curve) จึงเป็นการวิเคราะห์พฤติกรรมของผู้บริโภคภายใต้ข้อสมมุติฐานว่าผู้บริโภคมีเป้าหมายที่จะเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดในการซื้อสินค้าและบริการเพื่อให้ได้รับอรรถประโยชน์ในระดับหนึ่งที่กำหนด

จากเส้นอุปสงค์แบบของฮิกซ์ที่หามาได้ จะเห็นได้ว่าเส้นอุปสงค์แบบของฮิกซ์มีลักษณะดังนี้

1. ทุก ๆ จุดบนเส้นอุปสงค์แบบของฮิกซ์ แสดงถึงปริมาณความต้องการซื้อที่ทำให้ผู้บริโภคจะเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ณ ระดับราคาและระดับความพอใจที่กำหนด

2. รายจ่ายต่ำสุดที่ปรากฏบนเส้นอุปสงค์แบบของฮิกซ์จะมีค่าไม่คงที่ แต่จะปรับเปลี่ยนไปตามราคาสินค้า โดยที่ระดับความพอใจทุก ๆ จุดบนเส้นอุปสงค์แบบของฮิกซ์คงที่ กล่าวคือ ถ้าราคาสินค้าเพิ่มขึ้น รายจ่ายที่ต่ำสุดก็จะเพิ่มขึ้นด้วย และถ้าระดับราคาสินค้าลดลง รายจ่ายที่ต่ำที่สุดจะลดลง อย่างไรก็ตามระดับความพอใจทุกจุดบนเส้นอุปสงค์แบบของฮิกซ์จะคงที่ และจำกคุณสมบัตินี้เส้นอุปสงค์แบบของฮิกซ์จึงมีชื่อเรียกอีกชื่อว่า เส้นอุปสงค์ที่ได้รับการชดเชย (Compensated demand curve)

วิธีการทางคณิตศาสตร์เพื่อวิเคราะห์พฤติกรรมของผู้บริโคในการที่จะบริโภคสินค้าโดยเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดเพื่อให้ได้รับอรรถประโยชน์ขคงที่ ณ ระดับที่กำหนด ซึ่งสามรถหาสมการเส้นอุปสงค์ตามวิธีการของฮิกซ์ได้ พิจารณาได้ดังนี้

สมมุติว่าผู้บริโภคซื้อสินค้า 2 ชนิด คือสินค้า X และสินค้า Y ราคาต่อหน่วยของสินค้า X และสินค้า Y เท่ากัย P_X และ P_Yบาทต่อหน่วยตามลำดัย ดังนั้นสมการค่าใช้จ่าย (Expenditure Function: E) ในการซื้อสินค้า X และสินค้า Y คือ

$$E = P_X.X + P_Y.Y$$

ถ้าสมมุติว่าผู้บริโภคมีเป้าหมายที่จะเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดในการซื้อสินค้า X และสินค้า Y เพื่อให้ได้รับอรรถประโยชน์ในระดับ U^o

โดยฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์รวม (Utility Function) ณ ระดับความพอใจที่กำหนด มีรูปสมการคือ

$$U^o = U(X, Y)$$

สมการอุปสงค์สำหรับสินค้า X และสินค้า Y ที่ทำให้ผู้บริโภคเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด และได้รับอรรถประโยชน์คงที่ ณ ระดับ U^o หาได้ดังนี้

โดยวิธีการของ Lagrangian multiplier method จะได้

$$Z = P_X.X + P_Y.Y + \lambda\left[U^o - U(X, Y)\right]$$

เงื่อนไขอันดับแรก (First Order Condition) สำหรับการหาเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดในการซื้อสินค้า โดยหาค่า Partial derivatives Z มุ่งตรงต่อ X, Y และ λ แล้วจัดให้เท่ากับศูนย์

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = P_X - \lambda.U_X(X, Y) = 0 \qquad \text{. . . . . (1 – 37)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = P_Y - \lambda.U_Y(X, Y) = 0 \qquad \text{. . . . . (1 – 38)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = U^o - U(X, Y) = 0 \qquad \text{. . . . . (1 – 39)}$$

จากสมการที่ (1 – 37) และ (1 – 38) หาค่า λ จะได้

$$\frac{P_X}{U_X(X, Y)} = \frac{P_Y}{U_Y(X, Y)} \qquad \text{. . . . . (1 – 40)}$$

จากสมการที่ (1 – 39) และ (1 – 40) หาค่าของ X และ Y จะได้สมการอุปสงค์ที่ได้รับจากการชดเชย หรือสมการอุปสงค์แบบของฮิกซ์ (Compensated demand function or Hicksian demand function) สำหรับสินค้า X และสินค้า Y ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของ P_X, P_Y และ U^o

$$X = X(P_X, P_Y, U^o)$$

$$Y = Y(P_X, P_Y, U^o)$$

และถ้าแทนค่าของ X และ Y ที่หามาได้ จะได้ค่าของอรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้าย () ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของ P_X, P_Y และ U^o โดยมีรูปสมการคือ

$$\lambda = \lambda(P_X, P_Y, U^o)$$

ถ้าสมมุติให้ราคาสินค้าชนิดอื่น และระดั้บความพอใจคงที่อยู่ ณ ระดับหนึ่ง ก็จะได้ความต้องการสินค้าชนิดหนึ่งที่ถูกกำหนดโดยราคาสินค้าชนิดนั้น หรือสมการอุปสงค์ยองสินค้า X และสินค้า Y นั่นคือ

$$X = X(P_X) \quad \text{โดยที่ } P_Y \text{ และ } U^o \text{ คงที่}$$

$$Y = Y(P_Y) \quad \text{โดยที่ } P_X \text{ และ } U^o \text{ คงที่}$$

ฟังก์ชั่นค่าใช้จ่าย (Expenditure Function) ณ ระดับความพอใจระดับหนึ่ง

ฟังก์ชั่นค่าใช้จ่าย (Expenditure Function) เป็นฟังก์ชั่นที่แสดงให้เห็นถึงค่าใช้จ่ายที่ต่ำที่สุดที่ผู้บริโภคต้องการใช้เพื่อบรรลุระดับความพอใจที่กำหนดภายใต้ราคาสินค้าที่กำหนดจะเป็นฟังก์ชั่นของราคาของสินค้าและอรรถประโยชน์ ณ ระดับหนึ่งที่กำหนด

ในกรณีที่บริโภคสินค้า 2 ชนิด สมมุติเป็นสินค้า X และสินค้า Y เมื่อหาค่าของสินค้า X และสินค้า Y ที่ทำให้ได้ความพอใจ ณ ระดับความพอใจระดับหนึ่งได้แล้ว เมื่อนำค่าของ X และ Y ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของ P_X, P_Y และ U^o ที่ทำให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด ณ ระดับความพอใจคงที่อยู่ระดับหนึ่ง แทนลงในสมการค่าใช้จ่าย จะได้ฟังก์ชั่นค่าใช้จ่าย (Expenditure Function) ที่เสียต่ำสุดที่ผู้บริโภคต้องการใช้เพื่อบรรลุระดับความพอใจที่กำหนด ซึ่งฟังก์ชั่นค่าใช้จ่ายนี้จะเป็นฟังก์ชั่นของราคาสินค้า X (P_X) ราคาสินค้า Y (P_Y) และอรรถประโยชน์ ณ ระดับที่กำหนด (U^o)

$$E = E(P_X, P_Y, U^o)$$

ในทางคณิตศาสตร์ฟังก์ชั่นค่าใช้จ่ายต่ำสุด ณ ระดับความพอใจที่กำหนด หาได้โดยนำเอา Hicksian demand function แทนลงในสมการค่าใช้จ่าย

คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชั่นค่าใช้จ่ายต่ำสุด ณ ระดับความพอใจที่กำหนด คือ ค่าอนุพันธ์บางส่วน (partial derivative) ของฟังก์ชั่นค่าใช้จ่ายเมื่อเปรียบเทียบกับราคาสินค้าชนิดใดจะเท่ากับฟังก์ชั่นอุปสงค์แบบของ Hicks ของสินค้าชนิดนั้น นั่นคือการหาสมการอุปสงค์ของฮิกซ์ (Hicksian demand function) จากฟังก์ชั่นค ้าใช้จ่าย สามารถหาได้โดยสูตรของ Sheppard's Lemma ซึ่งแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

จาก $E = E(P_X, P_Y, U^o)$

$$\frac{\partial E}{\partial P_X} = X = X(P_X, P_Y, U^o)$$

$$\frac{\partial E}{\partial P_Y} = Y = Y(P_X, P_Y, U^o)$$

ตัวอย่างการหาสมการเส้นอุปสงค์ที่ได้รับการชดเชย (Compensated demand function) หรือสมการอุปสงค์แบบของฮิกซ์ (Hicksian demand function)

สมมุติว่าผู้บริโภคซื้อสินค้า 2 ชนิด คือสินค้า X และสินค้า Y โดยมีสมการค่าใช้จ่าย (Expenditure Function: E) ในการซื้อสินค้า X และสินค้า Y คือ

$$E = P_X.X + P_Y.Y$$

ถ้าสมมุติผู้บริโภคต้องการซื้อสินค้า X และสินค้า Y ที่จะทำให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดภายใต้ข้อจำกัดชองการที่ผู้บริโภคได้รับอรรถประโยชน์ ณ ระดับที่กำหนดให้

สมมุติฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ของผู้บริโภค คือ

$$U^o = XY$$

ให้หาสมการอุปสงค์สำหรับสินค้า X และสินค้า Y ที่ทำให้ผู้บริโภคเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด โดยได้รับความพอใจ ณ ระดับ U^o

เพื่อให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดในการซื้อสินค้า X และสินค้า Y ภายใต้ข้อจำกัดของการที่จะได้รับอรรถประโยชน์คงที่อยู่ ณ ระดับ U^o โดยวิธีการของ Lagrangian multiplier method จะได้

$$Z = P_X.X + P_Y.Y + \lambda\left[U^o - XY\right]$$

เงื่อนไขอันดับแรก (First Order Condition) สำหรับการหาเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดในการซื้อสินค้า โดยหาค่า Partial derivatives Z มุ่งตรงต่อ X, Y และ λ แล้วจัดให้เท่ากับศูนย์

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = P_X - \lambda.Y = 0 \qquad \text{.....(1 – 41)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = P_Y - \lambda.X = 0 \qquad \text{.....(1 – 42)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = U^o - XY = 0 \qquad \text{.....(1 – 43)}$$

จากสมการที่ (1–41) , (1–42) และ (1–43) หาค่าของ X และ Y จะได้ Compensated demand functions สำหรับสินค้า X และสินค้า Y ดังนี้

$$X = \sqrt{\frac{U^o P_Y}{P_X}}$$

$$Y = \sqrt{\frac{U^o P_X}{P_Y}}$$

จะเห็นได้ว่าปริมาณสินค้า X และสินค้า Y ที่ทำให้ผู้บริโภคได้รับความพอใจ ณ ระดับหนึ่งที่กำหนดจะขึ้นอยู่กับระดับราคาของสินค้า X (P_X) ราคาของสินค้า Y (P_Y) และอรรถประโยชน์ของสินค้าในระดับที่กำหนด (U^o)

$$X = X(P_X, P_Y, U^o)$$

$$Y = Y(P_X, P_Y, U^o)$$

เมื่อนำค่าของ X และ Y ลงในสมการค่าใช้จ่าย (Expenditure Function) จะได้

$$E = P_X \sqrt{\frac{U^o P_Y}{P_X}} + P_Y \cdot \sqrt{\frac{U^o P_X}{P_Y}}$$

$$E = 2\sqrt{U^0 P_X P_Y}$$

แสดงว่าสมการค่าใช้จ่ายเป็นฟังก์ชหั่นของราคาของสินค้า X (P_X) ราคาของสินค้า Y (P_Y) และอรรถประโยชน์ของสินค้าในระดั้บหนึ่ง (U^o) นั่นคือ

$$E = E(P_X, P_Y, U^o)$$

เมื่อต้องการหาสมการอุปสงค์ของฮิกซ์ (Hicksian demand function) ของสินค้า X และสินค้า Y จากฟังก์ชั่นค่าใช้จ่าย สามารถหาได้โดยใช้สูตรของ Sheppard's Lemma โดยการหาค่าอนุพันธ์บางส่วน (partial derivative) ของผังก์ชั่นค่าใช้จ่ายเมื่อเปรียบเทียบกับราคาสินค้า X และราคาสินค้า Y ได้ดังนี้

จาก $E = 2\sqrt{U^0 P_X P_Y}$

$$\frac{\partial E}{\partial P_X} = \sqrt{\frac{U^o P_Y}{P_X}} = X$$

$$\frac{\partial E}{\partial P_Y} = \sqrt{\frac{U^o P_X}{P_Y}} = Y$$

โดยที่ $X = X(P_X, P_Y, U^o)$

$Y = Y(P_X, P_Y, U^o)$

การใช้วิธีทางคณิตศาสตร์หาอุปสงค์สำหรับสินค้าโดยวิธีวิเคราะห์ของ Slutsky

สมมติให้ผู้บริโภคมีฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์รวมจากการบริโภคสินค้า 2 ชนิด คือ สินค้า X และสินค้า Y ดังนี้

$$U \quad = \quad U(X, Y)$$

ผู้บริโภคมีงบประมาณจำกัด แสดงโดยสมการ

$$I \quad = \quad P_X.X + P_Y.Y$$

โดยวิธีการของ Lagrangian Multiplier Method

$$Z \quad = \quad U(X, Y) + \lambda(I - P_X.X - P_Y.Y)$$

First Order Condition สำหรับค่าสูงสุดของ U จะต้องได้ว่า $\frac{\partial Z}{\partial X} = 0$, $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ = 0 และ $\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 0$

$$\frac{\partial Z}{\partial X} \quad = \quad U_X(X, Y) - P_X.\lambda \quad = \quad 0 \qquad \text{. . . . . (1 – 44)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} \quad = \quad U_Y(X, Y) - P_Y.\lambda \quad = \quad 0 \qquad \text{. . . (1 – 45)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} \quad = \quad I - P_X.X - P_Y.Y \quad = \quad 0 \qquad \text{. . . (1 – 46)}$$

จากสมการที่ (1– 44), (1– 45) และ (1– 46) สามารถหาค่าของ X, Y และ λ ได้ โดย

$$X \quad = \quad X(P_X, P_Y, I)$$

$$Y \quad = \quad Y(P_X, P_Y, I)$$

$$\lambda \quad = \quad \lambda(P_X, P_Y, I)$$

เพื่อที่จะหาผลของการเปลี่ยนแปลงของราคาและรายได้ที่มีต่อการบริโภคสินค้าของผู้บริโภค โดยให้ตัวแปรทั้งหมดเปลี่ยนแปลงได้ จึงหา total differential ของสมการที่ (1– 44), (1– 45) และ (1– 46) จะได้

$$U_{XX}dX + U_{XY}dY - P_X\,d\lambda = \lambda\,dP_X \qquad ...(1-47)$$

$$U_{XY}dX + U_{YY}dY - P_Y\,d\lambda = \lambda\,dP_Y \qquad ...(1-48)$$

$$-P_X dX - P_Y dY = -dI + XdP_X + YdP_Y \qquad ...(1-49)$$

จากสมการที่ (1 – 47) , (1 – 48) และ (1 – 49) เขียนอยู่ในรูปของ matrix และใช้วิธีการของ Cramer's rule จะได้

$$dX = \frac{(U_{YY}P_X - U_{XY}P_Y)(-dI + XdP_X + YdP_Y) + P_XP_Y\lambda\,dP_Y - P_Y^2\lambda\,dP_X}{2U_{XY}P_XP_Y - U_{XX}P_Y^2 - U_{YY}P_X^2} \quad ..(1-50)$$

$$dY = \frac{P_XP_Y\lambda\,dP_X - P_X^2\lambda\,dP_Y + (U_{XX}P_Y - U_{XY}P_X)(-dI + XdP_X + YdP_Y) - P_X^2\lambda\,dP_Y}{2U_{XY}P_XP_Y - U_{XX}P_Y^2 - U_{YY}P_X^2}.$$

...... (1-51)

$$d\lambda = \frac{[U_{XX}U_{YY} - (U_{XY})^2](-dI + XdP_X + YdP_Y) + (U_{XX}P_Y - U_{XY}P_X)\lambda\,dP_Y + (U_{YY}P_X - U_{XY}P_Y)\lambda\,dP_X}{2U_{XY}P_XP_Y - U_{XX}P_Y^2 - U_{YY}P_X^2}..$$

.......(1 – 52)

ถ้าต้องการพิจารณาว่า เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้า X โดยที่ราคาสินค้า Y และรายได้ของผู้บริโภคคงที่ จะมีผลต่อปริมาณซื้อสินค้า X สินค้า Y และ λ อย่างไร พิจารณาจากสมการที่ (1–50) (1–51) และ (1–52) จะได้

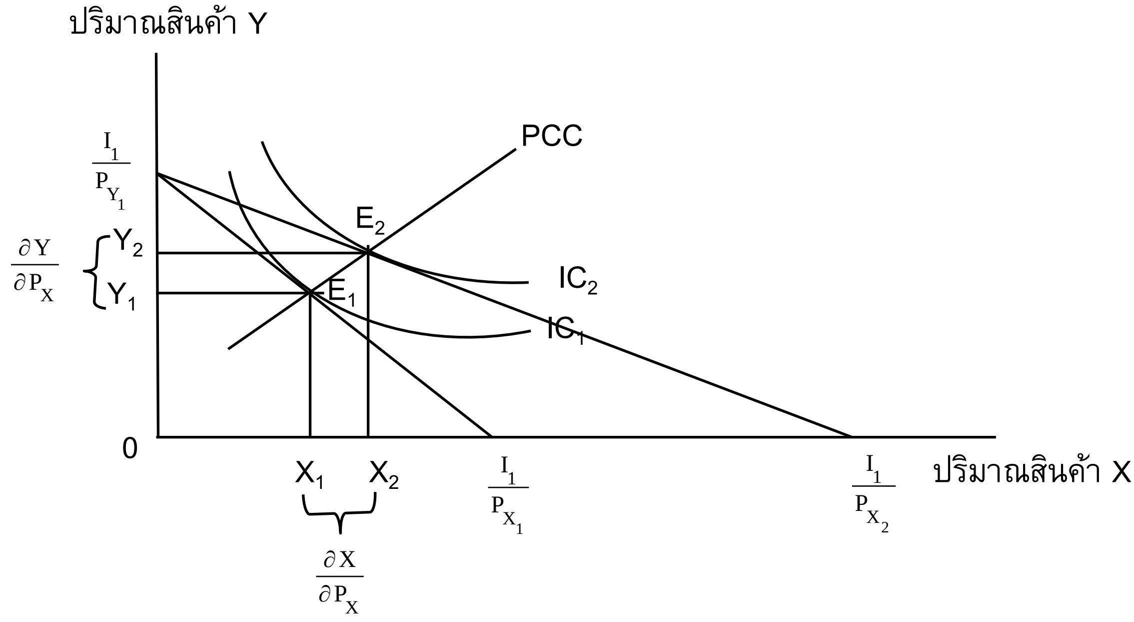
$$\frac{\partial X}{\partial P_X} = \frac{X(U_{YY}P_X - U_{XY}P_Y) - P_Y^2\lambda}{2U_{XY}P_X P_Y - U_{XX}P_Y^2 - U_{YY}P_X^2} \qquad \ldots . (1–53)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial P_X} = \frac{X(U_{XX}P_Y - U_{XY}P_X) - P_X P_Y\lambda}{2U_{XY}P_X P_Y - U_{XX}P_Y^2 - U_{YY}P_X^2} \qquad \ldots . (1–54)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial P_X} = \frac{X[U_{XX}U_{YY} - (U_{XY})]^2 + \lambda U_{YY}P_X - U_{XY}P_Y)}{2U_{XY}P_X P_Y - U_{XX}P_Y^2 - U_{YY}P_X^2} \qquad \ldots . (1–55)$$

จากสมการที่ (1–53) และ (1–54) ค่าของ $\frac{\partial X}{\partial P_X}$ และ $\frac{\partial Y}{\partial P_X}$ แสดงผลทางด้านราคาหรือผลทั้งหมด (Price effect or Total effect) ซึ่งเป็นผลของการเปลี่ยนแปลงในปริมาณตวามต้องการซื้อของสินค้า X และสินค้า Y อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงในราคาของสินค้า X เมื่อราคาสินค้า Y () และรายได้ (I) คงที่ ซึ่งจะเท่ากับปริมาณ X_1X_2 และ Y_1Y_2 หน่วย เมื่อพิจารณาดังรูปที่ 1 – 12

รูปที่ 1 – 12 แสดงผลทั้งหมดอันเนื่องจากราคาสินค้า X เปลี่ยนแปลง



ต่อไปถ้าสมมติว่าราคาสินค้า X และราคาสินค้า Y คงที่ แต่รายได้ของผู้บริโภคเปลี่ยนแปลง นั่นคือ สมมติว่า $dP_X = 0$ และ $dP_Y = 0$ ถ้าต้องการจะวิเคราะห์ว่าการเปลี่ยนแปลงในรายได้ของผู้บริโภคจะมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงในความต้องการซื้อสินค้า X, สินค้า Y และ λ อย่างไร นั่นคือจะพิจารณาหาค่าของ $\frac{\partial X}{\partial I}$, $\frac{\partial Y}{\partial I}$ และ $\frac{\partial \lambda}{\partial I}$ โดยสามารถพิจารณาได้โดย take partial derivatives สมการที่ (1–50) (1–51) และ (1–52) เมื่อเทียบกับ I ทำให้ได้ simultaneous equation ดังนี้

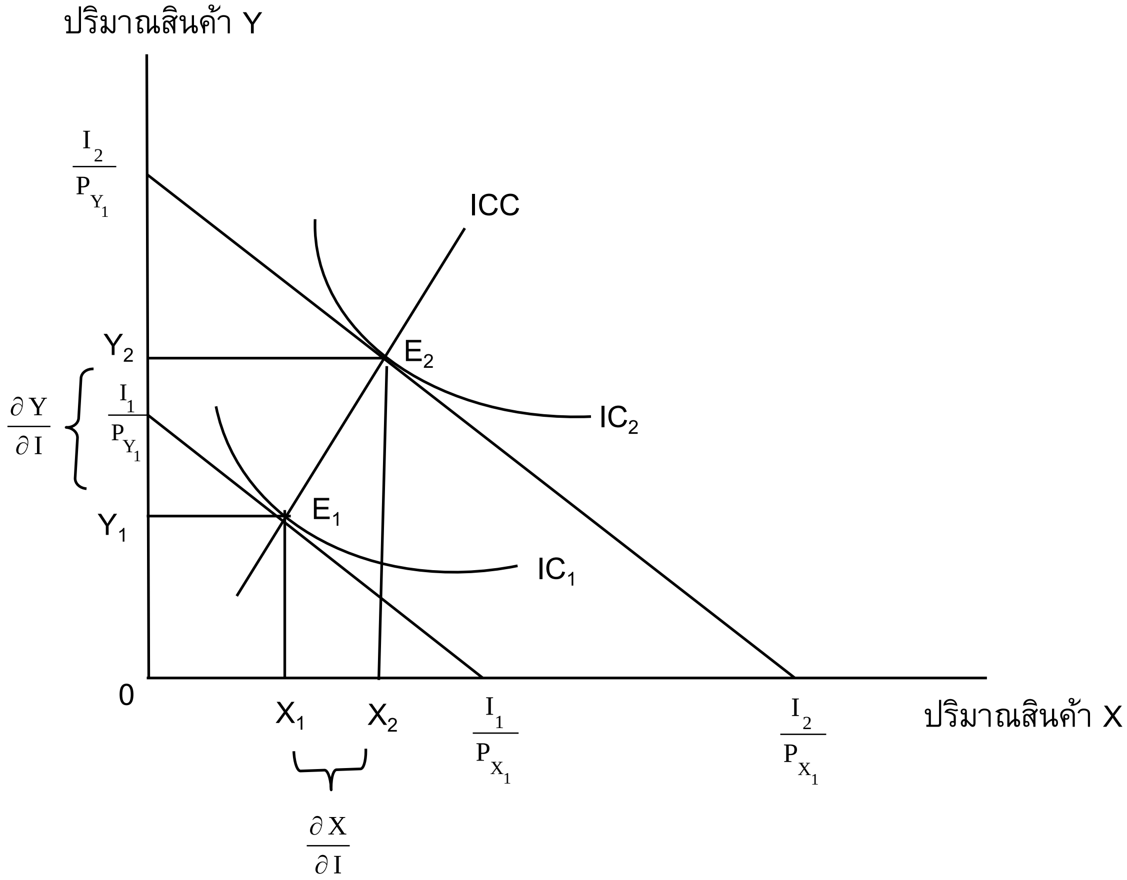
$$\frac{\partial X}{\partial I} = \frac{-(U_{YY}P_X - U_{XY}P_Y)}{2U_{XY}P_X P_Y - U_{XX}P_Y^2 - U_{YY}P_X^2} \quad \ldots . (1–56)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial I} = \frac{U_{XY}P_X - U_{XX}P_Y}{2U_{XY}P_X P_Y - U_{XX}P_Y^2 - U_{YY}P_X^2} \quad \ldots . (1–57)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial I} = \frac{(U_{XY})^2 - U_{XX}U_{YY}}{2U_{XY}P_X P_Y - U_{XX}P_Y^2 - U_{YY}P_X^2} \quad \ldots . (1–58)$$

สมการที่ (1–56) และ (1–57) เป็นการพิจารณาถึงผลการเปลี่ยนแปลงในปริมาณความต้องการซื้อสินค้า X และสินค้า Y เมื่อรายได้ของผู้บริโภคเปลี่ยน โดยที่ราคาสินค้า X และราคาของสินค้า Y ไม่เปลี่ยนแปลง ซึ่งจะเท่ากับปริมาณ X_1X_3 และ Y_1Y_3 หน่วย เมื่อพิจารณาดังรูปที่ 1 – 13

รูปที่ 1–13 แสดงผลการเปลี่ยนแปลงในปริมาณซื้ออันเนื่องจากรายได้เปลี่ยน



ในการพิจารณาถึงผลของการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้าชนิดหนึ่ง โดยรายได้และราคาสินค้าอีกชนิดคงที่ และได้มีการชดเชยการเปลี่ยนแปลงของรายได้จนทำให้รายได้ที่แท้จริงของผู้บริโภคคงเดิม โดยผู้บริโภคอยู่บนเส้นแห่งความพอใจเท่ากันเส้นเดิมก่อนที่ราคาจะเปลี่ยนแปลง ซึ่งแสดงว่า $dU = 0$ ซึ่งจะทำให้ $U_X dX + U_Y dY = 0$ และ $P_X dX + P_Y dY = 0$

ดังนั้น จากสมการที่ (1 – 49) จะได้ว่า $-dI + XdP_X + YdP_Y = 0$

ถ้าสมมติราคาสินค้าที่เปลี่ยนนั้นคือราคาสินค้า X และพิจารณาถึงผลของการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้า X ที่มีต่อปริมาณซื้อสินค้า X เมื่อมีการชดเชยการเปลี่ยนแปลงของรายได้จนทำให้ผู้บริโภคอยู่บนเส้นความพอใจเท่ากันเส้นเดิมจะพิจารณา

ได้ดังนี้

$$\left[\frac{\partial X}{\partial P_X}\right]_{U=constant} = \frac{-P_Y^2 \lambda}{2U_{XY}P_X P_Y - U_{XX}P_Y^2 - U_{YY}P_X^2} \quad \ldots\ldots (1-59)$$

ดังนั้นสมการที่ (1 – 53) สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{\partial X}{\partial P_X} = \left[\frac{\partial X}{\partial P_X}\right]_{U=constant} - X \left[\frac{\partial X}{\partial I}\right]_{price\ =\ constant} \ldots\ldots (1-60)$$

หรือ Price Effect = Substitution Effect + Income Effect

สมการที่ (1 - 60) เรียกว่าสมการของสลัสกี้ (Slutsky's equation)

ค่า $\frac{\partial X}{\partial P_X}$ คือ ค่า slope ของเส้นอุปสงค์แบบปกติของสินค้า X

และค่า $\left[\frac{\partial X}{\partial P_X}\right]_{U=constant}$ คือค่า Slope ของเส้นอุปสงค์ที่มีการชดเชยการชดเชย (compensated demand curve) สำหรับสินค้า X หรือเป็นผลทางด้านการทดแทนกันของสินค้า (substitution effect) ซึ่งเป็นอัตราของการบริโภคสินค้า X ทดแทนสินค้า Y เมื่อราคาสินค้า X เปลี่ยนแปลงและผู้บริโภคยังคงได้รับความพอใจเท่าเดิม

โดยที่ $$\left[\frac{\partial X}{\partial P_X}\right]_{U=constant} = \frac{-P_Y^2 \lambda}{2U_{XY}P_X P_Y - U_{XX}P_Y^2 - U_{YY}P_X^2}$$

ค่า λ คืออรรถประโยชน์เพิ่มของเงินหนึ่งหน่วยสุดท้าย ซึ่งหาได้จากค่า partial derivative ของ U มุ่งตรงต่อรายได้ (I) เมื่อราคาสินค้าคงที่ ดังพิจารณาได้ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial I} = U_X \frac{\partial X}{\partial I} + U_Y \frac{\partial Y}{\partial I}$$

แทนค่า $U_X = \lambda P_X$ และ $U_Y = \lambda P_Y$

$$\therefore \quad \frac{\partial U}{\partial I} = \lambda \left(P_X \frac{\partial X}{\partial I} + P_Y \frac{\partial Y}{\partial I}\right)$$

เนื่องจากค่า partial derivative ของสมการงบประมาณจำกัดมุ่งตรงต่อรายได้ (I) มีค่าดังนี้

$$1 = P_X \frac{\partial X}{\partial I} + P_Y \frac{\partial Y}{\partial I}$$

ดังนั้น $$\frac{\partial U}{\partial I} = \lambda$$

นั่นคือ λ แสดงถึงอรรถประโยชน์เพิ่มของเงิน (marginal utility of money) ซึ่งจะมีค่าเป็นบวกถ้าอรรถประโยชน์เพิ่มของสินค้า X และสินค้า Y ซึ่งถูกสมมติว่ามีค่าเป็นบวก

ค่า $2 U_{XY} P_X P_Y - U_{XX} P_Y^2 - U_{YY} P_X^2 > 0$

นั่นแสดงว่า $\left[\frac{\partial X}{\partial P_X}\right]_{U=constant}$ หรือ Substitution effect มีค่าเป็นลบเสมอ และก็จะแสดงว่าเส้นอุปสงค์ที่ถูกชดเชย (Compensated demand curve) จะมีค่า slope เป็นลบเสมอ

ส่วน $-X \left[\frac{\partial X}{\partial I}\right]_{price\ =\ constant}$ หรือผลทางด้านรายได้ (income effect) อาจมีเครื่องหมายบวกหรือลบก็ได้

ดังนั้นผลทั้งหมด (Total effect or Price effect) จะมีเครื่องหมายอย่างไรจึงขึ้นอยู่กับผลทางด้านการทดแทนกันและผลทางด้านรายได้

อย่างไรก็ตาม สามารถสรุปได้ว่าสินค้า X จะเป็นสินค้าด้อย (Inferior good) ถ้า $\frac{\partial X}{\partial I} < 0$ นั่นคือ เมื่อรายได้เพิ่มขึ้น ผู้บริโภคซื้อสินค้า X ลดลง และในทางตรงข้าม เมื่อรายได้ของผู้บริโภคลดลงผู้บริโภคจะซื้อสินค้า X มากขึ้น ซึ่งมีผลทำให้ผลทางด้านรายได้

มีค่าเป็นบวก แต่ผลทางด้านรายได้มีค่าน้อยกว่าผลทางด้านการทดแทนกันของสินค้า จึงทำให้ผลทั้งหมด $\{\frac{\partial X}{\partial P_X}\}$ มีค่าเป็นลบ

สำหรับสินค้ากิฟเฟ่น (Giffen good) เป็นสินค้าด้อยที่ผลทางด้านรายได้มากกว่าผลทางด้านการทดแทนกันของสินค้าซึ่งมีค่าเป็นลบ และทำให้ผลทั้งหมด $\{\frac{\partial X}{\partial P_X}\}$ มีค่าเป็นบวก นั่นหมายความว่า เมื่อราคาสินค้า X ลดลง ผู้บริโภคจะซื้อสินค้า X ปริมาณลดลงด้วย และเมื่อราคาสินค้า X เพิ่มขึ้น ผู้บริโภคจะซื้อสินค้า X เป็นปริมาณเพิ่มขึ้นด้วย

สมการของสลัสกี้ (Slutsky equation) สามารถแสดงในรูปของความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคา (price elasticity of demand) และความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (income elasticity of demand) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial X}{\partial P_X}\cdot\frac{P_X}{X} = \left[\frac{\partial X}{\partial P_X}\right]_{U=constant}\frac{P_X}{X} - X\left[\frac{\partial X}{\partial I}\right]_{price\ =\ constant}\cdot\frac{P_X}{X}\ \frac{I}{I}$$

$$\frac{\partial X}{\partial P_X}\cdot\frac{P_X}{X} = \left[\frac{\partial X}{\partial P_X}\right]_{U=constant}\frac{P_X}{X} - \frac{P_X.X}{I}\left[\frac{\partial X}{\partial I}\right]_{price\ =\ constant}\cdot\frac{I}{X}$$

$$\varepsilon_{XX} = \xi_{XX} - \propto_X\eta_X$$

โดยที่ $\varepsilon_{XX} = \frac{\partial X}{\partial P_X}.\ \frac{P_X}{X}$ ซึ่งหมายถึงความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาของอุปสงค์แบบปกติของสินค้า X (price elasticity of the ordinary demand curve)

$$\xi_{XX} = \left(\frac{\partial X}{\partial P_X}\right)_{U=constant} \cdot \frac{P_X}{X}$$ ซึ่งหมายถึง ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาของอุปสงค์ ของสินค้า X ที่มีการชดเชย (price elasticity of the compensated demand curve)

$$\eta_X = \frac{\partial X}{\partial I} \cdot \frac{I}{X}$$ ซึ่งหมายถึง ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (Income elasticity of demand) ของสินค้า X

$$\alpha_X = \frac{P_X \cdot X}{I}$$ ซึ่งหมายถึงสัดส่วนของการใช้จ่ายสำหรับสินค้า X ต่อรายได้

จากสมการที่ (1 – 61) หมายความว่า ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาของอุปสงค์แบบปกติ เท่ากับความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาของอุปสงค์ที่มีการชดเชย ลบด้วยผลคูณของสัดส่วนของการใช้จ่ายสำหรับสินค้า X ต่อรายได้ กับความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ ดังนั้น ถ้าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้มีค่าเป็นบวก ($\eta_X > 0$) ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาของอุปสงค์แบบปกติจะมีค่ามากกว่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาของอุปสงค์ที่มีการชดเชย ($\varepsilon_{XX} > \xi_{XX}$)

ตัวอย่างการคำนวณหาสมการของสลัสกี้ (Slutsky equation)

สมมติฟังก์ชั่นอรรถประโยชน์ คือ $U = XY$

และสมการงบประมาณจำกัด คือ $I = P_X . X + P_Y . Y$

จงหาสมการอุปสงค์ของสินค้า X ตามแบบของสลัสกี้

ถ้าสมมุติ $I = 100$, $P_X = 2$, $P_Y = 5$ จงหาค่าของผลทางด้านราคาจากการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้า X

(1) จงหาสมการอุปสงค์ของสินค้า X ตามแบบของสลัสกี้

โดยวิธีการของ Lagrange multiplier method

$$Z = XY + \lambda(I - P_X.X - P_Y.Y)$$

หาค่า partial derivative ของ Z มุ่งตรงต่อ X, Y, และ λ แล้วจัดให้เท่ากับศูนย์

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial X} &= Y - P_X\lambda = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial Y} &= X - P_Y.\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1 - 62)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = I - P_X.X - P_Y.Y = 0 \quad \ldots\ldots (1 - 63)$$

จากสมการที่ (1 – 62) หาค่าของ λ จะได้

$$\frac{Y}{P_X} = \frac{X}{P_Y} = \lambda$$

$$\therefore \quad P_Y.Y = P_X.X$$

แทนค่า $P_Y.Y = P_X.X$ ใน (1 – 63) จะได้

$$X = \frac{I}{2P_X}$$

$$Y = \frac{I}{2P_Y}$$

$$\lambda = \frac{I}{2P_XP_Y}$$

หาค่า total differentials สมการที่ (1 – 62) และ (1 – 63) จะได้

$$dY - P_X\,d\lambda = \lambda\,dP_X$$

$$dX - P_Y\,d\lambda = \lambda\,dP_Y$$

$$-P_X\,dX - P_Y\,dY = -dI + X\,dP_X + Y\,dP_Y$$

โดย Cramer's rule หาค่าของ dX , dY และ d λ ได้

$$dX = \frac{-P_Y(-dI + XdP_X + YdP_Y) + P_X P_Y \lambda dP_Y - P_Y^2 \lambda dP_X}{2P_X P_Y}$$

$$dY = \frac{P_X P_Y \lambda dP_X - P_X(-dI + XdP_X + YdP_Y) - P_X^2 \lambda dP_Y}{2P_X P_Y}$$

$$d\lambda = \frac{-P_X \lambda dP_Y - P_Y \lambda dP_X - (-dI + XdP_X + YdP_Y)}{2P_X P_Y}$$

ถ้าสมมติว่าราคาสินค้า X (P_X) เท่านั้นที่เปลี่ยนแปลง โดยตัวแปรอื่นๆ คงที่

$$\therefore \quad \frac{\partial X}{\partial P_X} = -\frac{P_Y \lambda}{2P_X} - \frac{X}{2P_X} \qquad \text{. . . . (1 – 64)}$$

สมการที่ (1 – 64) คือสมการอุปสงค์ของสลัสกี้สำหรับสินค้า X (Slutsky's demand equation for X)

แทนค่า $\lambda = \frac{I}{2P_X P_Y}$ และ $X = \frac{I}{2P_X}$ ในสมการที่ (1 – 64)

$$\therefore \quad \frac{\partial X}{\partial P_X} = -\frac{I}{2P_X^2} \qquad \text{. . . . (1 – 65)}$$

สมการที่ (1 – 65) คือสมการอุปสงค์ของสลัสกี้สำหรับสินค้า X (Slutsky's demand equation for X)

(2) ถ้าสมมติ $I = 100$, $P_X = 2$, $P_Y = 5$ หาค่าของผลการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้า X ได้ดังนี้

แทนค่า I , P_X และ P_Y ใน $\frac{\partial X}{\partial P_X}$ จะได้

$$\frac{\partial X}{\partial P_X} = -\frac{100}{2(2)^2} = -12.5$$

ค่า $\frac{\partial X}{\partial P_X}$ = – 12.5 ที่ได้มานี้ หมายความว่า เมื่อปัจจัยอื่นๆ คงที่ ถ้าราคาสินค้า X เปลี่ยนแปลงไป 1 บาท จะมีผลทำให้ปริมาณความต้องการซื้อสินค้า X เปลี่ยนแปลงไป 12.5 หน่วย โดยเปลี่ยนแปลงในทิศทางตรงกันข้ามกับราคาสินค้า X

ค่า $-\frac{P_Y \lambda}{2P_X}$ เป็นผลทางด้านการทดแทนกันของสินค้า (substitution effect) ซึ่งมีค่าเท่ากับ - 6.25

ค่า $-\frac{X}{2P_X}$ เป็นผลทางด้านรายได้ (income effect) ซึ่งมีค่าเท่ากับ - 6.25

เส้นความพอใจเท่ากัน และความยืดหยุ่นของอุปสงค์ (Indifference Curve and Elasticity of Demand)

1. ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคา (Price Elasticity of Demand)

เราอาจทราบได้ว่า ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคามีค่าเป็นอย่างไร โดยดูจากความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงของราคากับรายจ่ายรวม (Total Expenditure) กล่าวคือ

1) ถ้าราคาสินค้าเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกับรายจ่ายรวมแล้ว ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาจะมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง

2) ถ้าราคาสินค้าเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางตรงกันข้ามกับรายจ่ายรวมแล้ว ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาจะมีค่ามากกว่าหนึ่ง

3) ไม่ว่าราคาสินค้าจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร แต่รายจ่ายรวมยังคงจำนวนเท่าเดิม ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาจะมีค่าเท่ากับหนึ่ง

ความสัมพันธ์ดังกล่าวข้างต้นสามารถพิจารณาได้ในทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

สมการรายจ่ายทั้งหมดของผู้บริโภค (consumer's total expenditure) คือ

$$TE = P.Q$$

ดังนั้น
$$\frac{\partial(P.Q)}{\partial P} = Q + P.\frac{\partial Q}{\partial P}$$

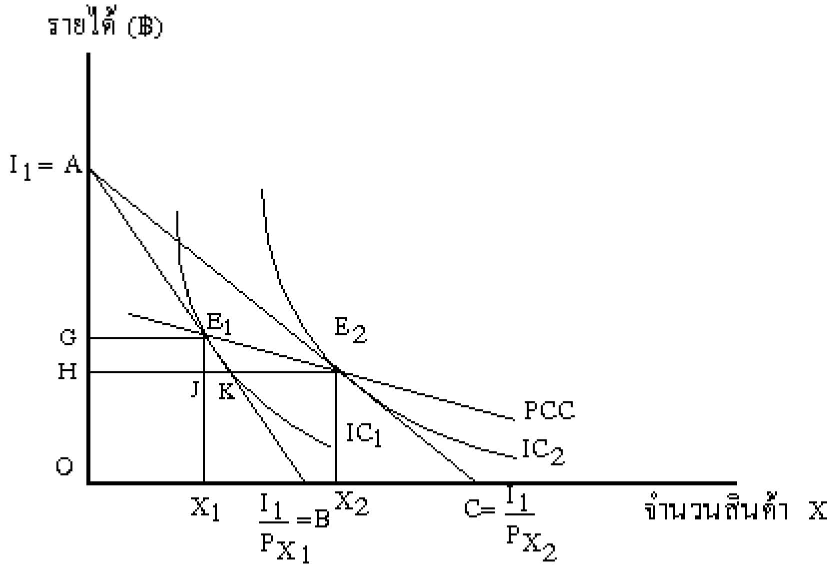
$$= Q\left[1 + \frac{P}{Q}\ \frac{\partial Q}{\partial P}\right]$$

$$= Q\ [1 + E_p]$$

จะเห็นได้ว่า ถ้าค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาน้อยกว่าหนึ่ง (ค่า E_p มีเครื่องหมายเป็นลบ) การเปลี่ยนแปลงในรายจ่ายรวมของผู้บริโภคเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงในราคาสินค้า ($\frac{\partial PQ}{\partial P}$) จะมีเครื่องหมายเป็นบวก แสดงว่า ราคาสินค้าและรายจ่ายรวมจะเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกัน ถ้าค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคามากกว่าหนึ่ง จะได้ $\frac{\partial PQ}{\partial P}$ มีเครื่องหมายเป็นลบ แสดงว่า ราคาสินค้าและรายจ่ายรวมจะเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางตรงกันข้าม และถ้าค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาเท่ากับหนึ่ง จะได้ $\frac{\partial PQ}{\partial P}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ แสดงว่าไม่ว่าราคาสินค้าจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร รายจ่ายจะไม่เปลี่ยนแปลง

ความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถพิจารณาได้โดยใช้เส้นความพอใจเท่ากันมาวิเคราะห์ได้ดังต่อไปนี้

รูปที่ 1 – 14 กรณีความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคามีค่ามากกว่าหนึ่ง



จากรูปที่ 1 – 14 ถ้าเดิมรายได้ของผู้บริโภคเท่ากับ I_1 บาท และราคาต่อหน่วยสินค้า X เท่ากับ P_{X_1} บาท ถ้าผู้บริโภคไม่ซื้อสินค้า X เลย จะมีเงินเหลืออยู่สำหรับซื้อสินค้าอื่นเท่ากับ OI_1 หรือ OA บาท แต่ถ้าผู้บริโภคใช้จ่ายเงินทั้งหมดไปในการซื้อสินค้า X จะซื้อสินค้า X ได้เท่ากับ OB หน่วย เส้นงบประมาณคือ AB สัมผัสกับเส้นความพอใจเท่ากัน IC_1 ที่จุด E_1 โดยซื้อสินค้า X จำนวนเท่ากับ OX_1 หน่วย และจ่ายเงินซื้อจำนวน AG บาท เหลือเงิน OG บาท เพื่อซื้อสินค้าชนิดอื่น ถ้าราคาสินค้า X ถูกลงเป็น P_{X_2} บาทโดยที่รายได้ของผู้บริโภค และราคาสินค้า Y ยังคงเดิมอยู่ เส้นงบประมาณเปลี่ยนเป็น AC สัมผัสกับเส้นความพอใจเท่ากัน IC_2 ที่จุด E_2 โดยซื้อสินค้า X จำนวน OX_2 หน่วย และจ่ายเงินซื้อจำนวน AH บาท เหลือเงิน OH บาท เมื่อซื้อสินค้าชนิดอื่น ถ้าลากเส้นเชื่อมจุดดุลยภาพของผู้บริโภคเมื่อราคาสินค้า X เปลี่ยนไปจะได้เส้นแนวทางในการบริโภคตามราคา (Price Consumption Curve : PCC) มี Slope เป็นลบ ในกรณีเช่นนี้ Price Elasticity of Demand จะมีค่ามากกว่าหนึ่ง ทั้งนี้เพราะเมื่อราคาสินค้า X เท่ากับ $\frac{OA}{OB}$ หรือ P_{X_1} บาทต่อหน่วย ผู้บริโภคจ่ายเงินทั้งหมดซื้อสินค้าเท่ากับ AG บาท และเมื่อราคาสินค้า X ลดลงเหลือ $\frac{OA}{OC}$ หรือ P_{X_2} บาทต่อหน่วย

รายจ่ายทั้งหมดของผู้ซื้อเท่ากับ AH บาท แสดงว่ารายจ่ายเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางตรงกันข้ามกับราคา ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาจึงมีค่ามากกว่าหนึ่ง

การพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยอาศัยสูตรของ Arc Elasticity

$$E_P = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} \cdot \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2}$$

จากรูปที่ 1 – 14 $Q_1 = OX_1$, $Q_2 = OX_2$

$$P_1 = \frac{OA}{OB} , \quad P_2 = \frac{OA}{OC}$$

$$E_P = \frac{OX_2 - OX_1}{\frac{OA}{OC} - \frac{OA}{OB}} \cdot \frac{\frac{OA}{OB} + \frac{OA}{OC}}{OX_1 + OX_2}$$

$$= \frac{X_1X_2}{\frac{OA.OB - OA.OC}{OB\ .\ OC}} \cdot \frac{\frac{OA.OC + OA.OB}{OB\ .\ OC}}{OX_1 + OX_2}$$

$$= \frac{X_1X_2}{OA.OB - OA.OC} \cdot \frac{OA.OC + OA.OB}{OX_1 + OX_2}$$

$$= \frac{X_1X_2}{OB - OC} \cdot \frac{OC + OB}{OX_1 + OX_2}$$

$$= \frac{X_1X_2}{-\ BC} \cdot \frac{OC + OB}{OX_1 + OX_2}$$

เนื่องจาก $X_1X_2 = JE_2$, $OX_1 = HJ$, $OX_2 = HE_2$ และจาก ΔOAC และ ΔHAE_2 โดยอาศัยทฤษฎีบทว่าด้วยสามเหลี่ยมคล้าย จะได้ว่า

$$\frac{OC + OB}{BC} = \frac{HE_2 + HK}{KE_2}$$

$$\therefore \quad E_P = -\frac{X_1X_2}{OX_1 + OX_2} \cdot \frac{OC + OB}{BC}$$

$$= -\frac{JE_2}{HJ + HE_2} \cdot \frac{HE_2 + HK}{KE_2}$$

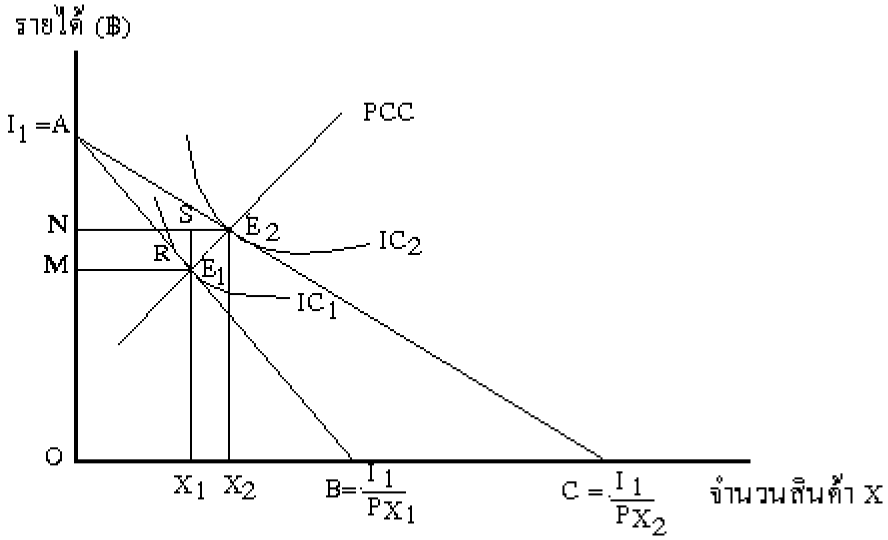
$$= \quad -\frac{JE_2}{KE_2} \cdot \frac{HK + HE_2}{HU + HE_2}$$

$$= \quad \frac{JK + KE_2}{KE_2} \cdot \frac{JK + HJ + HE_2}{HJ + HE_2}$$

จะเห็นได้ว่าเศษมีค่ามากกว่าส่วน ดังนั้น E_P จึงมีค่ามากกว่าหนึ่ง

ในกรณีที่ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคามีค่าน้อยกว่าหนึ่งพิจารณาได้จากรูปที่ 1 – 15

รูปที่ 1 – 15 กรณีความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคามีค่าน้อยกว่าหนึ่ง



จากรูปที่ 1 – 15 เส้น PCC มี Slope เป็นบวก ในกรณีเช่นนี้เส้นอุปสงค์ที่หาได้จะมีค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคา (Price Elasticity of Demand : E_P) น้อยกว่าหนึ่ง โดยจะเห็นได้ว่า เมื่อราคาของสินค้า X เท่ากับ $\frac{OA}{OB}$ (หรือเท่ากับ P_{X1} บาท) ผู้บริโภคจะบริโภคสินค้า X จำนวนเท่ากับ OX_1 หน่วย และรายจ่ายรวมของผู้บริโภค (หรือนั่นคือรายรับรวมของผู้ขาย) เท่ากับ OM บาท ต่อมาเมื่อราคาของสินค้า X ลดลงเหลือเท่ากับ $\frac{OA}{OC}$ (หรือเท่ากับ P_{X2} บาท) ผู้บริโภคจะบริโภคสินค้า X จำนวนเท่ากับ OX_2 หน่วย และรายจ่ายรวมของผู้บริโภคเท่ากับ ON บาท แสดงว่า รายจ่ายรวมของผู้บริโภคลดลง เมื่อราคาสินค้า X ลดลง แสดงว่า รายจ่ายรวมเปลี่ยนแปลงไปในทิศทาง

เดียวกับการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้า ดังนั้น ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาจึงมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง

การพิสูจน์ทางเรขาคณิต สามารถพิจารณาได้ดังนี้

$$\text{จาก} \quad E_P = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} \cdot \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2}$$

จากรูปที่ 1 – 15 $Q_1 = OX_1$, $Q_2 = OX_2$

$$P_1 = \frac{OA}{OB} \quad , \quad P_2 = \frac{OA}{OC}$$

$$E_P = -\frac{X_1X_2}{OX_1 + OX_2} \cdot \frac{OC + OB}{BC}$$

เนื่องจาก $X_1X_2 = SE_2$, $OX_1 = NS$, $OX_2 = NE_2$ และจาก ΔOAC และ ΔNAE_2 โดยอาศัยทฤษฎีว่าด้วยสามเหลี่ยมคล้ายจะได้ว่า

$$\frac{OC + OB}{BC} = \frac{NE_2 + NR}{RE_2}$$

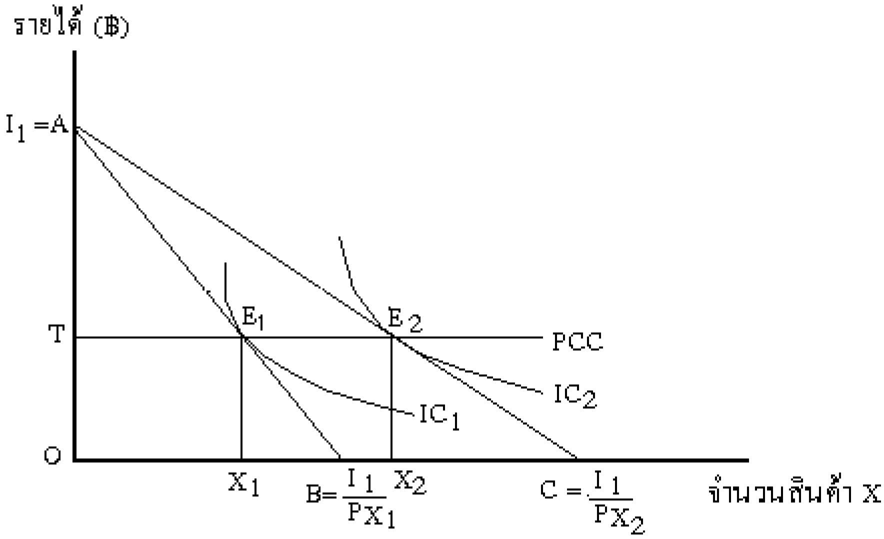
$$E_P = \frac{-SE_2}{NS + NE_2} \cdot \frac{NE_2 + NR}{RE_2}$$

$$= \frac{-SE_2}{RS + SE_2} \cdot \frac{NR + NE_2}{NR + RS + NE_2}$$

จะเห็นได้ว่า เศษมีค่าน้อยกว่าส่วน ดังนั้น ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคา จึงมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง

ในกรณีที่ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคามีค่าเท่ากับหนึ่ง สามารถพิจารณาได้จากรูปที่ 1 – 16

รูปที่ 1 – 16 กรณีความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคามีค่าเท่ากับหนึ่ง



จากรูปที่ 1 – 16 ถ้าเส้น PCC เป็นเส้นนอนราบ (horizontal line) หรือมี slope เป็นศูนย์แล้ว เส้นอุปสงค์ที่หาได้จะมีค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคา (E_P) เท่ากับหนึ่ง ทั้งนี้เพราะแม้ราคาสินค้า X จะลดลงจากหน่วยละ $\frac{OA}{OB}$ บาทเป็น $\frac{OA}{OC}$ บาท ผู้บริโภคซื้อสินค้า X เพิ่มจาก OX_1 เป็น OX_2 หน่วย แต่รายจ่ายรวมของผู้บริโภคยังคงเท่าเดิมเท่ากับ AT บาท โดยอาจพิสูจน์จากเรขาคณิตได้ดังนี้

เนื่องจากความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคาที่หาได้จากรูปมีค่าดังนี้

$$E_P = -\frac{X_1X_2}{OX_1 + OX_2} \cdot \frac{OC + OB}{BC}$$

จากรูปที่ 1 – 16 $OX_1 = TE_1$, $OX_2 = TE_2$, $X_1X_2 = E_1E_2$

และจาก ΔOAC และ ΔATE_2 โดยอาศัยทฤษฎีว่าด้วยสามเหลี่ยมคล้าย จะได้ว่า

$$\frac{OC + OB}{BC} = \frac{TE_2 + TE_1}{E_1E_2}$$

$$\therefore \quad E_P = \frac{-E_1E_2}{TE_1 + TE_2} \cdot \frac{TE_1 + TE_2}{E_1E_2}$$

$$= -1$$

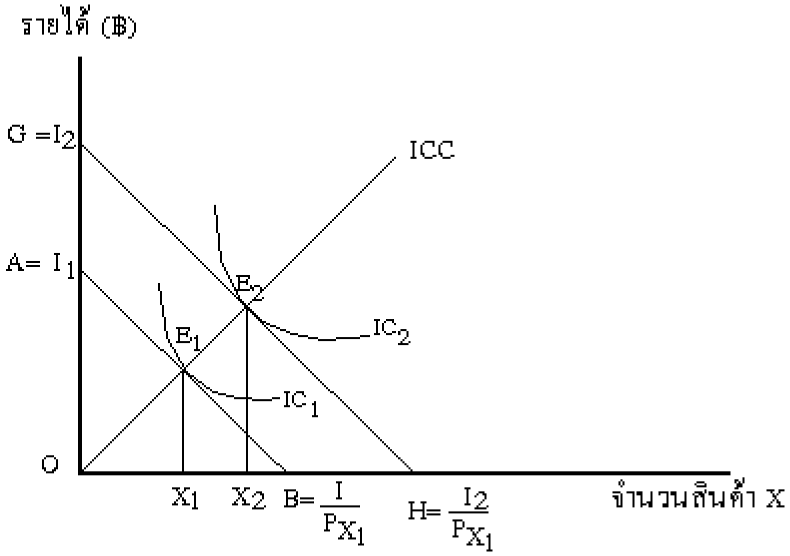
2. ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (Income Elasticity of Demand: E_I)

เนื่องจากความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (E_I) เป็นการพิจารณาถึงการตอบสนองการเปลี่ยแนปลงทางด้านปริมาณสินค้าชนิดหนึ่งที่ผู้ซื้อต้องการซื้อ อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงทางด้านรายได้ของผู้บริโภค ดังนั้น การใช้เส้นความพอใจเท่ากันมาวิเคราะห์ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ จึงพิจารณาได้จากเส้นแนวทางในการบริโภคตามรายได้ (Income Consumption Curve : ICC)

2.1 กรณีที่ ICC ผ่านจุดต้นกำเนิด (origin) ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (E_I) จะมีค่าเท่ากับหนึ่ง

กำหนดให้แกนตั้งแสดงถึงรายได้ของผู้บริโภค และให้แกนนอน แสดงถึงปริมาณสินค้า X ที่ผู้บริโภคซื้อ

รูปที่ 1 – 17 กรณีที่ ICC ผ่านจุดต้นกำเนิด (origin) ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (E_I) จะมีค่าเท่ากับหนึ่ง



จากรูปที่ 1 – 17 เมื่อลากเส้นเชื่อมจุดดุลยภาพของผู้บริโภค เมื่อรายได้ของผู้บริโภคเปลี่ยนแปลงจะได้เส้นแนวทางในการบริโภคตามรายได้ (Income Consumption Curve : ICC) ในกรณีที่เส้น ICC ลากผ่านจุดต้นกำเนิด (origin) จะได้ว่า ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (Income Elasticity of Demand) มีค่าเท่ากับหนึ่ง ซึ่งสามารถพิจารณาได้ดังนี้

$$E_I = \frac{\Delta Q}{\Delta I}\frac{I}{Q}$$

จากรูปที่ 1 – 17 $\Delta Q = X_1X_2$, $\Delta I = AG$

$Q = OX_1$, $I = OA$

$$E_I = \frac{X_1X_2}{AG} \cdot \frac{OA}{OX_1}$$

เนื่องจาก E_1X_1 ขนานกับ E_2X_2

$$\frac{X_1X_2}{OX_1} = \frac{E_1E_2}{OE_1}$$

และ ΔOAE_1 และ ΔOGE_2 เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{OA}{AG} = \frac{OE_1}{E_1E_2}$$

แทนค่า $\frac{X_1X_2}{OX_1} = \frac{E_1E_2}{OE_1}$ และ $\frac{OA}{AG} = \frac{OE_1}{E_1E_2}$ ใน E_I จะได้

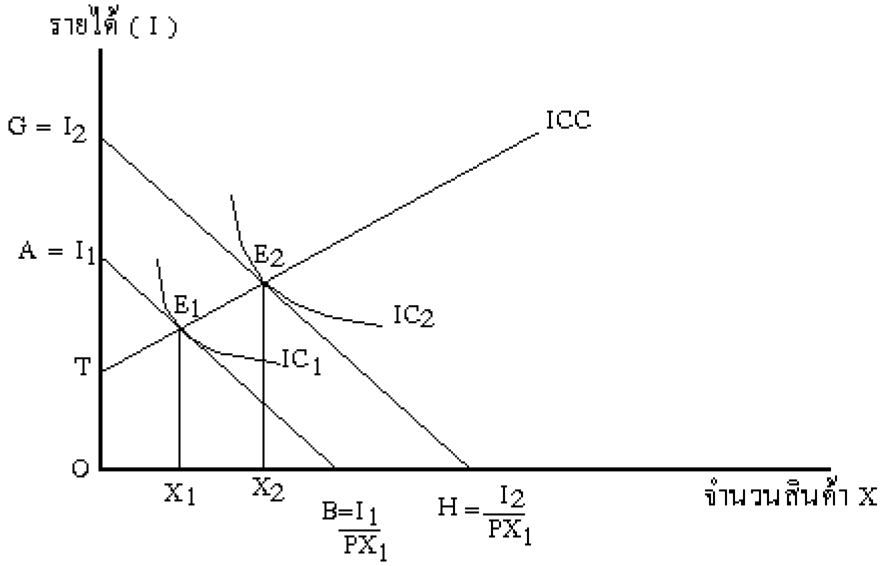
$$E_I = \frac{E_1E_2}{OE_1} \cdot \frac{OE_1}{E_1E_2}$$

$$= 1$$

2.2 กรณีที่ ICC มีจุดตัดแกนตั้งเป็นบวก ค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (E_I) จะมีค่ามากกว่าหนึ่ง

ในกรณีที่เส้น ICC มีจุดตัดแกนตั้งเป็นบวก ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (E_I) จะมีค่ามากกว่าหนึ่งดังแสดงด้วยรูปที่ 1 – 18

รูปที่ 1 – 18 กรณีที่ ICC มีจุดตัดแกนตั้งเป็นบวก ค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (E_I) มีค่ามากกว่าหนึ่ง



จาก $E_I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta I} \cdot \dfrac{I}{Q}$

จากรูปที่ 1 – 18 $\Delta Q = X_1X_2$, $Q = OX_1$

$\Delta I = AG$, $I = OA$

$$E_I = \frac{X_1X_2}{AG} \cdot \frac{OA}{OX_1}$$

เนื่องจาก E_1X_1 ขนานกับ E_2X_2 ดังนั้น $\dfrac{X_1X_2}{OX_1} = \dfrac{E_1E_2}{TE_1}$

และเนื่องจาก ΔTAE_1 และ ΔTGE_2 เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ดังนั้น

$$\frac{E_1E_2}{TE_1} = \frac{AG}{TA}$$

ฉะนั้น $E_I = \frac{AG}{TA} \cdot \frac{OA}{AG}$

$= \frac{OA}{TA}$

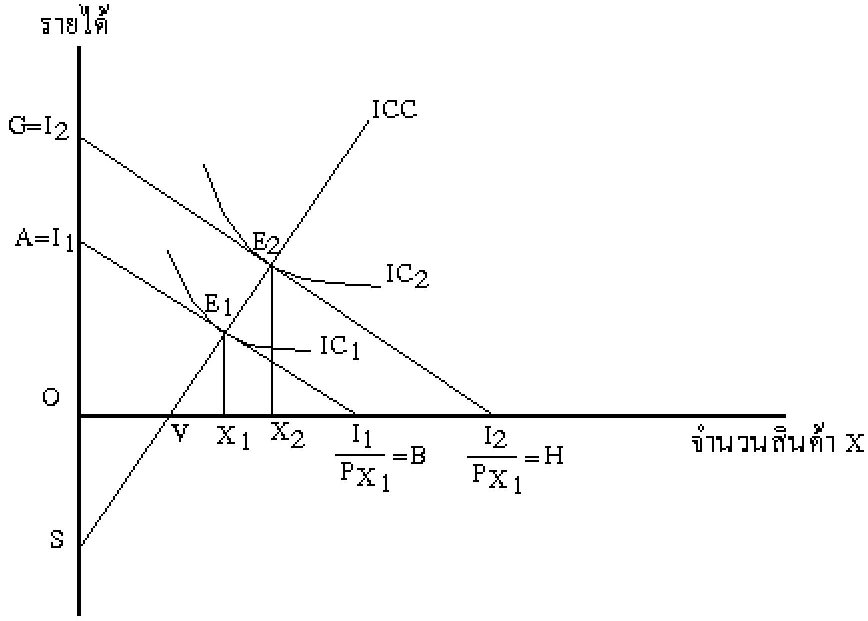
เนื่องจาก OA > TA

ดังนั้น $E_I = \frac{OA}{TA} > 1$

2.3 กรณีที่เส้น ICC มีจุดตัดทางแกนตั้งเป็นลบ ค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (E_I) จะมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง

ในกรณีที่เส้น ICC มีจุดตัดทางแกนตั้งเป็นลบ ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (E_I) จะมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง ดังแสดงด้วยรูปที่ 1 – 19

รูปที่ 1 – 19 กรณีที่ ICC มีจุดตัดแกนตั้งเป็นลบ ค่าความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อรายได้ (E_I) จะน้อยกว่าหนึ่ง



จาก $E_I = \frac{\Delta Q}{\Delta I} \cdot \frac{I}{Q}$

จากรูปที่ 1 – 19 $\Delta Q = X_1X_2$, $Q = OX_1$

$\Delta I = AG$, $I = OA$

$$E_I = \frac{X_1X_2}{AG} \cdot \frac{OA}{OX_1} \qquad \text{. . . (1 – 66)}$$

จากรูปที่ 1 – 19 ΔVE_1X_1 และ ΔVE_2X_2 เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ดังนั้น

$$\frac{VX_1}{X_1X_2} = \frac{VE_1}{E_1E_2} \qquad \text{. . . (1 – 67)}$$

$$\frac{VX_2}{X_1X_2} = \frac{VE_2}{E_1E_2} \qquad \text{. . . (1 – 68)}$$

ทำนองเดียวกัน ΔOSV และ ΔVE_2X_2 เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ดังนั้น

$$\frac{OV}{VX_2} = \frac{SV}{VE_2}$$

$$VX_2 = \frac{OV \cdot VE_2}{SV} \qquad \text{. . . (1 – 69)}$$

แทนค่าสมการที่ (1 – 69) ในสมการที่ (1 – 68)

$$\frac{OV \cdot VE_2}{X_1X_2 \cdot SV} = \frac{VE_2}{E_1E_2}$$

$$\frac{OV}{X_1X_2} = \frac{SV}{E_1E_2} \qquad \text{. . . (1 – 70)}$$

นำสมการที่ (1 – 67) บวกสมการที่ (1 – 70) จะได้

$$\frac{VX_1}{X_1X_2} + \frac{OV}{X_1X_2} = \frac{VE_1}{E_1E_2} + \frac{SV}{E_1E_2}$$

$$\frac{OX_1}{X_1X_2} = \frac{SE_1}{E_1E_2}$$

$$\frac{X_1X_2}{OX_1} = \frac{E_1E_2}{SE_1} \qquad \text{. . . (1 – 71)}$$

Δ SAE$_1$ และ ΔSGE$_2$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ดังนั้น

$$\frac{E_1E_2}{SE_1} = \frac{AG}{SA}$$

แทนค่า $\frac{E_1E_2}{SE_1} = \frac{AG}{SA}$ ในสมการที่ (1 – 71)

$$\frac{X_1X_2}{OX_1} = \frac{AG}{SA}$$

แทนค่า $\frac{X_1X_2}{OX_1} = \frac{AG}{SA}$ ใน E_I

จาก $$E_I = \frac{X_1X_2}{AG} \cdot \frac{OA}{OX_1}$$

$$= \frac{AG}{SA} \cdot \frac{OA}{AG}$$

$$= \frac{OA}{SA}$$

เนื่องจาก OA < SA

ดังนั้น $E_I = \frac{OA}{SA} < 1$