(๒) ต้นทุนแปรผันเฉลี่ย :

$$AVC = \frac{C(\phi)}{\phi}$$

(๓) ต้นทุนคงที่ เฉลี่ย :

$$AFC = \frac{F}{\phi}$$

หมายเหตุ : โดยปกติแล้วเมื่อกล่าวถึงต้นทุนเฉลี่ย (Average Cost : AC) โดยทั่วไปจะหมายถึง ต้นทุนรวมเฉลี่ย (Average Total Cost : ATC)

ข)' ต้นทุนส่วนเหลื่อม (Marginal Cost : MC)

ต้นทุนส่วนเหลื่อม หมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงของต้นทุนรวมอันเกิดจากการเปลี่ยนแปลงปริมาณการผลิต

โดยคณิตศาสตร์ :

$$MC = \frac{\Delta C}{\Delta \phi}$$

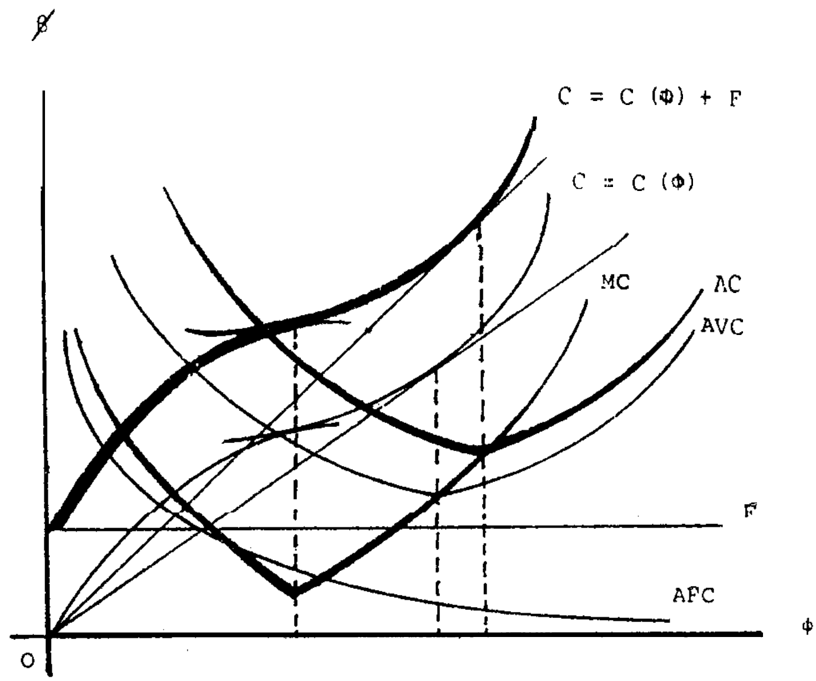
$$\simeq \frac{dC}{d\phi}$$

$$= \frac{d\{C(\phi) + F\}}{d\phi}$$

$$= C'(\phi) \qquad : \text{สัญญลักษณ์}$$

ความสัมพันธ์ของต้นทุนชนิดต่าง ๆ และรูปลักษณะทางเรขาคณิตโดยทั่วไปแล้วจะเขียนลักษณะต้นทุนในรูปต่อไปนี้ :

โดยรูปเรขาคณิต :



พิจารณาจากรูป จะเห็นว่า :

(๑) MC = AC เมื่อ AC อยู่ ณ จุดต่ำสุด

(๒) MC = AVC เมื่อ AVC อยู่ ณ จุดต่ำสุด

พิสูจน์โดยคณิตศาสตร์ :

พิสูจน์ (๑) MC = AC เมื่อ AC อยู่ ณ จุดต่ำสุด

พิจารณาเมื่อ AC อยู่ ณ จุดต่ำสุด

จาก $$AC = \frac{C}{\phi}$$

$$= \frac{C(\phi) + F}{\phi}$$

แนวคิด :

ณ ตำแหน่งที่ AC อยู่จุดต่ำสุด ตำแหน่งนั้นจะต้องมีค่าความชันเท่ากับศูนย์

ความชัน :

$$\frac{d}{d\phi}(AC) = \frac{d\left\{\frac{C(\phi)+F}{4}\right\}}{d\phi}$$

$$= \frac{\phi C'(\phi) - C(\phi)}{\phi^2}$$

$$\frac{d(AC)}{d\phi} = 0$$ เพื่อแสดงว่า AC อยู่ ณ จุดต่ำสุด

นั่นคือ $$\frac{\phi C'(\phi) - C(\phi)}{\phi} = 0$$

แต่ $\phi \neq 0$ เพราะเป็นปริมาณการผลิต ณ ที่ AC มีค่าต่ำสุด

ดังนั้น $\phi^2 \neq 0$ ด้วย

ฉนั้น $4C'(4) - C(\phi) = 0$

หรือ $4C'(4) = C(\phi)$

ดังนั้น $C'(4) = \frac{C(\phi)}{\phi}$

หรือ MC = AC

นั่นคือ MC = AC เมื่อ AC อยู่ ณ จุดต่ำสุด

ในทำนองเดียวกันก็จะสามารถพิสูจน์ได้ว่า [1/]

MC = AVC เมื่อ AVC อยู่ ณ จุดต่ำสุด

1/ ขอให้ท่านผู้อ่านทดลองพิสูจน์ดู

๒) แบบสมการต้นทุนระยะยาว (Long - run Cost Function)

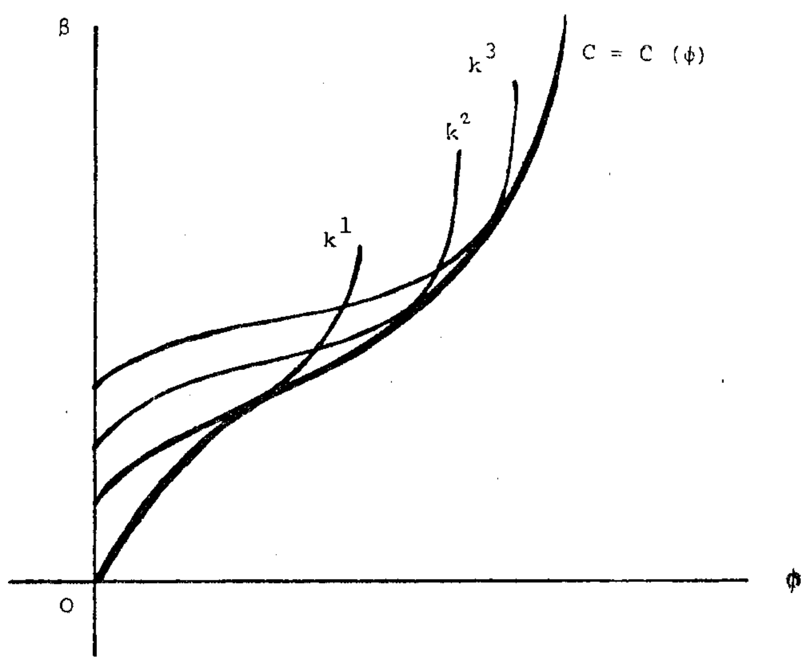
ต้นทุนระยะยาว หมายถึง ต้นทุนการผลิต ซึ่งประกอบด้วยต้นทุนแปรผันทั้งสิ้น เพราะในระยะยาวปัจจัยทุกชนิดสามารถเปลี่ยนแปลงไปได้ตามความเหมาะสมของขนาดการผลิต ดังนั้น จะไม่ปรากฏว่ามีต้นทุนคงที่อยู่แต่อย่างใด

โดยคณิตศาสตร์ :

$$c = C(\phi)$$

ซึ่งหมายความว่า ต้นทุนการผลิตจะขึ้นอยู่กับจำนวนผลิตผลแต่อย่างเดียว (ซึ่งก็หมายถึงว่า ขึ้นอยู่กับจำนวนการใช้ปัจจัยการผลิตต่าง ๆ นั่นเอง)

โดยเรขาคณิต :



ในทางเศรษฐศาสตร์ สามารถที่จะกล่าวได้ว่า ต้นทุนระยะยาวก็คือ ต้นทุนการผลิต เมื่อต้นทุนคงที่มีขนาดเปลี่ยนแปลงไปในขนาดต่าง ๆ กัน ตามความเหมาะสมของขนาดการผลิต

ดังนั้น ต้นทุนระยะยาว ก็คือ ทางเดินของจุดเชื่อมตำแหน่งต้นทุนระยะสั้นที่เหมาะสมกับแต่ละขนาดการผลิตเข้าด้วยกัน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ เส้นต้นทุนระยะยาว คือ เส้นซึ่งเป็นกรอบของเส้นต้นทุนระยะสั้น ซึ่งสัมผัส กับเส้นต้นทุนระยะสั้นทุกเส้น แต่จะไม่ตัดกับเส้นต้นทุนระยะสั้นเส้นใดเลย

จากรูปเรขาคณิต เส้นต้นทุนระยะยาว คือ $C = C(\phi)$ ซึ่งเป็นกรอบของเส้นต้นทุนระยะสั้น k^1, k^2 และ k^3 (สัญลักษณ์ แสดงระดับต้นทุนคงที่ มิใช่ ต้นทุนคงที่, k , ยกกำลัง)

อนึ่ง การที่ต้นทุนคงที่เปลี่ยนแปลงไปในระยะยาวตามความเหมาะสมของขนาดการผลิต ดังนั้น ขนาดของต้นทุนคงที่ย่อมเป็นตัวกำหนดขนาดของการผลิตที่เหมาะสมนั่นเอง เช่นนี้แล้ว ถ้าหากว่าขนาดของต้นทุนระยะสั้นส่วนที่เป็นต้นทุนคงที่ ขึ้นอยู่กับ ค่าคงที่, k, ใด ๆ ซึ่ง k นี้ อาจจะหมายถึงขนาดของโรงงานก็ได้ และถ้าเช่นนั้นแบบสมการต้นทุนระยะสั้นซึ่งต้นทุนคงที่ถูกกำหนดโดยขนาดของโรงงาน (k) อาจจะเขียนได้เป็น

$$c = P_{x_1}X_1 + P_{x_2}X_2 + P_{x_3}X_3 + \ldots + P_{x_n}X_n + \psi(k)$$

โดยที่

$$F = \psi(k) \qquad : \psi \text{ อ่านว่า psi}$$

ซึ่งหมายความว่า ต้นทุนรวมขึ้นอยู่กับการใช้ปัจจัยซึ่งเป็นต้นทุนแปรผันและต้นทุนคงที่ซึ่งขึ้นอยู่กับขนาดของโรงงาน (k)

จากการที่ ปัจจัยการผลิตเป็นตัวกำหนดขนาดของผลิตผล และขนาดของการผลิตก็ยังขึ้นอยู่กับขนาดของโรงงาน (k) ด้วย ดังนั้น

$$\phi = \phi(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, k)$$

เช่นนี้แล้ว ต้นทุนแปรผันก็สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลผลิตและขนาดของโรงงานได้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ต้นทุนแปรผันจะขึ้นอยู่กับ ขนาดการผลิตและขนาดของโรงงานด้วย แล้วแบบสมการต้นทุนระยะสั้นอาจเขียนได้เป็น :

$$c = C(\phi, k) + \psi(k)$$

จากการที่ ต้นทุนระยะยาวก็คือต้นทุนระยะสั้น เมื่อขนาดการผลิตซึ่งขึ้นอยู่กับขนาดของโรงงานเปลี่ยนแปลงไป ดังนั้นจึงสามารถสร้างต้นทุนระยะยาวจากต้นทุนระยะสั้นได้ โดยพิจารณาจากต้นทุนระยะสั้น เมื่อขนาดของโรงงานเปลี่ยนแปลงไป

โดยคณิตศาสตร์ :

จากแบบสมการต้นทุนระยะสั้น

$$c = C(\phi, k) + \psi(k)$$

หรือ $C - C(\phi, k) - \psi(k) = 0$ implicite form

หรือ $G(C, \phi, k) = 0$: สัญลักษณ์

เมื่อขนาดของโรงงานเปลี่ยนแปลงไป ซึ่งหมายถึง อนุพันธ์บางส่วนมุ่งต่อ k นั่นเอง

$$G_k(C, \phi, k) = 0$$

จากนี้ ถอดหาค่า k (จะได้ค่า k อยู่ในรูปของ ϕ) แล้วนำค่า k ไปแทนในแบบสมการต้นทุนระยะสั้น : $C + C(\phi, k) + \psi(k)$ ก็จะได้แบบสมการต้นทุนระยะยาวเป็น

$$C = C(\phi)$$

ตัวอย่าง :

จงหาต้นทุนระยะยาวจากสมการแสดงต้นทุนระยะสั้นดังต่อไปนี้

$$C = 0.04\phi^3 - 0.9\phi^2 + (11 + k)\phi + 5k^2$$

วิธีทำ :

จาก $C = 0.04\phi^3 - 0.9\phi^2 + (11+k)\phi + 5k^2$

หรือ implicite form

$$C - 0.04\phi^3 + 0.9\phi^2 - (11+k)\phi - 5k^2 = 0$$

อนุพันธ์บางส่วนมุ่งต่อ k

$$-\phi - 10k = 0$$

ดังนั้น

$$k = 0.1\phi$$

แทนค่า k ในสมการต้นทุนระยะสั้น

$$C = 0.04\phi^3 - 0.9\phi^2 + (11-0.1\phi)\phi + 5(0.1\phi)^2$$

$$= 0.04\phi^3 - 0.9\phi^2 + 11\phi - 0.1\phi^2 + 0.05\phi^2$$

$$= 0.04\phi^3 - 0.95\phi^2 + 11\phi$$

: สมการต้นทุนระยะยาว ///

๓) เส้นแสดงต้นทุนเท่ากัน (Iso – cost Curves)

เส้นแสดงต้นทุนเท่ากัน หมายถึง ทางเดินของจุดซึ่งแต่ละตำแหน่งแสดงถึงการใช้ปัจจัยการผลิตชนิดต่าง ๆ ในสัดส่วนที่แตกต่างกัน แต่สิ้นเปลืองต้นทุนการผลิตเท่ากัน

โดยคณิตศาสตร์ :

สมมุติว่า การผลิตใช้ปัจจัยการผลิตเพียงสองชนิด

$$C^{\circ} = P_{x_1}X_1 + P_{x_2}X_2$$

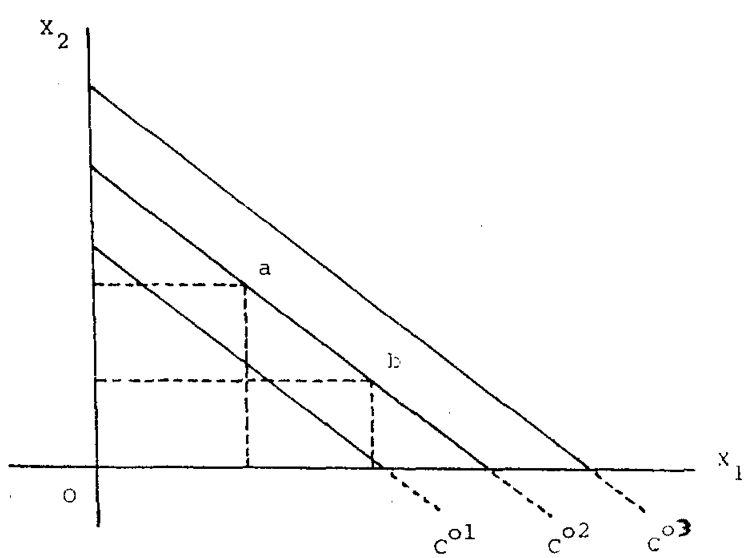
โดยที่

C° : C-supper script zero หมายถึง ต้นทุนการผลิตขนาดใดขนาดหนึ่งซึ่งคงที่

X_i : หมายถึง จำนวนปัจจัยการผลิตชนิดที่ i ซึ่งได้ใช้ในการผลิต

P_{x_i} : หมายถึง ราคาต่อหน่วยของปัจจัยการผลิตชนิดที่ i

โดยเรขาคณิต :



โดย C^{oi} หมายถึง ต้นทุนการผลิต ณ ระดับที่ i ใด ๆ

จากรูป ตำแหน่ง a และ b บนเส้น C^{o2} แสดงสัดส่วนของการใช้ปัจจัยการผลิต x_1 และ x_2 ต่างกัน แต่สิ้นเปลืองต้นทุนการผลิตเท่ากัน

อนึ่ง จากรูปเรขาคณิต จะสามารถแสดงค่าความชันของเส้นต้นทุนเท่ากัน ในเชิงคณิตศาสตร์ได้ว่า

จากสมการต้นทุน

$$C^o = P_{x_1}X_1 + P_{x_2}X_2$$

อนุพันธ์รวม (Total derivative)

$$dC^o = \frac{\partial c}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial c}{\partial x_2} \cdot dx_2$$

$$P_{x_1} \cdot dx_1 + P_{x_2} \cdot dx_2$$

จากการพิจารณาจากรูป แต่ละตำแหน่งบนเส้นผลผลิตเท่ากันจะสิ้นเปลืองต้นทุนเท่ากันหรือ อีกนัยหนึ่ง ค่าอนุพันธ์ของค่าคงที่ (C^o) จะเท่ากับศูนย์ นั่นคือ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงของต้นทุน หรือเปลี่ยนแปลงไปศูนย์หน่วย

ดังนั้น

$$dC^o = 0$$

หรือ $$P_{x_1} \cdot dx_1 + P_{x_2} dx_2 = 0$$

$$P_{x_1} \cdot dx_1 = -P_{x_2} \cdot dx_2$$

นั่นคือ $$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{P_{x_1}}{P_{x_2}}$$

๓. ดุลยภาพของผู้ผลิตโดยนัยของเป้าหมาย (Optimization Behavior)

ในการผลิตใด ๆ อาจจะพอสรุปอย่างกว้าง ๆ ได้ว่าผู้ผลิตต้องการกำไรจากการผลิตสินค้าชนิดนั้น ๆ ในปริมาณที่สูงที่สุดเท่าที่ภาวะการผลิตและตลาดจะอำนวยให้ แต่ทั้งนี้ไม่ได้หมายความว่าผู้ผลิตจะได้กำไรเสมอไป เพราะบางครั้งผู้ผลิตอาจจะต้องขาดทุน ซึ่งถ้าจำต้องขาดทุน ในระยะสั้น ผู้ผลิตก็จะต้องยอมรับสภาพนั้น และดำเนินการเพื่อให้ขาดทุนน้อยที่สุด

อย่างไรก็ตามในธุรกิจการผลิตที่เป็นจริงในปัจจุบัน ผู้ผลิตอาจจะมีจุดมุ่งหมายมิใช่เพียงเพื่อหากำไรจากการผลิตแต่เพียงอย่างเดียวก็ได้ ในบางครั้งผู้ผลิตอาจจะมีเป้าหมายเพื่อให้เสียต้นทุนต่ำที่สุด ภายในขอบเขตของจำนวนการผลิตที่ต้องการ หรืออาจจะผลิตเพื่อให้ได้ผลผลิตมากที่สุด ภายในขอบเขตของทุนที่มีอยู่ก็ได้ ในที่นี้อาจจะสรุปเป้าหมายของการผลิตที่จะศึกษาเป็นแนวทางเสริมสร้างความคิด ดังต่อไปนี้

เป้าหมายของการผลิต :

๑) ผลิตให้ได้ผลผลิตมากที่สุด ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดบางประการ
(Constrained Output Maximization)

๒) ผลิตโดยใช้ต้นทุนการผลิตน้อยที่สุด เพื่อให้ได้ผลเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดบางประการ (Constrained Cost Minimization)

๓) ผลิตเพื่อให้ได้กำไรมากที่สุด (ขาดทุนน้อยที่สุด)
(Profit Maximization)

ขยายความ :

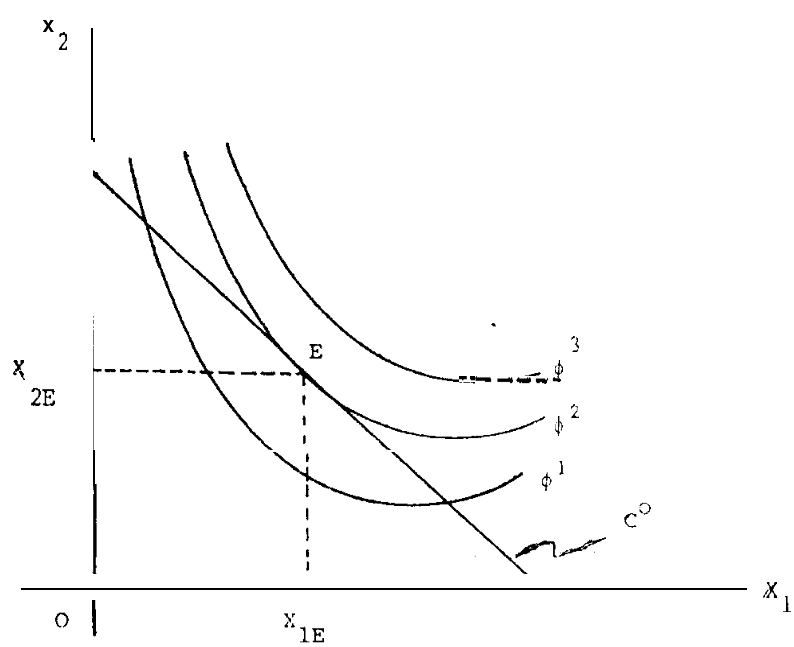
๓.๑ ผลิตให้ได้ผลผลิตมากที่สุด ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดบางประการ
(Constrained Output Maximization)

การผลิตในที่นี้เป็นกรณีที่ผู้ผลิตต้องการจะทำการผลิตเพื่อให้ได้ผลิตผลมากที่สุด ทั้งนี้การผลิตนั้นจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้แล้ว เงื่อนไขที่กำหนดไว้แล้วนี้อาจจะได้แก่เงินทุนงบประมาณการผลิต (เงื่อนไขที่กำหนดอาจจะมีหลายอย่าง หลายประการก็ได้)

ในที่นี้ จะถือเสียว่าผู้ผลิตจะทำการผลิตเพื่อให้ได้ผลิตผล (ϕ) มากที่สุดเท่าที่จะกระทำได้ โดยใช้เงินทุนที่มีอยู่ (c^o) จำนวนหนึ่งอันจำกัด และการผลิตนี้เป็นการผลิตในตลาดสินค้าและตลาดปัจจัยการผลิตที่มีการแข่งขันโดยสมบูรณ์ที่พิจารณาเช่นนี้ ก็เพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจอันจะเป็นแนวคิดแบบอย่างพื้นฐานของปัญหาที่สลับซับซ้อนต่อไป

โดย เรขาคณิต :

สมมุติว่าในการผลิตนี้ ต้องใช้ปัจจัยการผลิตเพียงสองชนิดเท่านั้น ดังนี้ดุลยภาพของผู้ผลิตก็อาจจะแสดงได้โดยรูปเรขาคณิตต่อไปนี้



โดยที่ :

c^o หมายถึง เงินทุนที่จำกัดระดับหนึ่ง แสดงโดยเส้นแสดงต้นทุนเท่ากัน

ϕ^i หมายถึง ผลิตผลระดับที่ i (ไม่ใช่ ϕ ยกกำลัง i)

แสดงโดยเส้นแสดงผลิตผลเท่ากัน

x_i หมายถึง จำนวนปัจจัยการผลิตชนิดที่ i

พิจารณาจากรูป :

ดุลยภาพของผู้ผลิต เพื่อให้ได้ผลิตผลมากที่สุด จะอยู่ ณ ตำแหน่ง E ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เส้นแสดงต้นทุนเท่ากันสัมผัสกับเส้นแสดงผลิตผลเท่ากัน เส้นที่อยู่สูงที่สุดไปทางขวามือ ณ ตำแหน่ง E นี้จะแสดงว่าผู้ผลิตจะได้ผลิตผลมากที่สุด โดยใช้จ่ายเพื่อเป็นค่าปัจจัยการผลิตทั้งสิ้น เป็นจำนวนเงิน c^o หน่วยเงินตรา โดยแยกจ่ายเพื่อซื้อปัจจัยการผลิตชนิดที่หนึ่ง X_{1E} หน่วยปัจจัย และจ่ายเพื่อซื้อปัจจัยการผลิตชนิดที่สอง X_{2E} หน่วยปัจจัย แล้วจะได้ผลิตผล ϕ^2 หน่วยสินค้า

โดยคณิตศาสตร์ :

ผลิตให้ได้ผลผลิตมากที่สุด โดยใช้เงินทุนจำกัดจำนวนหนึ่งที่กำหนด

แบบสมการการผลิต:

$$\phi = \phi(x_1, x_2)$$

เงินทุนงบประมาณที่กำหนด :

$$C^o = P_{x_1}X_1 + P_{x_2}X_2 + F$$

โดยที่ P_{x_i} หมายถึง ราคาปัจจัยการผลิตชนิดที่ i ซึ่งซื้อขายกันในตลาดที่มีการแข่งขันโดยสมบูรณ์

จากหลักการทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาค่าสูงสุดของเป้าหมายภายใต้เงื่อนไขบางประการ จะสามารถแสดงกระบวนการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

๑) แบบสมการ

Maximize (เป้าหมายเพื่อหาค่าสูงสุด)

$$\phi = \phi(x_1, x_2)$$

Subject to (ภายใต้เงื่อนไข)

$$C^o = P_{x_1}X_1 + P_{x_2}X_2 + I'$$

๒) พิจารณาหาค่าวิกฤตของตัวแปร :

โดยวิธีการของ Lagrane Multiplier Method จะได้ Lagrangean Function (Augment Function : J) โดยการรวมแบบสมการเป้าหมายเข้ากับแบบสมการเงื่อนไขโดยมี Lagrange Multiplier (β) เป็นตัวเชื่อม ดังนี้

$$J = \phi(x_1, x_2) + \beta(C^o - P_{x_1}X_1 - P_{x_2}X_2 - F)$$

First - Order Condition (Necessary Condition) :

กฎเกณฑ์ที่จำเป็นเพื่อหาค่าวิกฤต โดยนำ Lagrangean Function มาหาค่าอนุพันธ์บางส่วนมุ่งต่อตัวแปรทุก ๆ ตัวที่มีอยู่ในแบบสมการ (ได้แก่ x_1, x_2 และ β) แล้วนำค่าอนุพันธ์บางส่วนเหล่านี้เทียบให้มีค่าเป็นศูนย์ (๐) ทั้งนี้เพื่อแสดงว่า ค่าความชันของแบบสมการมุ่งต่อตัวแปรต่าง ๆ เหล่านั้นมีค่าเป็นศูนย์ อันจะนำมาซึ่งค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดของเป้าหมายที่กำหนด แล้วถอดหาค่าวิกฤตนั้น

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} = J_1 = \frac{\partial \phi(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta(C^o - P_{x_1}X_1 - P_{x_2}X_2 - F)}{\partial x_1}$$

$$= \phi_1 - \beta P_{x_1} \quad : \text{สัญญลักษณ์}$$

เมื่อ $J_1 = 0$: ค่าความชันเป็นศูนย์

ดังนั้น $\phi_1 - \beta P_{x_1} = 0$ ———— (1)

$$\frac{\partial J}{\partial x_2} = J_2 = \frac{\partial \phi(x_1,x_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial \beta(c^o - P_{x_1}X_1 - P_{x_2}X_2 - F)}{\partial x_2}$$

$$= \phi_2 - \beta P_{x_2}$$: สัญญลักษณ์

เมื่อ $J_2 = 0$: ค่าความชันเป็นศูนย์

ดังนั้น $\phi_2 - \beta P_{x_2} = 0$ ———— (2)

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = J_\beta = \frac{\partial \phi(x_1,x_2)}{\partial \beta} + \frac{\partial \beta(c^o - P_{x_1}X_1 - P_{x_2}X_2 - F)}{\partial \beta}$$

$$= c^o - P_{x_1}X_1 - P_{x_2}X_2 - F$$

เมื่อ $J_\beta = 0$: ค่าความชันเป็นศูนย์

ดังนั้น $c^o - P_{x_1}X_1 - P_{x_2}X_2 - F = 0$ - - - - (3)

จากสมการ (๑), (๒) และ (๓) สามารถถอดหาค่าวิกฤตสร้างเป็นกฎเกณฑ์ เพื่อหาค่าต่ำสุดได้ดังนี้

จาก (1) $\phi_1 - BP_{x_1} = 0$

βP_{x_1} บวกเข้าทั้งสองข้าง $\phi_1 = \beta P_{x_1}$ ——— $(1)'$

P_{x_1} หารตลอด $\dfrac{\phi_1}{P_{x_1}} = \beta$ ——— $(1)''$

จาก (2) $\phi_2 - P_{x_2} = 0$

βP_{x_2} บวกเข้าทั้งสองข้าง $\phi_2 = \beta P_{x_2}$ ——— $(2)'$

P_{x_2} หารตลอด $\dfrac{\phi_2}{P_{x_2}} = \beta$ ——— $(2)''$

ดังนั้นจะได้ :

จาก $(1)''$ และ $(2)''$ $\dfrac{\phi_1}{P_{x_1}} \quad \dfrac{\phi_2}{P_{x_2}} = \beta$ ——— (A)

และจาก $\dfrac{(1)'}{(2)'}$: $\dfrac{\phi_1}{\phi_2} = \dfrac{P_{x_1}}{P_{x_2}}$ ——— (B)

ซึ่งอาจจะสรุปเป็นค่าวิกฤต (critical number) ได้ว่า

ก. $\phi_i = \beta P_{x_i}$ $(i = 1.2)$

หรือ $\dfrac{\phi_i}{P_{x_i}} = \beta$

และ ข. $\dfrac{\phi_1}{\phi_2} = \dfrac{P_{x_1}}{P_{x_2}}$ $(i = 1, 2)$

อย่างไรก็ตามกฎเกณฑ์ดังกล่าวข้างต้น ยังไม่สามารถยืนยันได้ว่า กฎเกณฑ์นั้นจะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมาย (ผลิตผลมากที่สุด) ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องทดสอบเพื่อยืนยัน (Sufficient Condition : Second - Order Condition) ให้เพียงพอที่จะยอมรับได้ว่าค่าวิกฤตจากกฎเกณฑ์ที่จำเป็นจะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมาย ตามที่กำหนด

๓) ทดสอบเพื่อยืนยันค่าวิกฤต

Second - Order Condition (Sufficient Condition) :

กฎเกณฑ์เพื่อยืนยันอย่างเพียงพอ โดยการพิจารณา Bordered Hessian Determinant จะได้ Bordered Hessian Determinant ในลักษณะ

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{1/\beta} \\ J_{21} & J_{22} & J_{2/\beta} \\ J_{\beta 1} & J_{\beta 2} & J_{\beta\beta} \end{vmatrix} \qquad J_{1.I} = \frac{\partial J_j}{\partial x_i}$$

ในกรณีนี้

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 411 & 912 & -P_{x_1} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -P_{x_2} \\ -P_{x_1} & -P_{x_2} & 0 \end{vmatrix} \quad : \quad \phi_{ij} = \frac{\partial \phi_j}{\partial \phi_i}$$

จากเรื่องการหาค่าสูงสุด - ต่ำสุด [1] (Maxima - Minima) จะพบว่าการทดสอบนี้จะยืนยันว่า ค่าวิกฤตจะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมาย (ผลิตผลมากที่สุด) ก็ต่อเมื่อ Bordered Hessian Determinant ชุดที่ i ใด ๆ ($|\bar{H}_{m+i}|$) จะมีเครื่องหมายเป็น $(-1)^{m+i}$ เท่านั้น (i หมายถึงลำดับที่ของ Discriminant ซึ่งมีจำนวน n-m ชุด โดยที่ n หมายถึงจำนวนตัวแปรที่แท้จริง และ m หมายถึงจำนวนสมการเงื่อนไข)

ในที่นี้มีตัวแปรที่แท้จริง ๒ ตัว คือ x_1 และ x_2 (สำหรับ β เป็น Lagrange multiplier ที่สมมติขึ้นเพื่อการคำนวณ มิใช่ตัวแปรที่แท้จริง) และมีเงื่อนไขเพียงสมการเดียว ดังนั้นจะมี Bordered Hessian Determinant ที่ต้องพิจารณาเพียงชุดเดียว ($n - m = 2 - 1 =$ ๑ ชุด และ $i = 1$) ซึ่ง Bordered Hessian Determinant ข้างต้นจะยืนยันว่าค่าวิกฤตจะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมาย เมื่อมีค่าเป็นเครื่องหมาย $(-1)^{m+i} = (-1)^{1+1} = (-1)^2 = +1$ คือเป็นบวก (+) เท่านั้น

ซึ่ง Bordered Hessian Determinant ชุดแรก (ซึ่งในที่นี้ก็มีเพียงชุดเดียว) ก็คือ

ชุดแรก : $|\bar{H}_{m+1}| = |\bar{H}_{1+1}| \quad \left\{ \begin{array}{l} m = 1 \\ i = 1 \end{array} \right.$

$$= |\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -P_{x_1} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -P_{x_2} \\ -P_{x_1} & -P_{x2} & 0 \end{vmatrix}$$

1/ ดูภาคผนวกท้ายบท

ถอดค่า determinant $= -P_{x_1}^2\phi_{22} - P_{x_2}^2\phi_{11} + P_{x_1}P_{x_2}\phi_{12} + P_{x_1}P_{x_2}\phi_{21}$

รวมค่า $= -(\phi_{11}P_{x_2}^2 - 2\phi_{12}P_{x_1}P_{x_2} + \phi_{22}P_{x_1}^2)$

$\because \ \phi_{12} = \phi_{21}$ โดย **Young's** Theorem

ดังนั้น ค่าวิกฤต จะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมายก็ต่อเมื่อ

$$|\bar{H}_2| = -(\phi_{11}P_{x_2}^2 - 2\phi_{12}P_{x_1}P_{x_2} + \phi_{22}P_{x_1}^2) \quad 0$$ เป็นบวกเท่านั้น

ซึ่งการที่ $-(\phi_{11}P_{x_2}^2 - 2\phi_{12}P_{x_1}P_{x_2} + \phi_{22}P_{x_1}^2) > 0$ ได้ก็ต่อเมื่อ :

$\phi_{11}P_{x_2}^2 - 2\phi_{12}P_{x_1}P_{x_2} + \phi_{22}P_{x_1}^2 < 0$ นั่นเอง และมีความหมายว่า จะต้องเป็นช่วงที่ เส้นแสดงผลิตผลเท่ากันกำลังโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง [1/]

1/ ดูหัวข้อ ๒.๑ ข้อย่อย ๗) เรื่อง "เส้นแสดงผลิตผลเท่ากันโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง" โดยการแทนค่า $\frac{\phi_1}{\phi_2}$ ด้วย $\frac{P_{x_1}}{P_{x_2}}$ (เพราะดุลยภาพ: $\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{P_{x_1}}{P_{x_2}}$)

กล่าวโดยรวม ๆ ก็คือ ค่าวิกฤตจะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมาย (ผลิตผลมากที่สุด) ก็ต่อเมื่อ การผลิตนั้นเกิดขึ้นในช่วงที่เส้นแสดงผลิตผลเท่ากันกำลังโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลางเท่านั้น

ดังนั้นโดยสรุปแล้วการที่จะผลิตให้ได้ผลผลิตมากที่สุดโดยใช้เงินทุนจำกัดจำนวนหนึ่ง จะต้องเป็นการผลิตที่เกิดขึ้นในช่วงที่เส้นแสดงผลิตผลเท่ากันกำลังโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง และผู้ผลิตจะต้องจัดสรรเงินทุนนั้นจนกระทั่ง

ก) $$\frac{\phi_i}{P_{x_i}} = \beta \qquad (i = 1,\ 2)$$

อัตราส่วนของผลิตผลส่วนเหลื่อมแต่ละชนิด ต่อราคาของปัจจัยการผลิตชนิดนั้น เท่ากับส่วนกลับของต้นทุนส่วนเหลื่อม ($\beta = \frac{1}{MC}$) ของการผลิต พอดี และ

ข) $$\frac{P_{x_1}}{P_{x_2}} = \frac{\phi_1}{\phi_2} = RTS_{12}$$

อัตราส่วนของราคาปัจจัยการผลิตชนิดต่าง ๆ และอัตราส่วนของผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยการผลิตเหล่านั้นเท่ากันพอดี หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า อัตราส่วนของราคาปัจจัยการผลิตชนิดต่าง ๆ เท่ากับ อัตราการทดแทนทางเทคนิค (RTS) ของปัจจัยเหล่านั้นพอดี

หมายเหตุ

ในที่นี้ $\beta = \frac{1}{MC}$ ซึ่งอาจแสดงให้เห็นจริงได้ดังนี้ :

แสดง :

จาก แบบสมการการผลิต (Production, function)

$$\phi = \phi\ (x_1, x_2)$$

อนุพันธ์รวม (total differential)

$$d\phi = \phi_1 dx_1 + \phi_2 dx_2$$

จากดุลยภาพของการผลิต อันเกิดจากการหาค่าวิกฤต

$$\phi_i = \beta P_{x_i}$$

ดังนั้น

$$d\phi = (\beta P_{x_1})\, dx_1 + (\beta P_{x_2})\, dx_2 \qquad \text{แทนค่า}$$

$$= \beta\, (P_{x_1}\, dx_1 + P_{x_2}\, dx_2)$$

แต่จากแบบสมการต้นทุน

$$C = P_{x_1} X_1 + P_{x_2} x_2 + F$$

ดังนั้น $dC = P_{x_1} dx_1 + P_{x_2} dx_2$

แทนค่าใน $d\phi$

$$d\phi = \beta\, (dc)$$

หรือ $\frac{d\phi}{dc} = \beta$

แต่ $\frac{dc}{d\phi} = MC$: marginal cost

ดังนั้น $\frac{d\phi}{dc} = \beta = \frac{1}{MC}$ ///