บทที่ 7

ทฤษฎีองค์การผลิต

THEORY OF THE FIRM

บทที่ 7
ทฤษฎีองค์การผลิต
(Theory of The Firm)

๑. ความหมาย :

ในการผลิตสินค้าอย่างใดอย่างหนึ่งนั้น ถ้าสมมุติว่าเรามี เทคนิคการผลิตคงที่ระดับหนึ่งแล้ว การที่ผลผลิตจะเปลี่ยนแปลงไปได้ก็ย่อมจะเกิดจากการเปลี่ยนแปลง จำนวนของปัจจัยการผลิตซึ่งใช้ในการผลิตสินค้านั้น ๆ ดังนั้นปัญหาขององค์การผลิต หรือผู้ผลิตก็ย่อมจะต้องขึ้นอยู่กับการตัดสินใจในการใช้ปัจจัยการผลิตนั่นเอง และเมื่อได้พิจารณาถึงปัจจัยที่ใช้ในการผลิตแล้ว ผู้ผลิตยังจะต้องพิจารณาตัดสินใจเกี่ยวกับปัญหาการเลือกที่จะทำการผลิตด้วยว่าควรจะผลิตสินค้าอะไรและอย่างไร ทั้งนี้การตัดสินปัญหาต่าง ๆ จะนำมาซึ่ง ผลตอบแทนที่องค์การจะได้รับในที่สุด

กล่าวโดยกว้าง ๆ แล้วผู้ผลิตอาจต้องประสบปัญหาต่าง ๆ ในการผลิต โดยสรุปดังต่อไปนี้

๑) ควรจะผลิตสินค้าทั้งหมดกี่ประเภท และประเภทละเท่าไร

๒) สินค้าแต่ละประเภทจะต้องใช้ปัจจัยการผลิตกี่ชนิด ชนิดละเท่าไร

๓) ปัจจัยการผลิตแต่ละชนิดต้องใช้เพื่อการผลิตทั้งหมดเท่าใด และ

๔) ปัจจัยการผลิตทั้งหมดทุกชนิดรวมกันเป็นเท่าไร

อย่างไรก็ตามในการวิเคราะห์พฤติกรรมในการตัดสินใจของผู้ผลิตในปัญหาดังกล่าวข้างต้นนั้น จะต้องเกี่ยวพันกับความหมายและแนวคิดพื้นฐานทางเศรษฐศาสตร์ที่เกี่ยวข้องต่าง ๆ หลายประการ ดังนั้นจึงควรที่จะได้พิจารณาแนวคิดพื้นฐานเหล่านั้นเสียก่อนเป็นลำดับไป

b. แนวคิดพื้นฐาน (Basic Concept)

๒.๑ การผลิต (Production)

๑) แบบสมการการผลิต (Production Function)

แบบสมการการผลิต หมายถึง แบบสมการทางคณิตศาสตร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลผลิต (output) กับ ปัจจัยการผลิต (inputs) ที่ใช้ในการผลิตนั้น ๆ

โดยคณิตศาสตร์ :

$$\phi = \phi\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

โดยที่ :

ϕ หมายถึง จำนวนผลผลิต (output) และอ่านว่า "Phi"

x_i หมายถึง จำนวนปัจจัยการผลิต (input) ชนิดที่ "i" ที่ใช้ในการผลิตนั้น

ในที่นี้แบบสมการการผลิตใด ๆ จะต้องเป็น แบบสมการค่าเดียว (Single - Value Function) ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์บางส่วนลำดับที่หนึ่งและลำดับที่สองได้ 1/ (first and second order partial derivative)

จากแบบสมการการผลิตข้างต้น เราสามารถกล่าวตามเชิงคณิตศาสตร์ได้ง่าย ๆ ว่า ϕ ขึ้นอยู่กับ x_i หรือโดยทางเศรษฐศาสตร์ หมายความว่า ปริมาณการผลิต ย่อมขึ้นอยู่กับจำนวนการใช้ปัจจัยการผลิต และรวมถึงการจัดสรรปัจจัยการผลิตเหล่านั้นด้วย

๒) เส้นประสิทธิภาพของปัจจัยการผลิต (Productivity Curve)

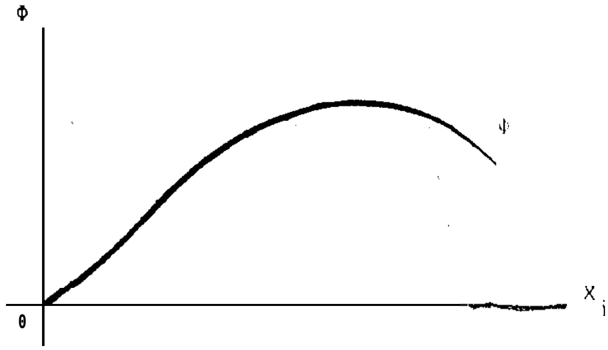
เส้นประสิทธิภาพของปัจจัยการผลิต หมายถึง ทางเดินของจุดซึ่งแสดงคุณภาพ ประสิทธิภาพของปัจจัยการผลิตชนิดใดชนิดหนึ่ง (x_i) ที่มีผลอันก่อให้เกิดผลผลิต (ϕ) ขึ้น ณ ระดับการใช้ปัจจัยการผลิตชนิดนั้นต่าง ๆ กัน ทั้งนี้หมายความว่า ปัจจัยการผลิตชนิดอื่น ๆ นั้นคงที่ ณ ระดับใดระดับหนึ่งแล้ว

โดยคณิตศาสตร์ :

$$\phi = \phi\ (x_i / x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

1/ James M. and Richard E. Quandt, MICROECONOMIC THEORY : A Mathematical Approach (2 nd ed., New York : Mc Graw Hill, 1971), p.54.

โดยเรขาคณิต :



อนึ่ง ถ้าปัจจัยการผลิตชนิดอื่น ๆ (นอกเหนือจาก x_i) ซึ่งคงที่อยู่แล้วนั้นเปลี่ยนแปลงจำนวนไปจากเดิม มันย่อมทำให้ผลผลิต (output) เปลี่ยนแปลงไปด้วย เช่น เดียวกับการที่ค่าคงที่ของสมการทางคณิตศาสตร์เปลี่ยนแปลงไป ย่อมทำให้ผลลัพธของสมการนั้นเปลี่ยนแปลงไป หากแต่ว่าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนั้นมิได้เปลี่ยนแปลงไปด้วยแต่อย่างใด ในทำนองเดียวกันในกรณีเช่นนี้ความสัมพันธ์ระหว่าง ผลผลิตกับปัจจัยการผลิต ก็มิได้เปลี่ยนแปลงไปจากลักษณะเดิมเช่นกัน

โดยคณิตศาสตร์ :

เมื่อปัจจัยการผลิตชนิดอื่น ๆ (นอกจาก x_i คงที่ระดับหนึ่ง (๑")

$$\phi^{1} = \phi\,(x_i / x_{11}, x_{21}, x_{31}, \ldots, x_{(i-1)1}, x_{(i+1)1}, \ldots, x_{n_1})$$

เมื่อปัจจัยการผลิตชนิดอื่น ๆ เปลี่ยนแปลงไปอยู่ในระดับต่าง ๆ กัน

ระดับที่สอง : $\phi^{2} = \phi\,(x_i / x_{12}, x_{22}, x_{32}, \ldots, x_{(i-1)_2}, x_{(i+1)_2}, \ldots, x_{n_2})$

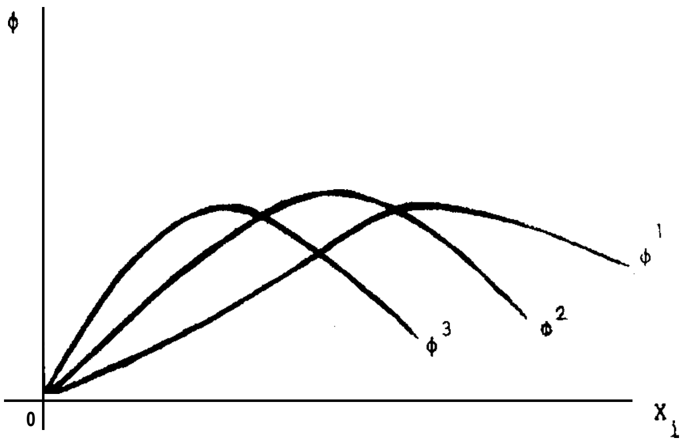
ระดับที่สาม : $\phi^{3} = \phi\,(x_i / x_{13}, x_{23}, x_{33}, \ldots, x_{(i-1)_3}, x_{(i+1)_3}, \ldots, x_{n_3})$

\- - - - - - - - -

ระดับที j : $\phi^{j} = \phi\,(x_i / x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, \ldots, x_{(i-1)_j}, x_{(i+1)_j}, \ldots, x_{n_j})$

ในที่นี้ ϕ^j หมายถึง ผลผลิต ณ ระดับ ปัจจัยการผลิตอื่น ๆ (นอกจาก x_i) อยู่ที่ระดับ "j" และแสดงระดับของปัจจัยอื่น ๆ นั้นด้วยสัญญลักษณ์ห้อยท้ายตัวที่สอง (ϕ^j ไม่ใช่ ϕ ยกกำลัง j แต่เป็นเพียงสัญญลักษณ์แสดงระดับผลผลิตเท่านั้น)

โดยเรขาคณิต :



ค) ผลิตผลเฉลี่ย (Average Productivity : AP)

ผลิตผลเฉลี่ย หมายถึง ผลผลิตที่ได้จากการเฉลี่ยผลิตผล (ϕ) โดยปัจจัยการผลิตชนิดใดชนิดหนึ่ง (x_i) ณ ระดับการใช้ปัจจัยการผลิตดังกล่าวระดับใดระดับหนึ่ง

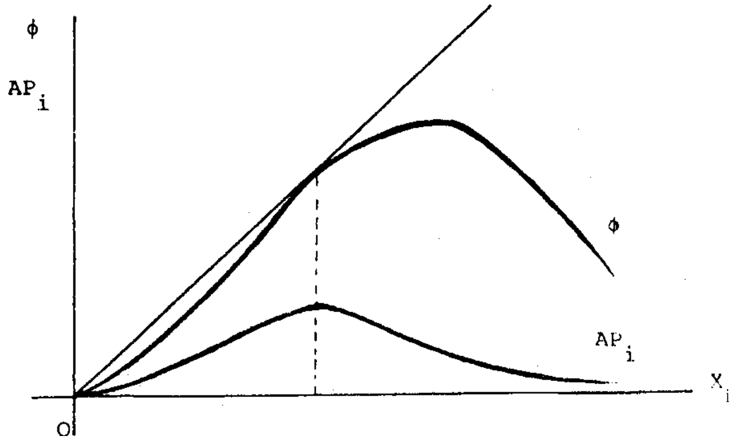
โดยคณิตศาสตร์ :

$$AP_i = \frac{\phi\ (x_i / x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{x_i}$$

หรือ $$= \frac{\phi}{x_i}$$

อนึ่งถ้าหากว่าการเฉลี่ยผลิตผลดังกล่าวกระทำโดยต่อเนื่องกัน ในระดับการใช้ปัจจัยผลิตชนิดนั้น ๆ ต่าง ๆ ระดับกัน ก็จะเกิดผลิตผลเฉลี่ยต่างระดับปัจจัยกันและถ้านำลงเขียนในรูปเรขาคณิตก็จะได้เส้นแสดงผลิตผลเฉลี่ย (Average Productivity Curve) ดังนี้

โดยเรขาคณิต :



๔) ผลิตผลส่วนเหลื่อม (Marginal Productivity : MP)

ผลิตผลส่วนเหลื่อม หมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนผลผลิต (ϕ) อันเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของจำนวนการใช้ปัจจัยการผลิตชนิดใดชนิดหนึ่ง (x_i)

โดยคณิตศาสตร์ :

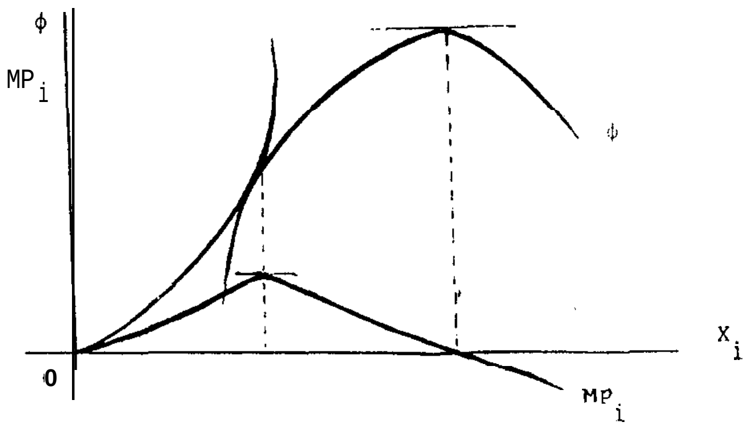
$$MP_i = \frac{\Delta\phi}{\Delta x_i}$$

ถ้า $\Delta x_i \to 0$: การเปลี่ยนแปลงของจำนวนการใช้ปัจจัยการผลิต x_i มีน้อยมาก

แล้ว $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta x_i} \approx \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$

ดังนั้น $$MP_i = \frac{\Delta\phi}{\Delta X_i} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$ (อาจเขียน ϕ_i แทน $\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$ ก็ได้)

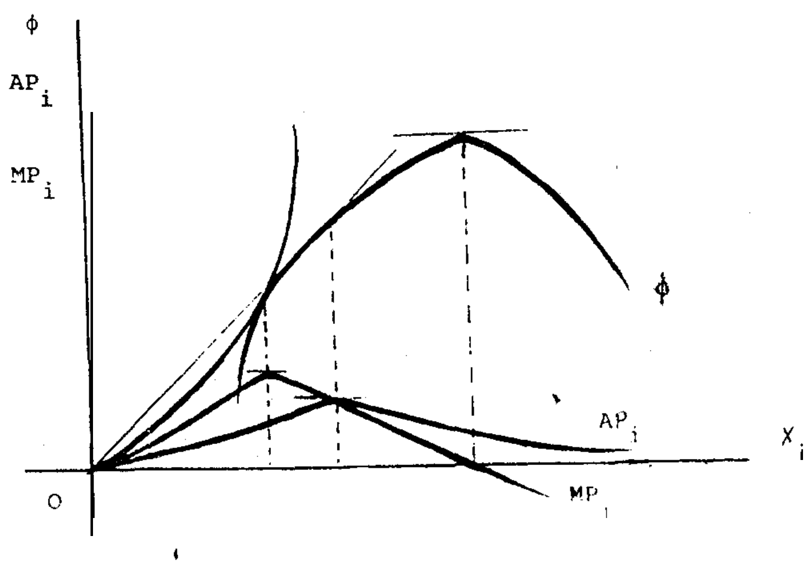
โดยเรขาคณิต :



ถ้าสังเกตทั้งใน AP_i และ MP_i จะเห็นว่า ในช่วงแรกเมื่อ x_i เพิ่มขึ้น AP_i และ MP_i จะเพิ่มขึ้นในอัตราเพิ่ม (increasing in the increasing rate) แล้วจะลดน้อยถอยลงในการเพิ่มขึ้น หรือ เพิ่มขึ้นในอัตราลดน้อยถอยลง (increasing in the diminishing rate) ในช่วงกลาง และที่สุดจะลดลงในช่วงท้าย (decreasing) ซึ่งเป็นไปตามกฎแห่งการลดน้อยถอยลงของผลได้ (ตอบแทน) (Law of Diminishing Returns)

เมื่อนำ AP_i และ MP_i มาเขียนในรูปเรขาคณิตร่วมกันจะเห็นได้ดังนี้

โดยเรขาคณิต :



จากรูปสามารถสรุปได้ว่า :

ก) เมื่อ AP_i **มีค่าสูงที่สุด แล้ว** AP_i จะเท่ากับ MP_i พอดี

ข) เมื่อ AP_i และ MP_i **ต่างอยู่ในตำแหน่งสูงที่สุด** แล้ว MP_i จะอยู่ ณ ระดับการใช้ปัจจัย (x_i) ที่ปริมาณต่ำกว่าของ AP_i

พิสูจน์ ก)

เมื่อ AP_i มีค่าสูงที่สุด แล้ว AP_i จะเท่ากับ MP_i พอดี :

จากแบบสมการการผลิต

$$\phi = \phi\,(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

แล้ว $$AP_i = \frac{\phi}{x_i}$$

และเมื่อ AP_i มีค่าสูงที่สุด ก็คือ เมื่อความชัน (slope) ของ AP_i มีค่าเท่ากับศูนย์ ("o") ซึ่งค่าความชันของ AP_i ก็คือ อนุพันธ์บางส่วนลำดับที่หนึ่งของ ϕ มุ่งต่อ x_i (first partial derivative of ϕ respect to x_i) นั่นเอง

นั่นคือ $$\frac{\partial\,(AP_i)}{\partial\, x_i} = o$$: แสดงว่า AP_i มีค่าสูงสุด

หรือ $$\frac{\partial\,\{\frac{\phi}{x_i}\}}{\partial\, x_i} = 0$$: แทนค่า $AP_i = \frac{\phi}{x_i}$

หรือ $$\frac{x_i\{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\} - \phi\,\{\frac{\partial x_i}{\partial x_i}\}}{x_i^2} = o$$: กระจายค่าอนุพันธ์ของผลหาร

แต่ $x_i \neq o$ เพราะเป็นจำนวนการใช้ปัจจัยชนิดที่ "i" ณ ระดับ AP_i มีค่าสูงสุด

ดังนั้น $x_i^2 \neq o$ ด้วย

ฉะนั้น $$x_i\,\{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\} - \phi\,\{\frac{\partial x_i}{\partial x_i}\} = 0$$

หรือ $$x_i \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \right\} = \phi$$

ดังนั้น $$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \frac{\phi}{x_i}$$

หรือ $$MP_i = AP_i$$

นั่นคือ เมื่อ AP_i มีค่าสูงที่สุด แล้ว AP_i จะเท่ากับ MP_i พอดี

ช.ต.พ. //

พิสูจน์ ข)

เมื่อ AP_i และ MP_i ต่างอยู่ในตำแหน่งที่สูงที่สุด แล้ว MP_i จะอยู่ ณ ระดับการใช้ปัจจัย (X_i) ที่ปริมาณต่ำกว่าของ AP_i :

ในการพิสูจน์นี้จะขอสมมติ เพื่อความสะดวกและความเข้าใจได้ง่าย ๆ ว่าแบบสมการการผลิตคือ [1/]

$$\phi = AX_1^2 X_2^2 - BX_1^3 X_2^3$$

ซึ่งหมายความว่า ผลิตผล (ϕ) ขึ้นอยู่กับการใช้ปัจจัยเพียงสองชนิด คือ x_1 และ x_2 เท่านั้น ดังนั้น เมื่อต้องการเปรียบเทียบ AP กับ MP ของปัจจัยชนิดใดชนิดหนึ่ง ปัจจัยอีกชนิดหนึ่งก็จะต้องเป็นเสมือนค่าคงที่ เช่น ต้องการเปรียบเทียบ AP กับ MP ของปัจจัยชนิดที่หนึ่ง (x_1) เช่นนี้ ปัจจัยชนิดที่สอง (x_2) ก็จะต้องเสมือนว่าคงที่ เช่นนี้แล้ว ในการเปรียบเทียบ AP_1 กับ MP_1 ก็อาจจะกำหนดค่าคงที่ในรูปง่าย ๆ เพื่อลดความสับสนในการพิสูจน์ว่า :

$$AX_2^2 = k_1 \qquad \text{(parameter)} \qquad *$$

$$BX_2^3 = k_2 \qquad \text{(parameter)} \qquad *$$

และแล้ว

$$\phi = k_1x_1^2 - k_2x_1^3$$

จาก $$AP_1 = \frac{\phi}{x_1}$$

1/ Ibid., p. 57.

ดังนั้น $AP_1 = k_1x_1 - k_2x_1^2$ **

และจาก $MP_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$

ดังนั้น $MP_1 = 2k_1x_1 - 3k_2x_1^2$ **

เมื่อ AP_1 อยู่ในตำแหน่งที่สูงที่สุด ย่อมหมายความว่า ค่าความชันของ AP_1 จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ("๐")

นั่นคือ $\frac{\partial (AP_1)}{\partial x_1} = 0$

หรือ $k_1 - 2k_2x_1 = 0$

ดังนั้น $x_1 = \frac{k_1}{2k_2}$ ***

ซึ่งแสดงถึงปริมาณการใช้ x_1 ณ ระดับที่ AP_1 อยู่ในตำแหน่งสูงที่สุด

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ MP_1 อยู่ในตำแหน่งที่สูงที่สุด ย่อมหมายความว่าค่าความชัน ของ MP_1 จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ("๐")

นั่นคือ $\frac{\partial (MP_1)}{\partial x_1} = 0$

หรือ $2k_1 - 6k_2x_1 = 0$

ดังนั้น $x_1 = \frac{k_1}{3k_2}$ ***

ซึ่งแสดงถึงปริมาณการใช้ x_1 ณ ระดับที่ MP_1 อยู่ในตำแหน่งสูงที่สุด

จากการพิจารณาเปรียบเทียบค่าของ x_1 ณ ระดับที่ AP_1 และ MP_2 อยู่ในตำแหน่งที่สูงที่สุด จะพบว่า

$$\frac{k_1}{2k_2} > \frac{k_1}{3k_2}$$

นั่นคือ เมื่อ AP_1 และ MP_1 ต่างอยู่ในตำแหน่งสูงสุดแล้ว MP_1 จะอยู่ ณ ระดับของการใช้ปัจจัย (x_1) ที่ปริมาณต่ำกว่าของ AP_1 จริง "

ข.ต.พ.

ทำนองเดียวกัน เมื่อ AP_2 และ MP_2 ต่างอยู่ในตำแหน่งสูงสุด ก็จะแสดงให้เห็นจริงได้เช่นเดียวกันว่า MP_2 จะอยู่ ณ ระดับของการใช้ปัจจัย x_2 ที่ปริมาณต่ำกว่า AP_2 ได้
(หมายเหตุ นักศึกษาควรจะได้ลองทำการพิสูจน์ให้เป็นจริงด้วยตนเอง)

โดยสรุปแล้ว ถึงแม้ผลิตผลจะขึ้นอยู่กับการใช้ปัจจัยหลาย ๆ ชนิด ก็ย่อมหมายความว่า เมื่อ AP และ MP ของการใช้ปัจจัยการผลิตชนิดใดชนิดหนึ่ง (x_i) อยู่ในตำแหน่งที่สูงที่สุด แล้ว MP_i จะอยู่ ณ ระดับการใช้ปัจจัย (x_i) ที่ปริมาณต่ำกว่าของ AP_i เช่นกัน

๔) เส้นผลผลิตเท่ากัน (Iso - quant Curve or Iso - product Curve)

เส้นผลผลิตเท่ากัน หมายถึง ทางเดินของจุด ซึ่งแต่ละตำแหน่งแสดงถึงการใช้ปัจจัยการผลิตชนิดต่าง ๆ ในสัดส่วนที่แตกต่างกัน แต่ให้ผลิตผลซึ่งเท่ากัน

โดยคณิตศาสตร์ :

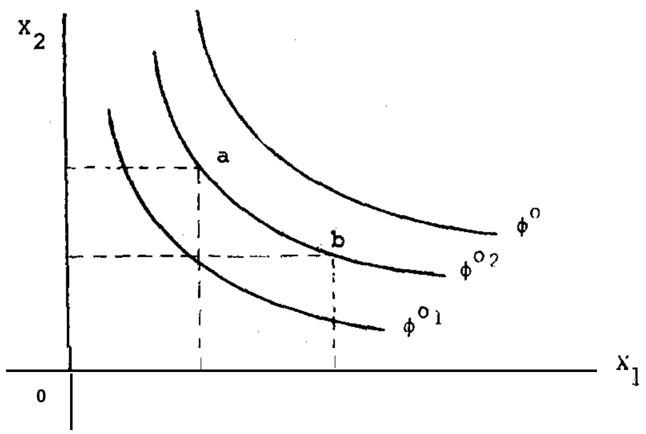
สมมุติว่าการผลิตใช้ปัจจัยการผลิตเพียงสองชนิด

$$\phi^{o} = \phi(x_1, x_2)$$

โดยที่:

ϕ^{o} : phi supper - script zero หมายถึง ผลผลิต ณ ระดับใดระดับหนึ่งซึ่งคงที่ (ϕ^{o} ไม่ใช่ ϕ ยกกำลังศูนย์)

โดยเรขาคณิต :



โดย ϕ^{o1} หมายถึง ผลผลิต ณ ระดับที่ "1" ใด ๆ

จากรูป ตำแหน่ง a และ b บนเส้น ϕ^{o2} แสดงสัดส่วนของการใช้ปัจจัยการผลิต x_1 และ x_2 ต่างกัน แต่ให้ผลิตผล (output) เท่ากับ ϕ^{o2} เท่า ๆ กัน

๖) อัตราการทดแทนทางเทคนิค(Rate of Technical Substitution :RTS)

อัตราการทดแทนทางเทคนิค หมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงการใช้ปัจจัยการผลิตชนิดหนึ่ง (x_1) เพื่อไปทดแทนการเปลี่ยนแปลงของการใช้ปัจจัยการผลิตอีกชนิดหนึ่ง (x_2) ซึ่งการทดแทนของปัจจัยการผลิตนี้ก็เพื่อจะดำรงไว้ซึ่งระดับของผลิตผลที่เท่าเดิมก่อนมีการเปลี่ยนแปลง

ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงของการใช้ปัจจัยการผลิตทั้งสองชนิดจะผกผันกัน กล่าวคือ ถ้าลดการใช้ปัจจัยการผลิตชนิดหนึ่ง (x_2) ลง แต่ก็ต้องการให้ได้ผลิตผลเท่าเดิม ก็จะต้องเพิ่มการใช้ปัจจัยการผลิตอีกชนิดหนึ่ง (x_1) เข้าชดเชยแทนที่เป็นการทดแทนกันและในทางกลับกัน ถ้าเพิ่มการใช้ปัจจัยการผลิตชนิดหนึ่ง (x_2) ก็จะต้องลดการใช้ปัจจัยการผลิตอีกชนิดหนึ่ง (x_1) ลง เป็นการลบล้างกัน เช่นนี้แล้ว อัตราการทดแทนทางเทคนิค ก็คือ ค่าที่แสดงถึงอัตราการใช้ปัจจัยการผลิตแทนกันนั่นเอง

โดยคณิตศาสตร์ :

$$RTS_{12} = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$: Rate of Technical Substitution of x_1 for x_2

ถ้า $\Delta x_1 \to 0$: การ เปลี่ยนแปลงการใช้ปัจจัย x_1 มีน้อยมาก

แล้ว $$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \approx \frac{dx_2}{dx_1}$$

ดังนั้น $$RTS_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1}$$

การหา RTS :

จากแบบสมการการผลิต

$$\phi = \phi(x_1, x_2)$$

ถ้ามีการทดแทนซึ่งกันและกันของการใช้ปัจจัยการผลิต ก็ย่อมทำให้ผลผลิตเปลี่ยนแปลงไป ซึ่งโดยเชิงคณิตศาสตร์ ก็คือ อนุพันธ์รวม (Total Differential) ของ ϕ นั่นเอง

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \cdot dxl + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \cdot dx_2$$

หรือ

$$d\phi = \phi_1 \cdot dxl + \phi_2 \cdot dx_2 \quad : \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \phi_i$$

อย่างไรก็ตามการทดแทนกันของปัจจัยการผลิตดังกล่าวก็เพื่อจะดำรงไว้ซึ่งผลิตผลคงเดิมก่อนการเปลี่ยนแปลง

ดังนั้น $d\phi = 0$ ผลิตผลไม่เปลี่ยนแปลง

หรือ

$$\phi_1 \cdot dx_1 + \phi_2 \cdot dx_2 = 0$$

หรือ $\phi_1 \cdot dx_1 = -(\phi_2 \cdot dx_2)$: ย้ายข้าง

ดังนั้น

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\phi_1}{\phi_2}$$

หรือ

$$RTS_{12} = \frac{\phi_1}{\phi_2}$$

$$= \frac{(MP_1)}{(MP_2)} \quad : \quad MP_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} = \phi_1 \quad \text{และ}$$

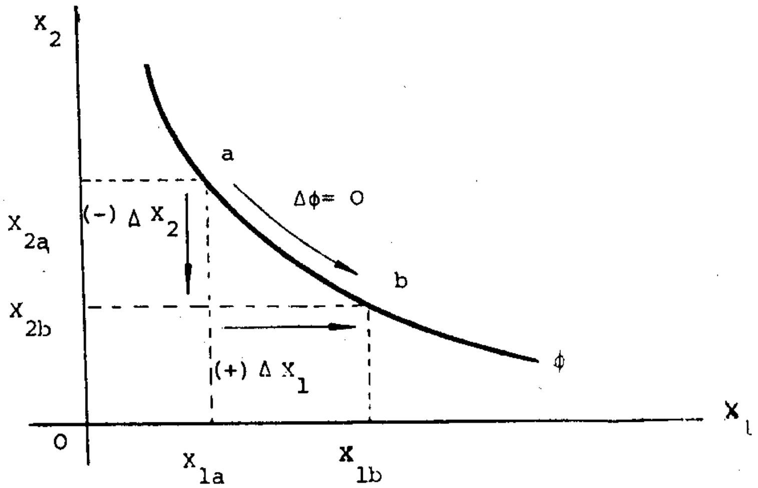
$$MP_2 = \frac{\partial\phi}{\partial x_2} = \phi_2$$

โดยสรุปแล้ว อัตราการทดแทนทางเทคนิคของปัจจัยการผลิต x_1 ที่จะเข้าทดแทนการใช้ปัจจัยการผลิต x_2 (Rate of Technical Substitution of x_1 for x_2) ในเชิงคณิตศาสตร์ ก็คือ

$$RTS_{12} \quad = \quad \frac{dx_2}{dx_1} \quad = \quad \frac{MP_1}{MP_2}$$

อนึ่งอาจจะแสดงการได้มาของอัตราการทดแทนทางเทคนิค โดยวิธีเรขาคณิตได้เช่นกัน ดังนี้

โดยเรขาคณิต :



พิจารณาจากรูปเรขาคณิต :

สมมุติว่าเดิม ทำการผลิตโดยใช้ส่วนผสมของปัจจัยการผลิต ณ ตำแหน่ง "a" โดยใช้ปัจจัยการผลิต x_1 และ x_2 เป็นปริมาณ x_{1a} และ x_{2a} ตามลำดับ ซึ่งทำให้เกิดผลผลิตเท่ากับ " ϕ^o " ต่อมาได้ลดการใช้ปัจจัยการผลิต x_2 ลงเท่ากับ " Δx_2 " กล่าวคือใช้ปัจจัยการผลิต x_2 เพียง x_{2b} ซึ่งปกติแล้วปริมาณผลผลิตจะต้องลดลงด้วย อย่างไรก็ตามถ้าต้องการที่จะดำรงไว้ซึ่งผลผลิต " ϕ^o " เท่าเดิม ก็จะต้องเพิ่มการใช้ปัจจัยการผลิต x_1 มากขึ้น เพื่อเป็นการชดเชยทดแทนกัน ในที่นี้จะต้องเพิ่มการใช้ปัจจัยการผลิต x_1 มากขึ้นอีก เป็นจำนวน Δx_1 หรือใช้ปัจจัยการผลิต x_1 ทั้งหมดเป็น x_{1b} ซึ่งตำแหน่งส่วนผสมการใช้ปัจจัยหลังการเปลี่ยนแปลงนี้ คือ ตำแหน่ง "b" บนเส้นผลิตเท่ากับ (ϕ^o) นั่นเอง

ดังนั้น อัตราการทดแทนทางเทคนิค หรือ อัตราการเปลี่ยนแปลงการใช้ปัจจัยการผลิต x_1 เข้าแทนที่การใช้ปัจจัยการผลิต x_2 ก็คือ อัตราเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงการใช้ปัจจัยการผลิต x_2 ต่อการเปลี่ยนแปลงการใช้ปัจจัยการผลิต x_1 นั่นเอง

กล่าวคือ

$$RTS_{12} = \frac{(-)\ \Delta x_2}{(+)\ \Delta x_1}$$

$$= (-)\ \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

$$\approx -\frac{dx_2}{dx_1}$$

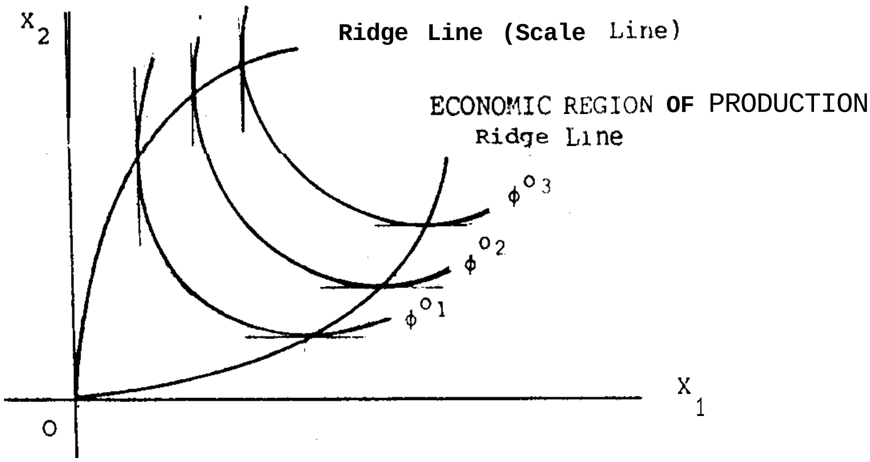
ซึ่งมีลักษณะเช่นเดียวกันกับที่แสดงไว้แล้วในเบื้องต้นโดยเชิงคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตาม การพิจารณาโดยเรขาคณิตนี้นั้น ทำให้เห็นได้ชัดเจนอีกว่าความจริงแล้ว RTS_{12} ก็คือ ค่าลบของค่าความชัน (slope) ของเส้นที่มาสัมผัส (tangent) กับเส้นผลผลิตเท่ากันนั่นเอง ทั้งนี้เพราะค่าความชันของเส้นผลผลิตเท่ากันในแต่ละตำแหน่งก็คือ $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \approx \frac{dx_2}{dx_1}$ นั่นเอง และค่าลบที่อยู่ข้างหน้าค่าความชันนั้นก็เพื่อวัตถุประสงค์ที่จะทำให้ค่าอัตราการทดแทนกันนั้นเป็นบวก (+) เท่านั้น

จากการพิจารณา อัตราการทดแทนทางเทคนิคข้างต้น จนได้ข้อยุติว่า

$$RTS_{12} = -\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)$$

ทำให้สรุปได้ว่า การผลิตที่สมเหตุสมผลนั้น จะต้องเกิดขึ้นในช่วงที่ความชันของเส้นผลผลิตเท่ากันเป็นลบ (-) เท่านั้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ตำแหน่งของการผลิต จะต้องเกิดขึ้นในช่วงที่ การทดแทนกันของปัจจัยการผลิตเป็นไปในทางผกผันกัน ซึ่งช่วงแห่งการผลิตนี้ เรียกกันว่า Economic Region of Production

โดยเรขาคณิต :

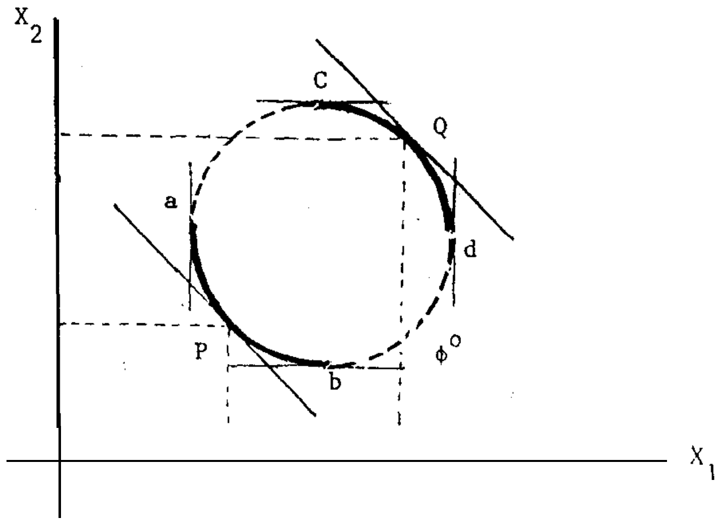


ช่วงแห่งการผลิต (Economic Region of Production) จะอยู่ในกรอบของเส้น Ridge Line หรือ Scale Line (Ridge Line คือทางเดินของจุดซึ่งแต่ละตำแหน่งแสดงถึงค่าความชันของเส้นผลผลิตเท่ากันแต่ละเส้นเท่ากับศูนย์ "๐" หรือ อนันต์ "∞")

๗) เส้นผลิตผลเท่ากันโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง (Convexity of Iso-quant)

จากการศึกษาเกี่ยวกับ อัตราการทดแทนทางเทคนิค ทำให้ทราบว่า การผลิตจะต้องเกิดขึ้นในกรอบของเส้น Ridge Line กล่าวคือ เป็นช่วงที่ความชันของเส้นผลผลิตเท่ากันมีค่าเป็นลบ (-) แต่ถ้าพิจารณาโดยทั่ว ๆ ไปแล้วจะพบว่าช่วงที่เส้นผลผลิตเท่ากันมีค่าความชันเป็นลบอาจจะหมายถึง เส้นผลผลิตเท่ากันโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง (convex to the origin) หรือหมายถึงเส้นผลผลิตเท่ากันโค้งออกจากจุดศูนย์กลาง (coneave from the origin) ก็ได้ ซึ่งจะเห็นได้จากรูปเรขาคณิตดังต่อไปนี้

โดยรูปเรขาคณิต :



จากรูปเรขาคณิตจะพบว่าเส้นผลผลิตเท่ากัน (ϕ^o) เฉพาะช่วง ab และ cd เท่านั้นที่มีค่าความชันเป็นลบ นั่นคือ เฉพาะช่วงดังกล่าวเท่านั้นที่อาจจะเป็นช่วงแห่งการผลิตตามเงื่อนไขที่ได้จากการพิจารณาอัตราการทดแทนทางเทคนิค (RTS)

อย่างไรก็ตามโดยหลักเหตุและผลแล้วจะพบว่า ช่วงแห่งการผลิตของเส้นผลผลิตเท่ากันจะต้องหมายถึงช่วง ab เท่านั้น สำหรับช่วง cd ถึงแม้จะแสดงหลักเหตุและผลว่าเป็นช่วงของการทดแทนที่ผกผันกันก็จริง แต่เป็นช่วงที่จะต้องใช้ปัจจัยการผลิตทั้งสองชนิดมากกว่าการใช้ปัจจัยการผลิตของช่วง ab ซึ่งการพิจารณาอาจเป็นจริงได้จากการเปรียบเทียบตำแหน่งการผลิต p ในช่วง ab และ ตำแหน่งการผลิต Q ในช่วง cd ซึ่งให้ผลผลิตเท่า ๆ กัน แต่ช่วงการผลิต cd จะต้องใช้ปัจจัยการผลิตมากกว่า ดังนั้นจึงไม่น่าจะสมเหตุผลที่ผู้ผลิตใด ๆ จะทำการผลิตในช่วง cd เลย หากแต่จะทำการผลิตเฉพาะในช่วง ab เท่านั้น เช่นนี้แล้ว เส้นผลิตผลเท่ากันที่จะแสดงช่วงแห่งการผลิตที่สมเหตุสมผลก็จะต้องเป็นช่วงที่เส้นผลิตผลเท่ากันโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง (convex to the origin) เท่านั้น

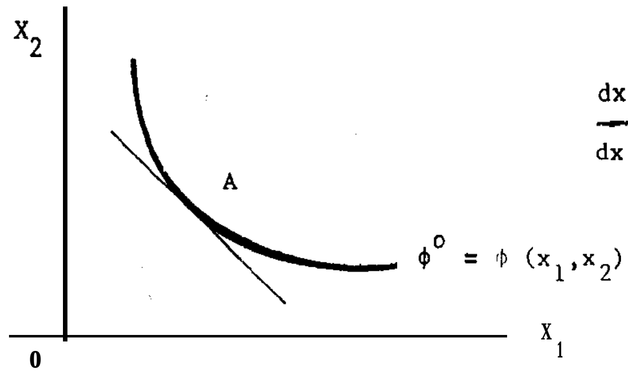
การวิเคราะห์ข้างต้นอาจจะแสดงให้เห็นโดยชัดเจนโดยนัยของเชิงคณิตศาสตร์ได้โดยง่ายว่า เส้นผลิตผลเท่ากันจะต้องโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง ดังต่อไปนี้

โดยคณิตศาสตร์ :

แนวหลักการพิจารณา : ถ้าเส้นผลิตผลเท่ากันจะเป็นเส้นโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลางจริงแล้วละก็ เส้นผลิตผลเท่ากันจะต้องมีลักษณะคุณสมบัติดังต่อไปนี้

ก) ความชันของเส้นที่มาสัมผัสกับเส้นผลิตผลเท่ากันนั้นจะต้องมีค่าน้อยกว่าศูนย์หรือมีค่าเป็นลบ (-) ซึ่งแสดงความผกผันของการทดแทนกันของปัจจัยการผลิต

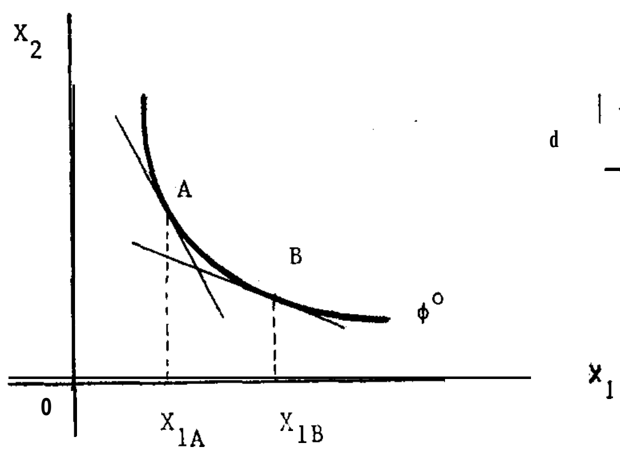
รูปคณิตศาสตร์ :



$$\frac{dx_2}{dx_1} < 0$$

ข) การเปลี่ยนแปลงของค่าความชันของเส้นที่มาสัมผัสกับเส้นผลิตผลเท่ากันจะสอดคล้องสัมพันธ์โดยตรงไปในทางเดียวกันกับการเปลี่ยนแปลงของการทดแทนปัจจัยการผลิต

รูปคณิตศาสต



$$\frac{d\left|\frac{dx_2}{dx_1}\right|}{dx_1} > 0$$

จากรูปจะเห็นว่า เมื่อเปลี่ยนตำแหน่งของเส้นที่มาสัมผัสกับเส้นผลิตผลเท่ากัน จากจุด A มาอยู่ ณ จุด B ซึ่งแสดงถึงการเพิ่มปัจจัยการผลิต x_1 เข้าแทนที่ปัจจัยการผลิต x_2 มากหน่วยขึ้น ค่าความชันของเส้นที่มาสัมผัสกับเส้นผลผลิตเท่ากันก็จะมีค่าเพิ่มขึ้น จากจุด A ไปสู่จุด B (ติดลบน้อย) ด้วยเช่นกัน

โดยสรุปแล้วจะเห็นได้ว่า ถ้าเส้นผลิตผลเท่ากันโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลางจริงแล้วละก็ เส้นผลิตผลเท่ากันจะต้องมีคุณสมบัติในเชิงคณิตศาสตร์ดังนี้

หลักการ :

ก) $\frac{dx_2}{dx_1} < 0$

ข) $\frac{d(\frac{dx_2}{dx_1})}{dx_1} > 0$

หรือ $\frac{d^2x_2}{dx_1^2} > 0$

พิจารณาหลักการ

ก) จากแบบสมการการผลิตของเส้นผลิตผลเท่ากัน

$$\phi^o = \phi(x_1, x_2)$$

อนุพันธ์รวม $$d\phi^o = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \cdot dx_2$$

$$= \phi_1 \cdot dx_1 + \phi_2 \cdot dx_2 \quad : \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \phi_i$$

แต่การเปลี่ยนแปลงการใช้ปัจจัยการผลิตนั้นยังคงอยู่บนเส้นผลิตผลเท่ากับเส้นเดิม ($d\phi^{o} = 0$)

$$\therefore \quad d\phi^{o} = \phi_1 . dx_1 + \phi_2 . dx_2 = 0$$

หรือ $\phi_1 . dx_1 + \phi_2 . dx_2 = 0$

ดังนั้น $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\phi_1}{\phi_2}$

แต่ $\phi_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = MP_i > 0$ เพราะอยู่ในช่วงการผลิต

เช่นนี้แล้ว $\frac{dx_2}{}$

นั่นคือ $\frac{dx_2}{dx_1} < 0$: เป็นลบ (-) //

ข) จากความชันของเส้นผลิตผลเท่ากัน

ความชันของเส้นแสดงผลิตผลเท่ากัน $= \frac{dx_2}{dx_1}$

เมื่อใช้ x_1 เข้าแทนที่ x_2 มากหน่วยขึ้น จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชัน

$$\frac{d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{d\ x_1} = \frac{d\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)}{d\ x_1} \text{ : แทนค่า } \frac{dx_2}{dx_1} - \frac{\phi_1}{\text{i-2}}$$

$$= -\frac{d\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)}{d\ x_1}$$

$$= -\left\{\frac{\phi_2 \frac{d\phi_1}{dx_1} - \phi_1 \frac{d\phi_2}{dx_1}}{\phi_2^2}\right\} \quad \text{: อนุพันธ์ของผลหาร}$$