$$= f_{xx}dx^2 + f_{xy}dydx + f_{yx}dxdy + f_{yy}dy^2$$

$$= f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$$

$[dx^2 = (dx^2)$ และ $dy^2 = (dy)^2]$

$[f_{xy} = f_{yx}]$

ถ้าเราสมมติให้

(4.2) ♦ ● ♎☒✉ $v \equiv dy$ ✉ $a \equiv f_{xx}$, $b \equiv f_{yy}$

$h \equiv f_{xy}$ $[= f_{yx}]$

เพราะฉะนั้นเราเขียน $d^2z = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$ ให้อยู่ในรูป quadratic form q

(4.3) $$q = au^2 + 2huv + bv^2$$

ด้วยวิธีการของ completing the square เราเขียน (4.2) ได้ดังนี้

$$q = a(u^2 + \frac{2hv}{a}u + \frac{bv^2}{a}$$

$$= a(u^2 + \frac{2hv}{a}u + \frac{h^2v^2}{a^2} + \frac{bv^2}{a} - \frac{h^2v^2}{a^2}$$

$$= a(u^2 + \frac{2hv}{a}u + \frac{h^2v^2}{a^2}) + (b - \frac{h^2}{a})v^2$$

$$= a(u + \frac{h}{a}v)^2 + \frac{ab - h^2}{a}(v^2)$$

เนื่องจาก u และ v อยู่ในรูปของกำลังสอง (square) เพราะฉะนั้น q จะเป็นลบ(< 0) หรือเป็นบวก(> 0) ขึ้นอยู่กับค่าของ a,b และ h ซึ่งพิจารณาได้ดังนี้

(4.4) q เป็น $\left\{\begin{array}{l}\text{postive definite} \\ \\ \text{negative definite}\end{array}\right\}$ ถ้า $\left\{\begin{array}{l}a > 0 \\ \\ a < 0\end{array}\right\}$ และ $ab - h^2 > 0$

จะเห็นได้ว่า ไม่ว่า q จะเป็น positive definite หรือ negative definite $ab-h^2$ จะต้องเป็นบวก (> 0) เสมอ เพราะฉะนั้น a และ b จะต้องมีเครื่องหมายเหมือนกัน

เพราะฉะนั้นจึงสรุปได้ว่า (ในรูปของ 4.2)

$$(4.5) \qquad d^2z \begin{cases} >0 & \text{ถ้า } f_{xx}>0, \quad f_{yy}>0 \\ <0 & \text{ถ้า } f_{xx}<0, \quad f_{yy}<0 \end{cases} \qquad \text{และ } f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$$

Condition (4.4) สำหรับ maximum หรือ minimum ของ function สามารถเขียนในรูปของ Determinant ได้เช่นกัน ซึ่งเรา derive ได้ดังนี้ คือ จาก (4.2) เราสามารถเขียนเสียใหม่ได้คือ

$$q = a(u^2) + h(u.v)$$

$$+ h(vu) + b(v^2)$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ matrix multiplication ได้คือ

$$q = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Determinant ของ 2×2 coefficient matrix $D \equiv \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$ จะเพียงพอที่จะบอกให้เราทราบว่า extreme value ของ z เป็น maximum หรือ minimum ทั้ง condition ดังนี้ (ในรูปของ(4.2))

$$d_z^2 \text{ เป็น} \begin{cases} \text{positive diffinite } (z \text{ minimum}) \\ \text{negative difinite } (z \text{ maximum}) \end{cases} \text{ ถ้า } \begin{cases} |H_1| > 0 \\ |H_1| < 0 \end{cases} \text{ และ } H_2 > 0$$

ซึ่ง $|H_1|$ เรียกว่า First - order Hessian Determinant ซึ่งหมายถึง determinant $|a|$ หรือ $|f_{xx}|$ ซึ่งเป็น first principal minor ของ determinant D และ $_IH_{2I}$ เรียกว่า Second - order Hessian Determinant. ซึ่งหมายถึง

$$\text{determinant} \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง 1) จงหาว่า $q = 5u^2 + 3uv + 2v^2$ เป็น positive definite หรือ negative definite

จากฟังก์ชั่นที่กำหนดให้ discriminant ของ q คือ $\begin{vmatrix} 5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{vmatrix}$

ซึ่งมี principal minors คือ $5 > 0$ และ $\begin{vmatrix} 5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{vmatrix} = 7.75 > 0$

เพราะฉะนั้น q เป็น positive definite

2) กำหนด function $z = f(x,y)$ ให้ และณ จุดหนึ่งของ function $f_{xx} = -2$, $f_{xy} = 1$ และ $f_{yy} = -1$ จงหาว่า ณ จุดนั้น d^2z เป็น positive definite หรือ negative definite

จาก function ที่กำหนดให้ descriminant ของ d^2z คือ

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

ซึ่งมี prinicipal minors คือ

$$|H_1| = -2 < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

เพราะฉะนั้น d^2z เป็น negative definite

5 Extreme Values of Function. of Three Variables

สมมติให้ objective function ประกอบด้วยตัวแปรอิสระ 3 ตัว เช่น

$$z = f(x_1, x_2, x_3)$$

เมื่อ take total differential เข้ากับ objective function เราจะได้ดังนี้

(4.6) $$dz = f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3$$

เราเคยพิจารณาในหัวข้อก่อนแล้วว่า function จะสูงสุด (maximum) หรือต่ำสุด (minimum) ก็ต่อเมื่อ $dz = 0$ เพราะฉะนั้นเราก็ต้องพิจารณา (4.6) ว่า dz จะเป็นศูนย์ได้ภายใต้เงื่อนไขอะไรบ้าง จากการพิจารณา (4.6) เราพบว่า dx_1, dx_2 และ dx_3 ไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์เพราะมันแสดงถึงค่าเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอิสระ x_1, x_2, x_3 ซึ่งค่าเปลี่ยนแปลงนี้อาจน้อยมากก็ได้ (infinitesimal variations) เพราะฉะนั้น dz จะเท่ากับศูนย์ได้ก็ต่อเมื่อ f_1, f_2 และ f_3 ต้องเท่ากับศูนย์ซึ่งเราเรียกว่า first order condition for extremum

สำหรับกรณีที่ objective function ถูกกำหนดให้อยู่ในรูปของ implicit function เช่น

(4.7) $$F(z,x_1,x_2,x_3) = 0$$

เราสามารถหา partial derivative ได้คือ

$$f_i \equiv \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad \frac{-\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z} \qquad (i = 1,2,3)$$

เพื่อที่จะให้เป็นไปตาม first-order condition of extremum เราต้อง set ให้ $f_i = 0$ ซึ่งเราพบว่า f_i (คือ f_1, f_2, f_3) จะเท่ากับศูนย์ก็ต่อเมื่อ $\partial F/\partial x_i = 0$

จาก first-order condition เราสามารถคำนวณหา critical values ของ objective function ได้ การที่จะทราบได้ว่า critical values ที่เราคำนวณได้นั้นเป็น maximum หรือ minimum เราต้องเอา critical values นั้นไปแทนค่าลงใน d^2z และถ้าเราพิจารณาพบว่า d^2z นั้นเป็น negative definite, critical values ที่เราคำนวณได้นั้นก็จะเป็น maximum value of the function แต่ถ้าเราพิจารณาพบว่า d^2z นั้นเป็น positive definite, critical values ที่คำนวณได้ก็จะเป็น minimum value of the function

การพิจารณาว่า d^2z จะเป็น positive หรือ negative definite เราทำได้ดังนี้ ประการแรกทีเดียวนั้นเราต้อง take total differential เข้ากับ (4.6) ซึ่งจะได้

ดังนี้

(4.8) $$d^2z = d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial(dz)}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial(dz)}{\partial x_3}dx_3$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3)dx_1$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}(f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3)dx_2$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_3}(f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3)dx_3$$

$$= f_{11}dx_1^2 + f_{12}dx_1dx_2 + f_{13}dx_1dx_3$$

$$+ f_{21}dx_2dx_1 + f_{22}dx_2^2 + f_{23}dx_2dx_3$$

$$+ f_{31}dx_3dx_1 + f_{32}dx_3dx_2 + f_{33}dx_3^2$$

(4.9) ถ้าเราสมมติให้ $a_{11} \equiv f_{11}$, $a_{12} \equiv f_{12}$ $(= f_{21})$, $a_{13} \equiv f_{13}$ $(= f_{31})$

$a_{22} \equiv f_{22}$, $a_{23} \equiv f_{23}$ $(= f_{32})$, $a_{33} \equiv f_{33}$

$u_1 \equiv dx_1$, $u_2 \equiv dx_2$, $u_3 \equiv dx_3$ และ $q \equiv d^2z$

เพราะฉะนั้น (4.8) สามารถเขียนเสียใหม่ได้คือ

(4.10) $$q = a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2$$

ซึ่งเป็น three - variable quadratic form และด้วยวิธีการ completing the square (4.10) สามารถเขียนได้เป็น

(4.11) $$q = a_{11}\left(u_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}u_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}u_3\right)^2$$

$$+\ \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}}{a_{11}}\left(u_2 + \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}}u_3\right)^2$$

$$+\ \frac{a_{11}a_{22}a_{23} - a_{11}a_{23} - a_{22}a_{13} - a_{33}a_{12} + 2a_{12}a_{13}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}}(u_3)^2$$

จาก (4.11) เราพิจารณาพบว่า **necessary** - and - sufficient condition สำหรับ **positive** definite ของ q มีดังนี้

1) $a_{11} > 0$ [that the **first coeficient** be positive]

2) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ [that the **second** coefficient be **positive**]
($a_{11} > 0$ already)

3) the numerator of the third coefficient>0
($a_{11}a_{22} - a_{12} > 0$ **already**)

ซึ่งมีความหมายเท่ากับว่า all three principal minor ของ (4.10) เป็นบวก นั่นคือ

$$|D_1| = a_{11} > 0 \qquad |D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{และ}$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$$

ในทางตรงกันข้าม จากการพิจารณา(4.11) เราพบว่า necessary - **and sufficient** condition สำหรับ **negative** definite ของ q มีดังนี้

1) $a_{11} < 0$ [that the **first** coefficient be negative]

2) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ [that the second coefficient be negative]
($a_{11} < 0$ already)

3) the numerator of the third **coefficient** < 0
($a_{11}a_{22} - a_{12} >$ **already**)

ซึ่ง condition นี้มีความหมายเหมือนกันกับการที่ principal minor ของ (4.10) มีเครื่องหมายสลับกันดังนี้ $|D_1| < 0$, $|D_2| > 0$ และ $|D_3| < 0$

ดังนั้นโดยอาศัย (4.9) เราสามารถสรุปหลักการวิเคราะห์ second-order condition เพื่อตัดสินว่า extremum value ของ z เป็น maximum หรือ minimum ได้ดังนี้

$$d^2z \text{ จะเป็น } \left\{ \begin{array}{l} \text{positive definite } (z \text{ minimum}) \\ \\ \text{negative definite } (z \text{ maximum}) \end{array} \right\} \text{ ถ้า } \left\{ \begin{array}{l} |H_1| > 0;\ |H_2| > 0;\ |H_3| > 0 \\ |H_1| < 0;\ |H_2| > 0;\ |H_3| < 0 \end{array} \right.$$

ซึ่ง $|H_1|$, $|H_2|$ และ $|H_3|$ คือ principal minor of Hessian determinant

จาก (4.8) Hessian determinant คือ

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

เพราะฉะนั้น

$$|H_1| = f_{11} \quad |H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \quad \text{และ} \quad |H_3| = H$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา extremum value (s) ของ

$$z = 2x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1x_3 + x_3^3 + 2$$

ก่อนอื่นเราต้องพิจารณาหา Critical Value ของ z จาก necessary condition for extremum เสียก่อน นั่นคือเราต้อง set ให้ first partial derivative เท่ากับศูนย์ เราได้ว่า

$$f_1 = 4x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$f_2 = x_1 + 8x_2 = 0$$

$$f_3 = x_1 + 2x_3 = 0$$

เนื่องจากทั้งสามสมการนี้เป็น homogeneous linear-equation system และเนื่องจากทั้งสามสมการเป็นอิสระต่อกัน (independent) (นั่นคือ determinant of the coefficient maxtrix does not vanish) เพราะฉะนั้น solution สำหรับ equation system นี้จึงมีค่าเดียวคือ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ดังนั้นเมื่อเอา x_1, x_2, x_3 ไปแทนค่าลงในสมการที่กำหนดให้เราจะได้ Critical Value ของ z ซึ่งเท่ากับ 2 (นั่นคือ $\bar{z} = 2$) ประการต่อไปเราต้องพิจารณาว่า critical value ของ z นั้นเป็น maximum หรือ minimum ซึ่งเราพิจารณาจาก Second-Order Condition (หรือ sufficient condition) ได้ดังนี้

จาก function ที่กำหนดให้เราหา Hessian determinant ได้คือ

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

ซึ่งมี principal minors ดังนี้

$$|H_1| = 4 \;,\; |H_2| = 31 \;,\; |H_3| = 54$$

ซึ่งปรากฏว่า principal minors are all positive เพราะฉะนั้นจึงสรุปได้ว่า Critical value($\bar{z} = 2$) เป็น minimum value of z

6 Extremum Values of Function of n - Variables

ในกรณีที่ objective function ประกอบด้วย choice variable จำนวน n ตัว การพิจารณา maximum หรือ minimum ของ function ก็ทำโดยอาศัยหลักคล้ายกันกับกรณีที่ function ประกอบด้วย choice variable เพียง 1,2 หรือ 3 ตัว นั่นคือ เราต้องพิจารณา

necessary condition(first-order condition) และ sufficient condition (second-order condition) ของ function ที่กำหนดให้

สมมติให้ function คือ $z = f(x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n)$

จาก function ที่กำหนดให้นั้นเราสามารถหา total differential ได้ดังนี้

$$(4.12) \qquad dz = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n dx_n$$

ซึ่งเพื่อให้เป็นไปตาม necessary condition($dz = 0$) first-order partial derivative ($f_1 . f_2 \ldots, f_n$) จะต้องเท่ากับศูนย์ (zero)

สำหรับ sufficient condition นั้นเรา take total differential เข้ากับ (4.12) เราจะได้ d^2z ซึ่งอยู่ในรูปของ n - variables quadratic form และจะมี Hessian determinant คือ

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \ldots\ldots f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} \ldots\ldots f_{2n} \\ f_{n1} & f_{n2} \ldots\ldots f_{nn} \end{vmatrix}$$

ถ้า n principal minors มีเครื่องหมายเป็นบวกทั้งหมด critical, value of z จะเป็น minimum แต่ถ้า n principal minors มีเครื่องหมายสลับกันโดยที่ first principal minor มีเครื่องหมายเป็นลบ critical value of z นั้นก็จะเป็น maximum

ดังนั้นเราจึงสรุป conditions สำหรับ maximum หรือ minimum ของ function ได้ดังตารางที่ 4.1 ข้างล่างนี้

ตารางที่ 4.1

Conditions for extremum: $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Condition	Maximum	Minimum
First - order	$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$ (or $dz = 0$)	$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$ (or $dz = 0$)
Second - order	$\lvert H_1\rvert < 0$; $\lvert H_2\rvert > 0$; $\lvert H_3\rvert < 0$; $\lvert H_4\rvert > 0$; ... (or d^2z negative definite)	$\lvert H_1\rvert, \lvert H_2\rvert, \ldots, \lvert H_n\rvert > 0$ (or d^2z positive definite)

7 การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดกรณีที่มีสมการจำกัดขอบเขต

(Extreme Values of Functions with Constraints)

7.1 การหา critical value (First - order Condition)

A. Substitution Method

สมมติว่า Objective function ที่กำหนดให้ คือ

(4.13) $u = x_1 x_2 + 2x_1$

และ Constraint ที่กำหนดให้ คือ

(4.14) $4x_1 + 2x_2 = 60$ หรือ $4x_1 + 2x_2 - 60 = 0$

จาก (4.14) เราทราบว่า $x_2 = \dfrac{60 - 4x_1}{2} = 30 - 2x_1$

แทนค่า x_2 ลงใน (4.13) จะได้ $u = x_1(30 - 2x_1) + 2x_1$

$$= 32x_1 - 2x_1^2$$

ด้วยวิธีการ การหา critical value ดังกล่าวมาแล้วข้างต้นเราทำได้โดย set ให้ partial derivative เท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 32 - 4x_1 = 0$$

เพราะฉะนั้น $x_1 = a$

แทนค่า x_1 ลงใน (4.14) จะได้ว่า $x_2 = 30 - 2(8) = 14$

แทนค่า x_1 และ x_2 ลงใน (4.13) จะได้ critical value $U = 128$

และเพราะว่า $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1} = -4 < 0$ เพราะฉะนั้น critical value $U = 128$ จึงเป็น constrainted maximum of U

B. <u>Lagrange - multiplier **Method**</u>

จุดประสงค์อันสำคัญของ **Lagrange** - multiplier method ก็คือการดัดแปลง **constrainted-extremum** problem ให้อยู่ในรูป (form) ที่จะทำให้ first-order condition ที่ใช้กับ free - extremum problem สามารถนำมาใช้ได้

จาก objective function และ **constrainted** function ที่กำหนดให้ใน section A คือ $U = x_1 x_2 + 2x_1$ และ $4x_1 + 2x_2 - 60 = 0$ ตามลำดับเรา สามารถเขียนเสียใหม่ให้อยู่ในรูปที่เรียกว่า augmented objective function ได้ดังนี้

(4.15) $Z = x_1 x_2 + 2x, + \lambda$ '44 + 2x2 - 60)

λ (the Greek **lambda**) หมายถึง undetermined number ซึ่งเรียกว่า **Lagrange** **(undetermined)multiplier** ถ้าเราสามารถทำให้เชื่อได้แน่ว่า $4x_1 + 2x_2 - 60 = 0$ จริง Z ก็จะเท่ากับ U ไม่ว่า จะมีค่าเป็นเท่าใดก็ตาม นั่นคือ เท่ากับว่าเราสามารถดัดแปลง (**convert**) constrainted **function** U ให้อยู่ในรูปของ free - function Z เราสามารถใช้วิธีการหา critical value ของ free-function ดังได้กล่าวมาแล้วใน section ก่อน ๆ มาใช้หา critical value ของ Z ได้เช่นเดียวกัน

กลวิธีในการที่จะทำให้จำนวนในวงเล็บของ (4.15) เท่ากับศูนย์ได้ ก็คือ การที่เรากำหนดให้ λ เป็นเสมือนตัวแปรอีกตัวหนึ่งแล้วนำวิธีการ first - order condition for free extremum มาใช้ก็จะได้ชุดของ simultaneous equations ดังนี้

$$Z_1 \ (\equiv \partial Z/\partial x_1) = x_2 + 2 + 4\lambda = 0$$

$$\text{(4.16)} \qquad Z_2 \ (\equiv \partial Z/\partial x_2) = x_1 + 2\lambda = 0$$

$$Z_\lambda \ (\equiv \partial Z/\partial \lambda) = 4x_2 + 2x_2 - 60 = 0$$

ซึ่ง Z_λ จะเป็นหลักประกันได้ว่า extreme value ที่จะคำนวณได้เป็นไปตามเงื่อนไขของ constraint ที่กำหนดให้

จาก (4.16) เราสามารถ solve solutions ได้ดังนี้

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 14 \quad \text{และ} \quad \lambda = -4$$

เมื่อแทนค่า x_1 , x_2 และ λ ลงใน (4.15) เราจะได้ $Z = 128$ ซึ่งสังเกตเห็นได้ว่า x_1 , x_2 และ Z ในที่นี้มีค่าเท่ากันกับ x_1 , x_2 และ U ใน section A ตามลำดับ

B.1 Generalization

วิธีการของ Lagrange - multiplier method สามารถเขียนในรูปทั่ว ๆ ไปได้ดังต่อไปนี้

สมมติว่า Objective function ที่กำหนดให้คือ

$$\text{(4.17)} \qquad z = f(x,y)$$

และ constraint ที่กำหนดให้ คือ

$$\text{(4.18)} \qquad g(x,y) = 0$$

เราสามารถเขียน augmented objective function ได้คือ

$$\text{(4.19)} \qquad Z = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

เงื่อนไขที่จำเป็น (necessary condition) สำหรับการหา critical value ของ Z ก็คือ

$$Z_x = f_x + \lambda g_x = 0$$

(4.19)
$$Z_y = f_y + \lambda g_y = 0$$

$$Z_\lambda = g(x,y) \equiv 0$$

เนื่องจากสมการที่3 ของ **(4.19)** ก็คือ **constraint (4.16)** นั่นเอง เพราะฉะนั้นจึงเป็นหลักประกันได้ว่า critical **value** of **augmeted function** Z เป็นไปตามเงื่อนไขของ constraint ของ function Z เนื่องจากเป็นที่แน่ใจได้ว่า $\lambda g(x,y) \equiv 0$ เพราะฉะนั้น critical value ของ Z ใน (4.19) จึงเท่ากับ critical **value**ของ Z ใน (4.17) ภายใต้ข้อจำกัด (4.18)

B.2 n - Variable and Multiconstraint Cases

สมมติว่า **objective** function คือ

(4.20) $z = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$

และ **constraint** ที่กำหนดให้ คือ

(4.21) $g(x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n) = 0$

ดังนั้นเราสามารถเขียน **augmented** function ได้คือ

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) + g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ซึ่งมีสมการใน first-order condition จำนวน (n + 1) สมการดังนี้

$$Z_1 = f_1 + \lambda g_1 = 0$$

$$Z_2 = f_2 + \lambda g_2 = 0$$

....

$$Z_n = f_n + \lambda g_n = 0$$

$$Z_\lambda = g(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \equiv 0$$

สมการสุดท้าย คือ $Z_\lambda = 0$ จะเป็นหลักประกันว่า critical value ของ Z

เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดให้

ในกรณีที่กำหนดให้มี constraint function มากกว่าหนึ่ง function เรายังคงใช้วิธีการ Lagrange-multiplier method ได้เช่นกัน เป็นแต่เพียงเราเพิ่ม multiplier ให้มากตัวขึ้นตามจำนวนของ constraint ที่เพิ่มขึ้นเท่านั้นเอง

สมมติว่า objective function ที่กำหนดให้คือ (4.20) และ constraint ที่กำหนดให้คือ (4.21) และ (4.22)

$$(4.22) \qquad h(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0$$

เราสามารถเขียน augmented function ได้ดังนี้

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \mu h(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

ซึ่งใน first-order condition จะมีจำนวนสมการทั้งหมด (n + 2) สมการ คือ

$$Z_i = f_i + \lambda g_i + \mu h_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$Z_\lambda = g(x_1 x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$Z_\mu = h(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

ซึ่ง เราสามารถ solve หาค่าของ x_i, λ และ μ ได้ เมื่อนำค่าเหล่านี้ไปแทนค่าลงใน augmented function ก็จะได้ constraint critical value ตามต้องการ

C. Total - differential Approach

สมมติให้ objective function คือ

$$z = f(x, y)$$

ในกรณีของ free extremum analysis เราได้กล่าวมาแล้วใน section (4.5) ว่า necessary condition คือ

$$(4.23) \qquad dz = f_x dx + f_y dy = 0$$

ซึ่ง dx และ dy จะมีค่า เป็นอะไรก็ได้นอกจากศูนย์ (arbitrary variations)

สำหรับกรณีของ constrainted extremum analysis, necessary condition (4.23) ยังคงใช้ได้อยู่แต่ dx และ dy จะไม่สามารถแปรค่าได้อย่างอิสระเหมือนกับกรณีแรก เพราะว่าในกรณีหลังนี้มี constrainted function เข้ามาเกี่ยวข้องด้วยหรือพูดอีกอย่างหนึ่งก็คือ dx และ dy สามารถแปรค่าได้อย่างไม่เป็นอิสระต่อกันและอยู่ในขอบเขตของ constrainted function ที่กำหนดให้

สมมติว่า constrainted function ที่กำหนดให้คือ $g(x,y) = 0$ ดังนั้น

$$(4.24) \qquad dg = g_x dx + g_y dy = 0$$

เพราะฉะนั้น dx และ dy ใน (4.23) จะถูก constraint โดย (4.24)

necessary condition สำหรับ constrainted extremum ในกรณีนี้ก็คือ $da = 0$ (4.23) subject to $dg = 0$ (4.24) จากการ solve หาค่า dy จาก (4.24) แล้วเอาไปแทนค่าใน (4.23) เราจะได้ว่า

$$(4.25) \qquad \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}$$

เพราะฉะนั้น (4.25) จึงเป็น necessary condition for constrainted extremum จาก condition (4.25) รวมกับ $g(x,y) = 0$ เราสามารถ solve หา critical numbers X และ Y ได้

7.2 Second - order Condition

A. Second - order Total Differential

เราได้กล่าวแล้วว่าในกรณีที่มี constraint เช่นในกรณีของ (4.24) dx และ dy มิสามารถมีค่าอะไรก็ได้พร้อมกันทั้งสองตัว (dx and dy no longer are both arbitrary) แต่จะเป็นว่าเมื่อกำหนดค่าของตัวใดตัวหนึ่งให้อีกตัวหนึ่งจะต้องมีค่าอย่างไรขึ้นอยู่กับค่าที่กำหนดให้แก่ตัวแรก เช่น ถ้าเรากำหนด dx เป็น arbitrary variable dy ก็ต้องเป็น dependent variable จาก (4.24) เราจะได้ว่า

$$dy = (-g_x/g_y)\,dx$$

คือ dy จะมีค่าเป็นเท่าใดขึ้นอยู่กับค่าของ dx ที่กำหนดให้

ถ้าเรากำหนดให้ dy เป็น variable (นั่นคือกำหนดให้ dx เป็น constant) เมื่อเรา take total differential เข้ากับ (4.23) เราจะได้ d^2z ดังนี้

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}dy$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(f_x dx + f_y dy)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x\,dx + f_y dy)\,dy$$

$$= \left[f_{xx}dx + \left(f_{xy}dy + f_y\frac{\partial dy}{\partial x}\right)\right]dx + \left[f_{yx}dx + \left(f_{yy}dy + f_y\frac{\partial dy}{\partial y}\right)\right]dy$$

$$= f_{xx}dx^2 + f_{xy}dy\,dx + f_y\frac{\partial(dy)}{\partial x}dx + f_{yx}dx\,dy + f_{yy}dy^2 + f_y\frac{\partial(dy)}{\partial y}dy$$

เนื่องจากเทอมที่ 3 กับเทอมที่ 6 รวมกันได้ดังนี้

$$f_y\left[\frac{\partial(dy)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dy)}{\partial y}dy\right] = f_y d(dy) = f_y d^2y$$

เพราะฉะนั้น d^2z ที่ต้องการคือ

$$(4.26)\qquad d^2z = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}\,dxdy + f_{yy}dy^2 + f_y d^2y$$

เนื่องจาก constraint ที่กำหนดให้คือ $g(x,y) = 0$ เพราะฉะนั้น $dg = 0$ และ $d^2g = d(dg) = 0$ ด้วยวิธีการเดียวกันกับการหา(4.26) เราได้ d^2g ดังนี้

$$(4.27)\qquad (d^2g =)\ g_{xx}dx^2 + 2g_{xy}\,dxdy + g_{yy}dy^2 + g_y d^2y = 0$$

Solve (4.27) เพื่อหา d^2y แล้วแทนค่า d^2y ลงใน (4.26) เราจะได้ d^2z อยู่ในรูปของ quadratic form ดังนี้

$$d^2z = \left(f_{xx} - \frac{f_y}{g_y} g_{xx}\right) dx^2 + 2\left(f_{xy} - \frac{f_y}{g_y} g_{xy}\right) dxdy$$

$$+ \left(f_{yy} - \frac{f_y}{g_y} g_{yy}\right) dy^2$$

แต่ จาก (4.19) เราสามารถหาได้ว่า $\frac{f_y}{g_y} \doteq -\lambda$

เพราะฉะนั้น $d^2z = (f_{xx} + \lambda g_{xx}) dx^2 + 2 (f_{xy} + \lambda g_{xy}) dxdy + (f_{yy} + \lambda g_{yy}) dy^2$

ถ้าเราหา second partial derivatives จาก (4.19) เราจะได้ดังนี้

$$Z_{xx} = f_{xx} + \lambda g_{xx},\ Z_{xy} = f_{xy} + \lambda g_{xy} = Z_{yx},\ Z_{yy} = f_{yy} + \lambda g_{yy}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีค่าเท่ากับ coeffient ในวงเล็บต่าง ๆ ในสมการ d^2z ข้างบนพอดี ซึ่งแสดงให้เราทราบว่าถ้าเรานำ augmented objective function มาใช้ประโยชน์ด้วยจะทำให้การหา d^2z นั้นง่ายขึ้น ดังนี้

(4.26) $$d^2z = Z_{xx}dx^2 + Z_{xy}dx\,dy + Z_{yx}dydx + Z_{yy}dy^2$$

ซึ่ง coefficient ของ (4.26) ได้จากการ take second partial derivatives เข้ากับ augmented function Z

การที่จะบอกว่า extremúm value ของ $5 = f(x,y)$ subject to $g(x,y) = 0$ maximum& minimum ได้นั้นขึ้นอยู่กับ second-order condition คือ d^2z ว่าเป็น negative definite หรือเป็น positive definite ในการพิจารณาเครื่องหมายของ d^2z นั้น มิใช่ว่าเราพิจารณาโดยกำหนดค่าของ dx และ dy ได้ตามใจชอบ แต่ต้องกำหนดค่าของ dx และ dy ให้อยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า $dg = 0$ (4.24) ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า

For minimum Z : d^2z positive definite, subject to $dg = 0$

For maximum Z : d^2z negative definite, subject to $dg = 0$

B. <u>Bordered Hessian Determinant</u>

ในกรณีของ free extremum analysis นั้น second-order condition ที่อยู่ในรูปของ determinaเราเรียกว่า Hessian determinant สำหรับในกรณีของ constrainted extremum analysis เราก็สามารถเขียน Second-order condition ให้อยู่ในรูปของ determinant ได้เช่นเดียวกัน แต่ determinant นี้เราเรียกว่า Bordered Hessian Determinant

เพื่อเป็นพื้นฐานของการพิจารณาเรื่อง Bordered Hessian Determinant ขอให้เรามาวิเคราะห์ definiteness ของ two - variable quadratic form, subject to a linear constraint เสียก่อน ดังนี้ เช่น

$$q = au^2 + 2huv + bv^2 \quad \text{subject to } \alpha u + \beta v = 0$$

จาก constraint ที่กำหนดให้เราได้ว่า $v = -(\alpha/\beta)u$ ซึ่งเมื่อเอาไปแทนค่าลงใน q จะทำให้ q เป็น function ของ u เพียงตัวเดียว (q as a function of one variable) ดังนี้

$$q = au^2 - 2h\frac{\alpha}{\beta}u^2 + b\frac{\alpha^2}{\beta^2}u^2$$

$$= (a\beta^2 - 2h\alpha\beta + b\alpha^2)\frac{u^2}{\beta^2}$$

ซึ่งเราจะสังเกตเห็นได้ว่า q จะเป็น positive definite ก็ต่อเมื่อ expression ในวงเล็บมีเครื่องหมายเป็นบวกและ q จะ เป็น negative definite ก็ต่อเมื่อ expression ในวงเล็บมีเครื่องหมายเป็นลบ

แต่เนื่องจาก symmetric determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix} = 2h\alpha\beta - a\beta^2 - b\alpha^2$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับ $- (a\beta^2 \;\; 2h\alpha\beta + b\alpha^2)$

เพราะฉะนั้น ตราบใดที่ u และ v ไม่เป็นศูนย์ (zero) หมดทั้งสองตัวและ u และ v ยัง satisfy the equation $\alpha u + \beta v = 0$ เราสามารถสรุปได้ว่า

$$q \text{ is } \left\{ \begin{array}{l} \text{positive definite} \\ \text{negative definite} \end{array} \right\} \text{ iff } \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix} \left\{ \begin{array}{l} <0 \\ >0 \end{array} \right.$$

ถ้าเราสังเกต Determinant นี้เราจะพบว่า $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$ ก็คือ discriminant of original quadratic form และ α, β ก็คือ coefficient ของ constraint function นั่นเอง

เมื่อเรา apply การวิเคราะห์ข้างบนนี้เข้ากับ d^2z ใน (4.26) เราจะเห็นได้ว่า u ก็คือ dx และ v ก็คือ dy และเมื่อ constraint ที่กำหนดให้ของ (4.26) คือ $g_x dx + g_y dy = 0$ เพราะฉะนั้นเราก็ได้เพิ่มเติมอีกว่า $\alpha = g_x$ และ $\beta = g_y$ ดังนั้น ตราบใดที่ dx และ dy ไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกันทั้งสองตัวเราก็จะได้ second - order condition ดังนี้

$$d^2z \text{ is } \left\{ \begin{array}{l} \text{Positive definite} \\ \\ \text{Negative definite} \end{array} \right\} \text{ iff } \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & z_{xx} & z_{xy} \\ g_y & z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} \left\{ \begin{array}{l} <0 \\ >0 \end{array} \right.$$

Determinant $\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & z_{xx} & z_{xy} \\ g_y & z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$ นี้เรียกว่า Bordered Hessian ใช้สัญลักษณ์ว่า $|\bar{H}|$

เพราะฉะนั้นเราจึงสรุปได้ว่า ถ้ากำหนด critical value ของ $z = f(x,y)$ หรือของ $z = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ ให้, เครื่องหมายของ Bordered Hessian determinant ($|\bar{H}|$) จะบอกให้เราทราบว่า critical value ของ z นั้นเป็น maximum หรือ minimum

นั่นคือถ้า $|\bar{H}|$ มีเครื่องหมายเป็นบวก critical **value**ของ 5 นั้นจะเป็น relative maximum แต่ถ้า $|\bar{H}|$ มีเครื่องหมายเป็นลบ critical **value**ของ 8 นั้นจะเป็น relative minimum

c. <u>n - variable case</u>

เมื่อ objective function อยู่ในรูป

$$5 = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \text{ subject to } g(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$$

*&$&critical value ของ 8 จะเป็น maximum หรือ minimum (second-order condition) ก็ยังคงขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของ d^2z ว่า เป็นลบหรือเป็นบวก เหมือนกับกรณีที่ 8 เป็น function ของ choice variables เพียง 2 ตัว เนื่องจาก d^2z จะอยู่ในรูป quadratic form of the variables $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ subject to

$$(dg =)\ g_1dx_1 + g_2dx_2 + \ldots + h_ndx_n = 0$$

ดังนั้นเราจึงยังคงใช้เครื่องหมาย (sign) ของ **bordered Hessian** เป็นเครื่องบอกให้ทราบว่า d^2z เป็น positive definite หรือ negative definite โดยสังเกตเครื่องหมายของ bordered principal minors of the **Hessian**

ถ้าสมมติว่า bordered Heeeian ที่กำหนดให้ คือ

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ g_2 & Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_n & Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}$$

เราสามารถนิยาม bordered principal minors ได้คือ

$$|\bar{H}_2| \equiv \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & Z_{11} & Z_{12} \\ g_2 & Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} \quad |\bar{H}_3| \equiv \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ g_2 & Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ g_3 & Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix} \quad \text{etc}$$

ซึ่ง bordered principal minor ตัวสุดท้าย $|\bar{H}_n|$ เท่ากับ $|\bar{H}|$

ในกรณี **n-variables case** นี้ **conditions** for positive and negative definiteness of d^2z คือ

$$d^2z \text{ is } \begin{Bmatrix} \text{positive definite} \\ \\ \text{negative definite} \end{Bmatrix} \text{ iff } \begin{Bmatrix} |\bar{H}_2|, \quad |\bar{H}_3|, \quad \ldots, |\bar{H}_n| < 0 \\ \\ |\bar{H}_2| > 0; \ |\bar{H}_3| < 0 \ |\bar{H}_4| > 0; \ . \ . \ . \end{Bmatrix}$$

จากการศึกษาเกี่ยวกับเรื่อง constrainted extremum ทั้งหมดข้างต้น เราพอสรุปได้ดังตารางที่ 4.1 ข้างล่างนี้

ตารางที่ 4.1

[Conditions for constrainted extremum : $z = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$, subject to $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$; with $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$]

Condition	Maximum	Minimum
First - order	$Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_n = Z_\lambda = 0$ (or $dz = 0$, subject to $g = 0$)	$Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_n = Z_\lambda = 0$ (or $dz = 0$, subject to $g = 0$)
Second - order	$\|\bar{H}_2\| > 0$; $\|\bar{H}_3\| < 0$; $\|\bar{H}_4\| > 0$; (or d^2z negative definite, subject to $dg = 0$)	$\|\bar{H}_2\|$ $\|\bar{H}_3\|$ ... $\|\bar{H}_n\| < 0$ (or d^2z positive definite, subject to $dg = 0$)

รายชื่อหนังสือที่ควรอ่านเพิ่มเติม

สมคิด แก้วสนธิ, <u>คณิตเศรษฐศาสตร์</u> (กรุงเทพ : ไทยวัฒนาพานิช, 1973) บทที่ 5

Allen, R.G.D. <u>Mathematical Analysis for Economists</u> (Macmillan & Co., Ltd., 1971) บทที่ 14

Chiang, Alpha C. <u>Fundamental Methods of Mathematical Economics</u>. 2nd ed. (McGraw-Hill Book Company, 1974) บทที่ 9, 11 และ 12

Kooros, A. <u>Elements of Mathematical Economics.</u> (Boston : Houghton Mifflin Company, 1965) บทที่ 5

Read, Ronald G. <u>A Mathematical Background for Economists and Social Scientists</u> (Prentice - Hall Inc., 1972) บทที่ 9