$$= -\frac{1}{\phi_2^2}\left\{\phi_2\left(\frac{d\phi_1}{dx_1}\right) - \phi_1\left(\frac{d\phi_2}{dx_1}\right)\right\}$$

$$\frac{d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{d\,x_1} = -\frac{1}{\phi_2^2}\left\{\phi_2\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dx_1}+\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dx_1}\right) - \phi_1\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx_1} + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dx_1}\right)\right\}$$

$\frac{d\phi_i}{dx_j}$ คือ อนุพันธ์รวมมุ่งต่อ x_j (Total Derivative)

$$= -\frac{1}{\phi_2^2}\left\{\phi_2\left(\phi_{11}+\phi_{21}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)\right) - \phi_1\left(\phi_{12}+\phi_{22}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)\right)\right\}$$

$\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j} = \phi_{ji}$: สัญลักษณ์

$$= -\frac{1}{\phi_2^2}\left\{\phi_2\left(\phi_{11}+\phi_{21}\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)\right) - \phi_1\left(\phi_{12}+\phi_{22}\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)\right)\right\}$$

: แทนค่า $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\phi_1}{\phi_2}$

$$= -\frac{1}{\phi_2^2}\left\{\phi_2\phi_{11} - \phi_{21}\phi_1 - \phi_1\phi_{12} + \phi_{22}\frac{\phi_1^2}{\phi_2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\phi_2^3}\left\{\phi_2^2\phi_{11} - \phi_{21}\phi_1\phi_2 - \phi_1\phi_{12}\phi_2 + \phi_{22}\phi_1^2\right\}$$

$$= -\frac{1}{\phi_2^3}\left\{\phi_2^2\phi_{11} - \phi_1\phi_2\phi_{21} - \phi_1\phi_2\phi_{12} + \phi_1^2\phi_{22}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\phi_2^3}\left\{\phi_2^2\phi_{11} - 2\phi_1\phi_2\phi_{12} + \phi_1^2\phi_{22}\right\}$$

: $\phi_{12} = \phi_{21}$ Young's Theorem

พิจารณาค่า $\dfrac{d\left(\dfrac{dx_2}{dx_1}\right)}{dx_1}$

จากองค์ประกอบของ $\dfrac{d\left(\dfrac{dx_2}{dx_1}\right)}{dx_1} = -\dfrac{1}{\phi_2^3}\{\phi_2^2\phi_{11} - 2\phi_1\phi_2\phi_{12} + \phi_1^2\phi_{22}\}$

พิจารณา :

1) $\phi_i = \dfrac{\partial\phi}{\partial x_i} = MP_i$ ซึ่งต้องเป็นบวกเสมอในช่วงการผลิต

2) $\phi_{ii} = \dfrac{\partial\phi_i}{\partial x_i} = \dfrac{\partial(MP_i)}{\partial x_i}$ ซึ่งจะต้องเป็นลบเพราะแสดงถึงความสัมพันธ์ของ MP_i กับการเปลี่ยนแปลงของ x_i ซึ่งจะต้องมีความสัมพันธ์ผกผันกัน

3) $\phi_{ij} = \dfrac{\partial\phi_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial(MP_j)}{\partial x_i}$ ซึ่งจะต้องเป็นบวก เพราะแสดงความสัมพันธ์ของ MP_j กับการเปลี่ยนแปลงของ x_i กล่าวคือ เมื่อ x_i เปลี่ยนแปลงไป มันจะทำให้ MP_i เปลี่ยนแปลงไปในทางผกผันกัน ซึ่งทำให้เป็นเสมือนว่า MP_j เปลี่ยนแปลงไปในทางเดียวกันกับ x_i นั่นเอง

$\therefore x_i \uparrow \rightarrow MP_i \downarrow \rightarrow MP_j \uparrow$

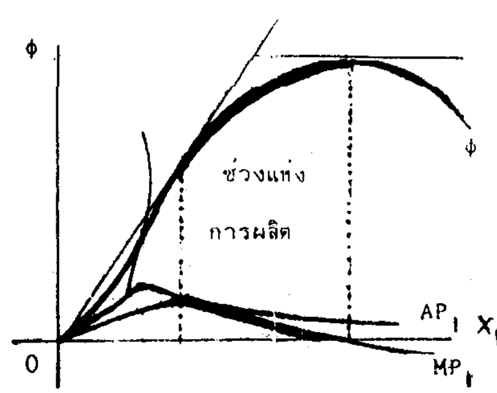
ผลสรุป :

$\phi_1 > 0 = (+)$

62 $> 0 = (+)$

2) $\begin{cases} \phi_{11} < 0 = (-) \\ \phi_{22} < 0 = (-) \end{cases}$

3) $\begin{cases} \phi_{12} > 0 = (+) \\ \phi_{21} > 0 = (+) \end{cases}$



$$\frac{d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{dx_1} = -\frac{1}{\phi_2^3}\{\phi_2^2\phi_{11} - 2\phi_1\phi_2\phi_{12} + \phi_1^2\phi_{22}\}$$

$$= -\frac{1}{(+)}\{(+)(-) - 2(+)(+)(+) + (+)(-)\}$$

: แทนค่าโดยเครื่องหมาย

$$= - \text{I}\ (-) \ -2\ (+) + (-)\ \}$$

$$= -\{(-)\}$$

$$= (+)$$

นั่นคือ $\frac{d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{dx_1} > 0$ เป็นบวก (+) //

จากการแสดงข้างต้นได้พอสรุปรวมว่า

ก) $\frac{dx_2}{dx_1} < 0$

ข) $\frac{d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{dx_1} > 0$

แสดงว่าเส้นแสดงผลิตผลเท่ากันในช่วงแห่งการผลิตจะต้องเป็นเส้นที่โค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง (convex to the origin) จริง

ข.ต.พ. ///

๔) **เอกมัยภาพของแบบสมการการผลิต (Homogeneity** of Production Functions)

ในทางเศรษฐศาสตร์ ได้กล่าวถึงผลได้ต่อขนาด (Return to Scale) เสมอ ๆ ซึ่งมักได้กล่าวว่า ในการผลิตใด ๆ ผลได้ต่อขนาดอาจจะ คงที่ เพิ่มขึ้น หรือลดลง ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับสัมพันธภาพของปัจจัยการผลิตกับผลผลิตนั้น ๆ กล่าวคือ :

ก) ถ้าเพิ่มปัจจัยการผลิตทุกชนิดขึ้นขนาดหนึ่ง แล้วผลผลิตอันเกิดจากการใช้ปัจจัยการผลิตเหล่านั้น เพิ่มขึ้นในอัตราต่ำกว่าอัตราการเพิ่มของการใช้ปัจจัยการผลิต แบบสมการการผลิตนั้น ก็เรียกว่า แบบสมการการผลิตที่มีผลได้ต่อขนาดลดลง (Decreasing Returns to Scale)

ข) ถ้าเพิ่มปัจจัยการผลิตทุกชนิดขึ้นขนาดหนึ่ง แล้วผลผลิตอันเกิดจากการใช้ปัจจัยการผลิตเหล่านั้นเพิ่มขึ้นในอัตราเดียวกันกับอัตราการเพิ่มของการใช้ปัจจัยการผลิต แบบสมการการผลิตนั้น ก็เรียกว่า แบบสมการการผลิตที่มีผลได้ต่อขนาดคงที่ (Constant Returns to Scale)

ค) ถ้าเพิ่มปัจจัยการผลิตทุกชนิดขึ้นขนาดหนึ่ง แล้วผลผลิตอันเกิดจากการใช้ปัจจัยการผลิตเหล่านั้น เพิ่มขึ้นในอัตราที่สูงกว่า อัตราเพิ่มของการใช้ปัจจัยการผลิต แบบสมการการผลิตนั้น ก็เรียกว่าแบบสมการการผลิตที่มีผลได้ต่อขนาดเพิ่มขึ้น (Increasing Returns to Scale)

อย่างไรก็ตาม ถ้าต้องการวิเคราะห์ทฤษฎีเศรษฐศาสตร์ ในรูปแบบเชิงปริมาณแล้ว การแสดงการพิจารณารูปแบบผลได้ต่อขนาดของแบบสมการการผลิตก็กระทำได้โดยหลักแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ด้วยการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของปัจจัยการผลิตและผลผลิตในรูปแบบสมการการผลิต (Production Function) แล้วพิจารณาความเป็นเอกมัยภาพ (Homogeneity) ของแบบสมการนั้นทางคณิตศาสตร์ต่อไป

ในทางคณิตศาสตร์ มีนิยามเกี่ยวกับเอกมัยภาพ [1/] (Homogeneity) ว่า

นิยาม :

แบบสมการใด ๆ สมการหนึ่ง จะเรียกว่าเป็นแบบสมการการที่มีเอกมัยภาพลำดับที่ k (*Homogeneous of* Degee k : k = ค่าคงที่ใด ๆ) ก็ต่อเมื่อ ผลคูณของตัวแปร

1/ Alpha C. Chiang, FUNDAMENTAL METHODS OF MATHEMATICAL ECONOMICS (2 nd ed., New York : Mc Graw - Hill, 1974), p.403.

ค่าอิสระ (Independent Variables) ทุกตัว กับค่าคงที่ใด ๆ ที่เป็นจำนวนจริงบวก, t, แล้ว ทำให้ผลลัพธ์ของสมการนั้นเปลี่ยนแปลงไป (เพิ่มขึ้น) เท่ากับ t^K เท่าของสมการเดิม

โดยคณิตศาสตร์ :

แบบสมการ $Y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

โดยที่ Y : ตัวแปรตาม (dependent variable)

x_i : ตัวแปรอิสระ (independent variable) ตัวที่ "i"

แบบสมการนี้จะมี เอกมัยภาพลำดับที่ k ก็ต่อ do

$$f(tx_1, tx_2, tx_3, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x2, x_3, \ldots, x_n)$$

ตัวอย่าง :

จงหาลำดับความเป็นเอกมัยภาพ (Degree of Homogeneity) ของแบบสมการต่อไปนี้

ก) $Y = f(x_1, x_2)$

$= x_1^2 + x_2^2$

ข) $Y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

$= \frac{x_1^3}{x_2} + x_3^2 + x_4 x_5$

ค) $Y = f(x_1, x_2)$

$= x_1^2 + x_2$

ง) $Y = f(x_1, x_2)$

$= x_2^2 + x_2^2 + 12$

วิธีทำ :

ก)

จาก $Y = f(x_1, x_2)$

$= x_1^2 + x_2^2$

นำ "t" ซึ่งเป็น เลขจำนวนจริงบวกคูณเข้ากับตัวแปรอิสระทุกตัว

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^2 + (tx_2)^2$$

$$= t^2x_1^2 + t^2x_2^2$$

$$= t^2(x_1^2 + x_2^2)$$

$$= t^2 f(x_1, x_2) \quad : \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

นั่นคือ $Y = x_1^2 + x_2^2$ เป็นสมการที่มีเอกมัยภาพลำดับที่ ๒ (Homogeneous of Degree 2)

ข)

จาก $Y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_5)$

$$= \frac{x_1^4}{x_2} + x_3^3 + x_4^2 + x_5$$

นำ "t" ซึ่งเป็นจำนวนจริงบวก คูณเข้ากับตัวแปรอิสระทุกตัว

$$f(tx_1, tx_2, tx_3, tx_4, tx_5) = \frac{(tx_1)^4}{(tx_2)} + (tx_3)^3 + (tx_4)^2(tx_5)$$

$$= \frac{t^4x_1^4}{tx_2} + t^3x_3^3 + t^3x_4^2x_5$$

$$= t^3 \frac{x_1^4}{x_2} + t^3 x_3^3 + t^3 x_4^2 x_5$$

$$= t^3 \left(\frac{x_1^4}{x_2} + x_3^3 + x_4^2 x_5 \right)$$

$$= t^3 f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

นั่นคือ $Y = \frac{x_1^4}{x_2} + x_3^3 + x_4^2 x_5$ เป็นสมการที่มีเอกพันธ์ภาพลำดับที่3

(Homogeneous of Degee 3)

ค)

จาก $Y = f(x_1, x_2)$

$$= x_1^2 + x_2$$

นำ "t" ซึ่งเป็นจำนวนจริงบวก คูณกับตัวแปรอิสระทุกตัว

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^2 + (tx_2)$$

$$= t^2 x_1^2 + tx_2$$

$$= t(tx_1^2 + x_2)$$

จะเห็นว่า $tx_1^2 + x_2 \neq x_1^2 + x_2$ ซึ่งแสดงว่าไม่สามารถที่จะเขียน $f(x_1, x_2)$ ให้อยู่ในรูปของ $t^k f(x_1, x_2)$ หรือ $t^k (x_1^2 + x_2)$ ได้

ดังนั้น $Y = x_1^2 + x_2$ จึงไม่เป็นสมการที่มีเอกพันธ์ภาพแต่อย่างใด

(Non - Homogeneous)

ง)

จาก $Y = f(x_1, x_2)$

$= x_1^2 + x_2^2 + 12$

นำ "t" ซึ่งเป็นจำนวนจริงบวก คูณกับตัวแปรอิสระทุกตัว

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^2 + (tx_2)^2 + 12$$

$$= t^2x_1^2 + t^2x_2^2 + 12$$

จะเห็นว่า ไม่สามารถที่จะเขียน $f(tx_1, tx_2)$ ให้อยู่ในรูปของ $t^k f(x_1, x_2)$ หรือ $t^k (x_1^2 + x_2^2 + 12)$ ได้ กล่าวคือ ไม่สามารถแสดงได้ว่าผลลัพธ์จะเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมเท่าไร

ดังนั้น $Y = x_1^2 + x_2^2 + 12$ จึงไม่เป็นสมการที่มีเอกพันธ์ภาพแต่อย่างใด (Non - Homogeneous)

ในทำนองเดียวกัน เอกพันธ์ภาพของแบบสมการการผลิต (Homogeneity of Production Functions) ก็อาจจะนิยาม ได้ว่า :

นิยาม :

แบบสมการการผลิต (Production Functions) ใด ๆ แบบสมการหนึ่งจะเรียกว่าเป็นเอกพันธ์ภาพแบบสมการการผลิตลำดับที่ k (Homogeneous Production Function of of Degree Degree k) ก็ต่อเมื่อปัจจัยการผลิตทุกชนิดในแบบสมการการผลิตนั้น เปลี่ยนแปลงไป t เท่า แล้วมีผลทำให้ผลิตผลเปลี่ยนแปลงไป t^k เท่าของผลผลิตเดิม

โดยคณิตศาสตร์ :

แบบสมการการผลิต $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

โดยที่ ϕ : จำนวนผลผลิต (output)

x_i จำนวนปัจจัยการผลิต (input) ชนิดที่ i $(i = 1, 2, 3 \ldots, n)$

แบบสมการการผลิตนี้จะมีเอกมัยภาพลำดับที่ k ก็ต่อเมื่อ

$$\phi(tx_1, tx_2, tx_3, \ldots, tx_n) = t^k \phi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

นั่นคือเมื่อปัจจัยการผลิตทุกชนิดเปลี่ยนแปลงไป (เพิ่มขึ้น) t เท่าแล้วผลผลิตก็จะเปลี่ยนแปลงไป (เพิ่มขึ้น) t^k เท่าของผลผลิตเดิม

ตัวอย่าง :

แบบสมการการผลิต $\phi = \phi(x_1, x_2)$

$$= 5x_1^2 x_2^3$$

ถ้าปัจจัยการผลิตทุกชนิด (x_1, x_2) เพิ่มขึ้น t เท่า แล้ว

$$\begin{aligned}
\phi(tx_1, tx_2) &= 5(tx_1)^2 (tx_2)^3 \\
&= 5(t^2x_1^2)(t^3x_2^3) \\
&= t^5 5x_1^2 x_2^3 \\
&= t^5(5x_1^2 x_2^3) \\
&= t^5 \phi(x_1, x_2) \qquad \phi(x_1, x_2) = 5x_1^2 x_2^3
\end{aligned}$$

นั่นคือ เมื่อเพิ่มปัจจัยการผลิตทุกชนิดขึ้น t เท่า ผลผลิตจะเป็น t^5 เท่าของผลผลิตเดิม

ดังนั้น แบบสมการการผลิต $\phi = 5x_1^2x_2^3$ จึงเป็นแบบสมการการผลิตซึ่งมีความเป็นเอกมัยภาพลำดับที่ ๕

ในทฤษฎีการผลิตทางเศรษฐศาสตร์ ลำดับของความเป็นเอกมัยภาพ (Degree of Homogeneity) ของแบบสมการการผลิตจะให้ความหมายเกี่ยวกับการพิจารณาผลได้ต่อขนาด (Returns to Scale) ดังนี้ คือ

ก) ถ้า $k < 1$ แสดงว่า เมื่อเพิ่มปัจจัยการผลิตทุกชนิดขึ้น t เท่าแล้วผลผลิตจะเพิ่มขึ้นน้อยกว่า t เท่า ($t^k < t$ เมื่อ $k < 1$) เช่นนี้แล้ว สมการการผลิตนั้นจะเรียกว่าเป็น แบบสมการการผลิตที่มีผลได้ต่อขนาดลดลง (Decreasing Returns to Scale)

ข) ถ้า $k = 1$ แสดงว่า เมื่อเพิ่มปัจจัยการผลิตทุกชนิดขึ้น t เท่าแล้วผลผลิตจะเพิ่มขึ้น t เท่า เช่นเดียวกัน ($t^k = t$ เมื่อ $k = 1$) เช่นนี้แล้ว สมการการผลิตนั้นจะเรียกว่า เป็นแบบสมการการผลิตที่มีผลได้ต่อขนาดคงที่ (Constant Returns to Scale)

ค) ถ้า $k > 1$ แสดงว่า เมื่อเพิ่มปัจจัยการผลิตทุกชนิดขึ้น t เท่าแล้วผลผลิตจะเพิ่มขึ้น มากกว่า t เท่า ของผลผลิตเดิม ($t^k > t$ เมื่อ $k > 1$) เช่นนี้แล้ว สมการการผลิตนั้น จะเรียกว่าเป็นแบบสมการการผลิตที่มีผลได้ต่อขนาดเพิ่มขึ้น (Increasing Returns to Scale)

คุณสมบัติบางประการของ เอกพันธ์ภาพแบบสมการ (Homogeneous Functions)

ก) อนุพันธ์บางส่วน (partial dirivative) ของเอกพันธ์แบบสมการ (Homogeneous Function) ซึ่งมีความเป็นเอกพันธ์ภาพลำดับที่ k จะเป็นเอกพันธ์ภาพแบบสมการลำดับที่ $k - 1$

พิสูจน์ :

สมมุติว่า เอกพันธ์แบบสมการลำดับที่ k คือ

$$y = f(x_1, x_2)$$

ซึ่ง $f(tx_1, tx_2) = t^k f(x_1, x_2)$: เอกพันธ์ภาพลำดับที่ k

อนุพันธ์บางส่วนมุ่งต่อ xl (partial derivative respect to x_1)

$$\frac{a\ f\ (tx_1 tx_2)}{\partial\ x_1} = \frac{a\ t^k .\ f(x_1,x_2)}{\partial' x_1}$$

หรือ $\frac{\partial f(tx_1,tx_2)}{\partial tx_1}$, $\frac{dtxl}{dx_1}$ I t^k . $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}$: Chain Rules

หรือ $f_1(tx_1,\ tx_2)\ .\ t = t^k\ f_1(x_1,x_2)$: สัญญลักษณ์

t หารตลอด ,

$$f_1\ (tx_1,tx_2) = t^{k-1}\ f_1(x_1,\ x_2)$$

ในทำนองเดียวกันอาจจะสรุปได้ว่า

$$f_2\ (tx_1,\ tx_2) = t^{k-1}\ f_1\ (x_1,x_2)$$

นั่นคือ อนุพันธ์บางส่วนมุ่งต่อตัวแปรอิสระตัวใดตัวหนึ่งของเอกมัยแบบสมการลำดับที่ k จะได้แบบสมการ (function)ใหม่ที่มีความเป็นเอกมัยภาพลำดับที่ k – 1 จริง

ข.ต.พ. ///

ในทางทฤษฎีการผลิตของเศรษฐศาสตร์ ก็เป็นลักษณ์ทำนองเดียวกัน กล่าวคือ อาจจะพิสูจน์และสรุปได้ว่า ถ้า : –

แบบสมการการผลิตคือ

$$\phi = \phi\ (x_1,\ x_2)$$

ซึ่ง $\phi(tx_1, tx_2) = t^k \phi(x_1, x_2)$: เอกมัยภาพลำดับที่ k

และแล้วจะได้ [1/]

$$\phi_1(tx_1, tx_2) = t^{k-1} \phi_1(x_1, x_2) : \quad \text{เอกมัยภาพลำดับที่ } k-1$$

และ

$$\phi_2(tx_1, tx_2) = t^{k-1} \phi_2(x_1, x_2) : \quad \text{เอกมัยภาพลำดับที่ } k-1$$

ซึ่งหมายความว่า ผลิตผลส่วนเหลื่อม [2/] (Marginal Product) ของปัจจัยการผลิต (x_1 และ x_2) จะเป็นแบบสมการที่มีความเป็นเอกมัยภาพลำดับที่ k-1

อนึ่ง ถ้าแบบสมการการผลิตเป็นแบบสมการที่มีเอกมัยภาพเชิงเส้น [3/] (Linearly Homogeneous = Homogeneous of Degree one) การสรุปก็จะเป็นไปได้ว่า

$$\phi_1(tx_1, tx_2) = t^{\circ} \phi_1(x_1, x_2) : t^{\circ} = 1$$

$$\phi_2(tx_1, tx_2) = t^{\circ} \phi_2(x_1, x_2) : t^{\circ} = 1$$

1/ ขอให้ท่านผู้อ่านทดลองพิสูจน์ดู

2/ ผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยการผลิตชนิดที่ i (Marginal Product of x_i : MP_i)

$$MP_i = \frac{\partial \phi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = \phi_i(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

3/ คำว่า "เอกมัยภาพเชิงเส้น" (Linearly Homogeneous) มิได้หมายความว่าแบบสมการนั้นเป็น สมการเชิงเส้น (Linear Equation) หากแต่มีความหมายว่าสมการนั้นเป็นแบบสมการที่มีลำดับความเป็นเอกมัยภาพลำดับที่หนึ่ง (เชิงเส้น) เท่านั้น Ibid., pp. 404–405

ซึ่งหมายความว่า ผลิตผลส่วนเหลื่อมของแต่ละปัจจัยการผลิต (x_1 และ x_2) จะมีความเป็นเอกมัยภาพลำดับที่ศูนย์ ("o") และมีความหมายทางเศรษฐศาสตร์ว่า ถ้าปัจจัยการผลิตทุกชนิดเกิดการเปลี่ยนแปลงไป แต่ถ้าหากว่าปัจจัยเหล่านั้นเปลี่ยนแปลงไปในอัตราเดียวกันแล้วละก็ ผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยการผลิตเหล่านั้นจะไม่เปลี่ยนแปลงตามไปด้วย-แต่อย่างไร หากแต่ว่าจะต้องคงที่เสมอไป ซึ่งแสดงว่า ผลิตผลส่วนเหลื่อมของการใช้ปัจจัยการผลิตเหล่านั้น จะขึ้นอยู่กับสัดส่วนของการใช้ปัจจัยการผลิตต่าง ๆ ในการผลิตนั้น ๆ เท่านั้น

ข) เอกมัยแบบสมการใด ๆ สามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูปของ Euler's Theorem ได้ (Euler's Theorem อ่านว่า Oiler's Theorem) 1/

แบบสมการ

$$Y = f(x_1, x_2)$$

ถ้า $f(tx_1, tx_2) = t^k f(x_1, x_2)$ เอกมัยภาพลำดับที่ k

และแล้วจะสามารถเขียนให้อยู่ในรูป Euler's Theorem ได้เป็น :

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 = k f(x1, x2) \quad : \quad f_i = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_i}$$

พิสูจน์ :

สมมุติว่า เอกมัยภาพแบบสมการลำดับที่ k คือ

$$Y = f(x_1, x_2)$$

1/ G.C. Archibald and Richard G. Lipsey, AN INTRODUCTION TO A MATHEMATICAL TREATMENT OF ECONOMICS (2 nd ed., London : Weidenfeld and Nieolson, 1973), p.227.

ซึ่ง $f\ (tx_1,\ tx_2) = t^k\ f\ (x_1,\ x_2)$: เอกมัยภาพลำดับที่ k

และอนุพันธ์บางส่วนมุ่งต่อ t คือ

$$\frac{\partial f\ (tx_1,\ tx_2)}{\partial t} = \frac{\partial t^k f\ (x_1,\ x_2)}{\partial\ t}$$

ซึ่งด้านซ้ายมือคือ อนุพันธ์รวมบางส่วนมุ่งต่อ t (partial total derivative)

$$\frac{\partial f\ (tx_1, tx_2)}{\partial tx_1} \cdot \frac{\partial tx_1}{\partial t} + \frac{\partial f (tx_1,tx_2)}{\partial tx_2} \cdot \frac{\partial tx_2}{\partial t} = kt^{k-1}\ f(x_1,x_2)$$

$$\{f_1\ (tx_1,tx_2)\}\ x_1 + \{f_2\ (tx_1,tx_2)\}\ x_2 = kt^{k-1}\ f(x_1,x_2)$$: สัญญลักษณ์

หรือ $x_1\ f_1\ (tx_1,tx_2) + x_2 f_2\ (tx_1,tx_2) = kt^{k-1}\ f(x_1,x_2)$

แต่ $f_i\ (tx_1,tx_2) = t^{k-1}\ f_i(x_1,x_2)$: ตามคุณสมบัติข้อ ก)

ดังนั้น $x_1 t^{k-1}\ f_1(tx_1,tx_2) + x_2 t^{k-1} f_2(tx_1 tx_2) = kt^{k-1}\ f\ (x_1,x_2)$

แล้ว $x_1 f_1(x_1,x_2) + x_2 f_2(x_1,x_2) = k\ f\ (x_1,x_2)$: t^{k-1} หารตลอด

หรือ $x_1 f_1 + x_2 f_2 = k\ f\ (x_1,x_2)$: สัญญลักษณ์

นั่นคือ เอกมัยภาพแบบสมการใด ๆ สามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูป Euler's Theorem ได้

ข.ต.พ. ///

ในทางทฤษฎีการผลิตของเศรษฐศาสตร์ ก็เป็นลักษณ์ทำนองเดียวกันคือ เอกมัยภาพแบบสมการการผลิตใด ๆ สามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูป Euler's Theorem ได้เช่นกัน กล่าวคือ :

ถ้าแบบสมการการผลิตคือ

$$\phi = \phi\ (x_1, x_2)$$

ซึ่ง $\phi\ (tx_1, tx_2) = t^k\ \phi(x_1, x_2)$: เอกมัยภาพลำดับที่ k และแล้วจะได้

$$x_1\ \phi_1 + x_2\ \phi_2 = k\ \phi\ (x_1, x_2)$$ Euler's Theorem

หรือ $x_1\ (MP_1) + x_2\ (MP_2) = k\ \phi\ (x_1, x_2)$: $\phi_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = MP_i$

ซึ่งหมายความว่า เอกมัยแบบสมการการผลิตใด ๆ ก็ตามจะมี ผลรวมของผลคูณของจำนวนการผลิตที่ใช้กับผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยการผลิตเหล่านั้น เท่ากับ ผลคูณของ ผลผลิตกับลำดับความเป็นเอกมัยภาพของแบบสมการการผลิตนั้นพอดี

อนึ่ง ถ้าแบบสมการการผลิต เป็นแบบสมการที่มี เอกมัยภาพเชิงเส้น (Linearly Homogeneous) แล้วละก็ การสรุปก็อาจจะเป็นไปได้ว่า

$$x_1 \phi_1 + x_2\ \phi_2 = \phi\ (x_1, x_2) \qquad k = 1$$

หรือ $x_1(MP_1) + x_2(MP_2) = (x_1, x_2)$.

ซึ่งหมายความว่า จำนวนผลผลิตทั้งหมด (total output : ϕ) จะเท่ากับผลคูณของจำนวนการใช้ปัจจัยการผลิตแต่ละชนิดกับผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยการผลิตเหล่านั้นรวมกัน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า แต่ละปัจจัยการผลิตจะได้รับผลตอบแทน จากผลิตผลรวม เท่ากับ ผลคูณของจำนวนปัจจัยที่ถูกนำไปใช้กับผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยการผลิตนั้น ๆ พอดี (แต่ละหน่วยของปัจจัยจะได้รับผลตอบแทน เท่ากับ ผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยการผลิตนั้น ๆ)

1/ ขอให้ท่านผู้อ่านทดลองพิสูจน์ดู

นอกจากนี้ การที่เอกมัยแบบสมการการผลิตสามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูปของ Euler's Theorem ได้ ทำให้สามารถพิจารณาความหมายบางประการเกี่ยวกับความยืดหยุ่นของการผลิตทางเศรษฐศาสตร์ได้ด้วย ซึ่งโดยนัยดังกล่าว อาจจะกล่าวได้ว่า เอกมัยแบบสมการการผลิตมีคุณสมบัติเกี่ยวกับความยืดหยุ่นของการผลิตด้วย

กล่าวคือ :

เอกมัยแบบสมการการผลิตใด ๆ จะมีผลรวมของความยืดหยุ่นของการผลิตอันเกิดจากปัจจัยการผลิต[1/] (Output Elasticity of Input) เท่ากับ ลำดับของความเป็นเอกมัยภาพของแบบสมการการผลิตนั้นพอดี

พิสูจน์

สมมุติว่า เอกมัยแบบสมการการผลิต ลำดับที่ k คือ

$$\phi = \phi(x_1, x_2)$$

ซึ่ง $\phi(tx_1, tx_2) = t^k \phi(x_1, x_2)$: เอกมัยภาพลำดับที่ k

เขียนให้อยู่ในรูป Euler's Theorem ได้เป็น

$$x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2 = k \phi(x_1, x_2)$$

$$x_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = k \phi(x_1, x_2) \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \phi_i$$

1/ ความยืดหยุ่นของการผลิตอันเกิดจากปัจจัยการผลิต (Output Elasticity of Input : E ϕ) หมายถึง สัดส่วนการเปลี่ยนแปลงของอัตราการผลิต อันเกิดจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราการใช้ปัจจัยการผลิต

$$E\phi = \frac{\frac{\Delta\phi}{\phi}}{\frac{\Delta\chi}{\chi}} = \frac{\Delta\phi}{\Delta\chi} \frac{\chi}{\phi} \simeq \frac{\partial\phi}{\partial\chi} \frac{\chi}{\phi} = \frac{MP}{AP}$$

หรือ $$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \cdot x_2 = k\phi\ (x_1, x_2)$$

นำ $\phi = \phi(x_1, x_2)$ หารตลอดทั้งสองข้าง

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{\phi} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \frac{x_2}{\phi} = k \qquad \star$$

ซึ่ง $\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \frac{x_1}{\phi}$ คือ ความยืดหยุ่นของการผลิตอันเกิดจาก x_1 (Output Elasticity of x_1)

และ $\frac{\partial\phi}{\partial x_2} \frac{x_2}{\phi}$ คือ ความยืดหยุ่นของการผลิตอันเกิดจาก x_2 (Output Elasticity of x_2)

แสดงว่า ผลรวมของความยืดหยุ่นของการผลิต อันเกิดจากปัจจัยการผลิตจะเท่ากับ ลำดับของความเป็นเอกมัยภาพของเอกมัยแบบสมการการผลิตนั้น ๆ พอดี

ข.ต.พ. ///

9). แบบสมการการผลิตของค๊อบ - ดักลาส (Cobb - Douglas Production Function

แบบสมการการผลิตของ ค๊อบ - ดักลาส เป็นแบบสมการการผลิตที่นิยมกันอย่างกว้างขวางในหมู่นักเศรษฐศาสตร์ทั่วไปในการใช้เป็นตัวแบบของสมการการผลิตเพื่ออธิบาย และวิเคราะห์ทฤษฎีเศรษฐศาสตร์ในเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งแบบสมการการผลิตดังกล่าวนี้เป็น เอกมัยแบบสมการการผลิตและมีลักษณะทั่ว ๆ ไป ดังนี้

ลักษณะ :

แบบสมการการผลิตลักษณะทั่วไป $\phi = \phi\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

แบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส 1/ $\phi = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} \ldots x_m^{\eta}$

1/ G.C. Archibald and Richard G. Lipsey, op. cit., p.216.

โดยที่ :

ϕ หมายถึง จำนวนผลผลิต (output)

x_i หมายถึง จำนวนปัจจัยการผลิต (input) ชนิดที่ i ($i = 1,2,3,\ldots,m$)

A หมายถึง ค่าคงที่ใด ๆ ที่เป็นจำนวนจริงบวก (positive real number : $A > 0$)

$\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\eta$ หมายถึง เลขเศษส่วนบวก (positive fraction : $0 < \alpha,\beta,\gamma,\ldots,\eta < 1$)

อย่างไรก็ตามลักษณะแบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส ที่นิยมใช้กันจริง ๆ เพื่อความสะดวกและง่ายต่อความเข้าใจ มักจะสมมุติให้ผลผลิตขึ้นอยู่กับการใช้ปัจจัยเพียงสองชนิดเท่านั้น . คือ

ลักษณะ :

แบบสมการการผลิตลักษณะทั่วไป $\phi = \phi(x_1,x_2)$

แบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส $\phi = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$

โดยเหตุที่แบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส เป็นเอกมัยแบบสมการการผลิตที่นิยมใช้อธิบายและวิเคราะห์เกี่ยวกับทฤษฎีการผลิตอย่างกว้าง และมีลักษณะเฉพาะตัวแบบหนึ่ง ดังนั้นจึงควรที่จะได้พิจารณาคุณสมบัติบางประการของแบบสมการการผลิตดังกล่าวไว้ด้วยดังต่อไปนี้

คุณสมบัติสำคัญบางประการของแบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส

คุณสมบัติที่ ๑ :

แบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส เป็นเอกมัยแบบสมการการผลิต ที่มีเอกมัยภาพลำดับที่ $\alpha + \beta$

พิสูจน์ :

แบบสมการการผลิต $\phi = \phi(x_1,x_2)$

$= Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$

เมื่อปัจจัยการผลิต x_1 และ x_2 เปลี่ยนแปลงไป (เพิ่มขึ้น) t เท่า

$$\phi(tx_1, \; tx_2) = A(tx_1^{\alpha})(tx_2^{\beta})$$

$$= At^{\alpha}.x_1^{\alpha}.t^{\beta}.x_2^{\beta}$$

$$= t^{\alpha+\beta}.\; Ax_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}$$

$$= t^{\alpha+\beta}\,(Ax_1^{\alpha}\, x_2^{\beta})$$

$$= t^{\alpha+\beta}.\; \phi\,(x_1,x_2)$$

แสดงว่า แบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส มีความเป็นเอกมัยภาพลำดับที่ $\alpha + \beta$ จริง

ช.ต.พ. ///

อนึ่งถ้า $\alpha + \beta = 1$ แบบสมการการผลิตนี้ ก็จะเป็นเอกมัยภาพแบบสมการการผลิตเชิงเส้น (Linearly Homogeneous Production Function) ซึ่ง หมายถึงว่าจะเป็นแบบสมการการผลิตที่มีผลได้ต่อขนาดคงที่ (Constant Returns to Scale) และผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยการผลิต x_1 และ x_2 (Marginal Product of x_1 and x_2) จะมีความเป็นเอกมัยภาพลำดับที่ศูนย์ ("o") ซึ่งหมายความว่าผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยการผลิตเหล่านั้นจะขึ้นอยู่กับสัดส่วนการใช้ปัจจัยการผลิตต่างๆ ในการผลิตนั้น ๆ เท่านั้น ดังจะแสดงให้เห็นชัดดังต่อไปนี้

จาก $\alpha + \beta = 1$

ดังนั้น $\beta = 1 - \alpha$

แสดง : ก) ผลได้ต่อขนาดคงที่ (Constant Returns to Scale)

แบบสมการการผลิต :

$$\phi = \phi(x_1, x_2)$$

$$= Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

$$= Ax_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \qquad \beta = 1-\alpha$$

แล้ว

$$\phi(tx_1, tx_2) = A(tx_1)^{\alpha} (tx_2)^{1-a}$$

$$= At^{\alpha}x_1^{\alpha} \; t^{1-a}x_2^{1-a}$$

$$= A\,t^{\alpha+1-\alpha} x_1^{\alpha} x_2^{1-a}$$

$$= A\,t\,x_1^{a} x_2^{1-a}$$

$$= t\,(Ax_1^{\alpha} x_2^{1-a})$$

$$= t\phi(x_1, x_2) \qquad \phi(x_1, x_2) = Ax_1^{a} x_2^{1-a}$$

แสดงว่า เป็นเอกมัยแบบสมการการผลิตลำดับที่ ๑

แสดง :ข) ผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยการผลิต X_1 และ X_2 (Marginal Productivity of x_1 and x_2 : MP_1 and MP_2) จะมีความเป็นเอกมัยภาพลำดับที่ศูนย์(Homogeneity of Degree zero)

จาก

$$\phi_1 = \phi_1(x_1, x_2)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \qquad : \qquad \phi_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} = MP_1$$

$$= \alpha\,A\,x_1^{a-1} x_2^{1-\alpha}$$