# บทที่ 4

# การหาค่าสูงสุดและต่ำสุด

# MAXIMA AND MINIMA

# บทที่ 4
# การหาค่าสูงสุดและต่ำสุด
# (Maxima and Minima)

ในการวิเคราะห์ทางเศรษฐศาสตร์ เราจำเป็นต้องใช้วิธีการทางเศรษฐศาสตร์ที่เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดไปประยุกต์ใช้ในหลายกรณีด้วยกัน เช่น การวิเคราะห์หาปริมาณสินค้าที่เหมาะสมที่สุดที่ทำให้ผู้บริโภคได้รับอรรถประโยชน์สูงสุด การวิเคราะห์หาปริมาณผลผลิตของสินค้าของหน่วยธุรกิจ (Firm) ที่ทำให้ได้รับกำไรสูงสุด การวิเคราะห์ปริมาณปัจจัยการผลิตที่เหมาะสมที่ทำให้การผลิตเสียต้นทุนต่ำสุด เป็นต้น นอกจากนี้ยังใช้ในกรณีอื่น ๆ อีกมากมายที่เกี่ยวข้องกับการที่พยายามทำให้ตัวแปรเป้าหมายหรือฟังก์ชั่นเป้าหมาย (Objective Function) มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด ฉะนั้นเราจึงจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชั่นให้ดีพอสมควร

การวิเคราะห์เกี่ยวกับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดนั้น เราแบ่งเป็นสองกรณีใหญ่ ๆ ได้คือ การหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชั่นเป้าหมายที่ไม่มีสมการจำกัดขอบเขต (Non-Constrained Maximum or Minimum) และการหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชั่นเป้าหมายที่มีสมการจำกัดขอบเขต(Constrained Maximum or Minimum) ซึ่งจะกล่าวถึงในรายละเอียดเป็นลำดับกันไป แต่ก่อนที่จะกล่าวถึงรายละเอียดเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดในกรณีต่าง ๆ จะขอทำความเข้าใจกันเสียก่อนเกี่ยวกับคำศัพท์บางคำที่ควรทราบ

1 <u>ค่าที่เหมาะสมที่สุดและค่าปลายสุด</u>

(Optimum Values and Extreme Values)

Optimum Values หมายถึงค่าที่เหมาะสมที่สุดหรือค่าที่ดีที่สุดของตัวแปรที่เราพิจารณาถึงในทางเศรษฐศาสตร์ เช่น ค่าของกำไรสูงสุด ค่าของต้นทุนต่ำสุด เป็นต้น นอกจากนี้ Optimal Values ยังหมายรวมถึงค่าที่เหมาะสมที่สุดของตัวแปรที่เป็นตัวเลือก (Choice Variables) ในสมการเป้าหมาย เพื่อความเข้าใจดีขึ้น จะขอยกตัวอย่างมาประกอบดังนี้

สมมติว่าหน่วยผลิตหน่วยหนึ่งต้องการที่จะแสวงหากำไรสูงสุดและเขาต้องการทราบว่าเขา

ควรผลิตสินค้าเท่ากับเท่าไร ในกรณีเช่นนี้เราสามารถเขียนฟังก์ชั่นเป้าหมายได้คือ

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q)$$

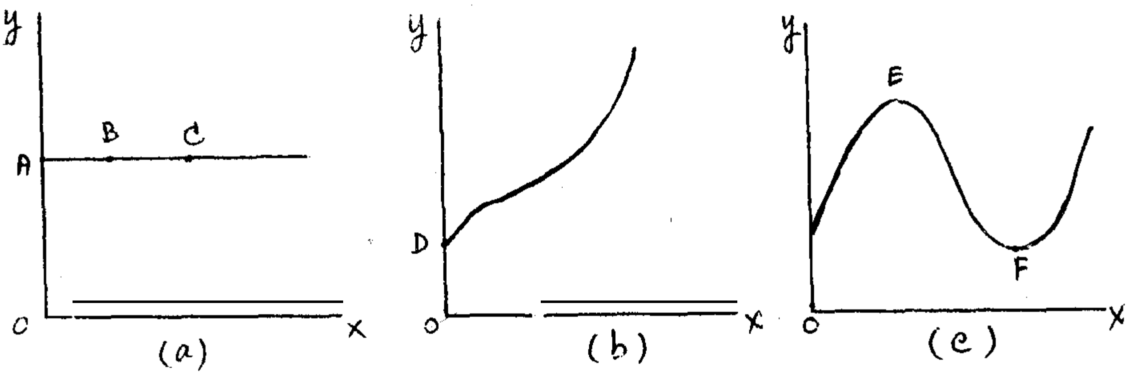
โดยที่ $\pi(Q)$ หมายถึง กำไร(Profit) ซึ่งขึ้นอยู่กับปริมาณผลผลิต (Q)

R(Q) หมายถึง รายรับ (Revenue) ซึ่งขึ้นอยู่กับปริมาณผลผลิต

C หมายถึง ต้นทุนทั้งหมด(Total Costs)ซึ่งขึ้นอยู่กับปริมาณผลผลิต

จะเห็นได้ว่า $\pi$ เป็นตัวแปรเป้าหมาย(Objective Variable) ที่หน่วยธุรกิจต้องการให้มีค่าสูงสุด ส่วน Q นั้นเป็นตัวแปรเลือก (Choice Variable) ที่หน่วยธุรกิจจะเลือกผลิตให้เป็นปริมาณที่ทำให้เกิดกำไรสูงสุดและเมื่อเราหาได้แล้วว่าค่า Q เท่ากับเท่าไรจึงจะทำให้ $\pi$ มีค่าสูงสุด ค่า Q และค่า $\pi$ นั้นก็จะเรียกว่าเป็น Optimal Values คือค่าที่เหมาะสมที่สุด

ส่วนคำว่า Extreme Values นั้น หมายถึงค่าปลายสุดของตัวแปรเป้าหมาย ซึ่งอาจเป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดก็ได้ ฉะนั้น Extreme Values จึงเป็นคำรวมที่ใช้เรียกสำหรับ Maximum หรือ Minimum จากรูป 4.1 (c)จุด E และ F นั้นจะเรียกว่า Extreme Value หรือTurning Point ของฟังก์ชั่น




<u>รูปที่ 4.1</u>

2 **ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (Relative Maximum and Minimum)

เนื่องจากฟังก์ชั่นเป้าหมาย (Objective Function) อาจเขียนในรูป $y=f(x)$ ซึ่งไม่ได้บอกเฉพาะเจาะจงลงไปว่าเป็นลักษณะของสมการชนิดใดคือไม่ได้บอกว่าเป็นฟังก์ชั่นสมการเส้นตรง (Linear Function) หรือไม่ใช่สมการเส้นตรง (Non-linear Function) หรือเป็น Monotonic Function ที่มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x เพิ่มขึ้นหรือเป็น Monotonic Function ที่มีค่าลดลงเมื่อ x ลดลง อย่างไรก็ตามจะขอยกตัวอย่างมาพิจารณา 3 กรณีดังในรูปที่ 4.1

ในกรณีแรกดังในรูปที่ 4.1 (a) จะเห็นได้ว่าฟังก์ชั่นเป้าหมายเป็นสมการเส้นตรงขนานกับแกนนอน ซึ่งไม่ว่าค่าของ x จะเป็นเท่าใดก็ตาม ค่าของ y จะคงที่ตลอด ฉะนั้น เราจึงไม่อาจบอกได้ว่าจุด A,B, หรือ C เป็นจุด Extreme Value คือเป็นจุดที่เกิดค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ดังนั้นถ้าเผชิญในการวิเคราะห์ทางเศรษฐศาสตร์เรามีฟังก์ชั่นเป้าหมายในลักษณะนี้เราก็ไม่อาจหาค่าของ x ที่เหมาะสม (Optimization Value of x) ได้

ส่วนในรูปที่ 4.1 (b) เป็นรูปของฟังก์ชั่นเป้าหมายที่มีลักษณะเป็น Increasingly Monotonic Function (คือเมื่อค่า x เพิ่มขึ้นค่าของ y ก็จะเพิ่มขึ้นด้วยเสมอ) ในกรณีเช่นนี้เราไม่อาจหาค่าของ x ที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดได้เพราะเราไม่ทราบว่าค่าสูงสุดอยู่ตรงไหน แต่เราสามารถหาค่าต่ำสุดได้คือที่ D (ทั้งนี้กำหนดให้ค่าของ x เป็นค่าติดลบไม่ได้) และที่จุด D นี้เราเรียกว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (Absolute Minimum)

ส่วนในรูปที่ 4.1(c) นั้น แสดงให้เราเห็นว่าจุด E และจุด F นั้นเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (Relative Maximum) และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (Relative Minimum) ตามลำดับ เหตุที่เราเรียกจุด E ว่าเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์เพราะว่า จุด E นั้นเป็นค่าที่สูงที่สุดของฟังก์ชั่น เมื่อพิจารณาจากค่าข้างเคียงของ x ที่ทำให้เกิดจุด E ในทำนองเดียวกัน จุด F เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เพราะว่าจุด F เป็นจุดต่ำสุดเมื่อพิจารณาจากค่าข้างเคียงของ x ที่ทำให้เกิดจุด F ฉะนั้น Relative Extremum จึงหมายถึงค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดในช่วงใดช่วงหนึ่งของค่า x ที่กำหนดให้หรือที่เราพิจารณาถึงเท่านั้น

เมื่อเราเข้าใจคำศัพท์บางคำที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดแล้ว ในตอนต่อไปนี้จะขอกล่าวถึง วิธีการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดเป็นลำดับไป โดยเริ่มจากง่าย ๆ ไปหายาก คือเริ่ม

จากกรณีที่สมการเป้าหมายมีตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวก่อนแล้วจึงพิจารณาต่อไปถึงกรณีที่มีตัวแปรอิสระสองตัวและสามตัวจนถึง n ตัวเป็นลำดับไป เสร็จแล้วก็จะกล่าวถึงการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดในกรณีที่มีการจำกัดขอบเขตค่าของตัวแปรอิสระในสมการเป้าหมายเป็นอันดับถัดไป

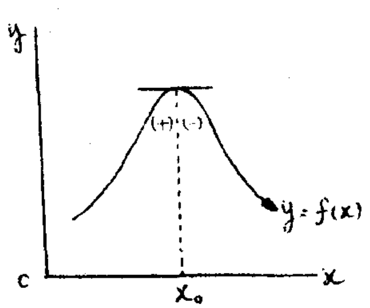
### 3 <u>การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดกรณีที่มีตัวแปรอิสระตัวเดียว</u>

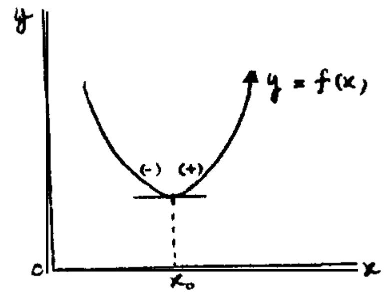
(Relative Extremum of Function of One Variable)

ในการทดสอบว่า extreme value ของ function จะเป็น maximum value หรือเป็น minimum value หรือไม่นั้น เราใช้วิชา calculus เข้ามาช่วยวิเคราะห์ ซึ่งมีหลักดังนี้

3.1 <u>First Derivative Test for Relative Extremum</u> ถ้า first derivative ของ function $f(x)$ ที่จุด $x = x_0$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ($f'(x_0) = 0$) ค่าของ function $f(x_0)$ นั้นจะเป็น maximum หรือ minimum ขึ้นอยู่กับการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

a). จะเป็น relative maximum ถ้า first derivative $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากบวก(ทางซ้ายของ $x_0$) ไปเป็นลบ(ทางขวาของ $x_0$) ดูรูป 4.2



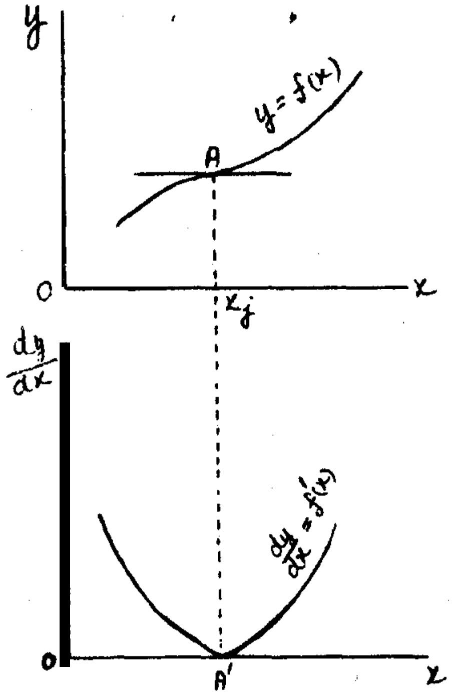




<u>รูปที่ 4.2</u>

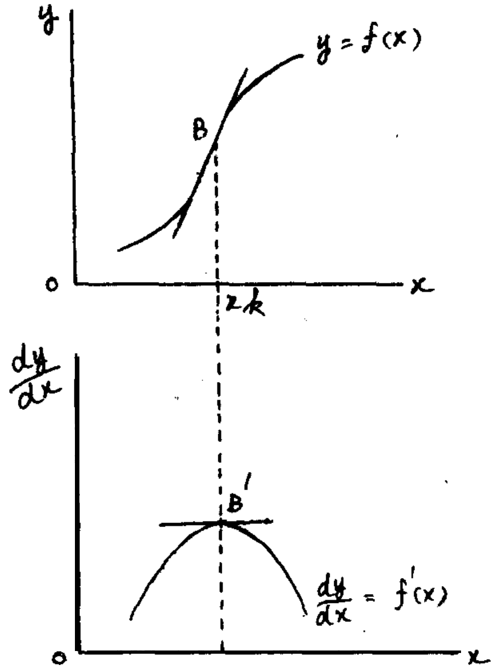
<u>รูปที่ 4.3</u>

b). จะเป็น relative minimum ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากลบ(ทางซ้ายของ $x_0$) ไปเป็นบวก(ทางขวาของ $x_0$) ดูรูป 4.3

c ). ไม่เป็นทั้ง relative maximum หรือ relative minimum ถ้า $f'(x)$ มีเครื่องหมายทั้งสองข้างของ $x_o$ เหมือนกัน เช่น รูปที่ 4.4




รูปที่ 4.4




รูปที่ 4.5

ในกรณีของ(c) นั้นเราเรียกว่า infleotion point คุณลักษณะของ inflection point ก็คือ derivative function ($f'(x)$)จะมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Extreme Value) ที่จุดนั้น จากรูป 4.4 จะเห็นได้ว่า extreme value ของ $f'(x)$ จะเกิดขึ้นเมื่อ $x = x_j$ หมายความว่า $f'(x)$ มีค่าลดลงเรื่อย ๆ เมื่อ x มีค่าสูงขึ้นและ $f'(x)$ ลดลงจนไปอยู่จุดซึ่ง $f'(x) = 0$ ที่จุด A หรือจุด A' และเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นไปอีก คือมากกว่า $x_j$ $f'(x)$ก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นเพราะฉะนั้น $f(x_j)$ หรือ A klhinflection point ที่มี $f'(x)$ ต่ำสุด สำหรับในรูป 4.5 นั้น $f'(x)$จะ

เพิ่มขึ้นไปเรื่อย ๆ จนถึง extremum value ที่ $x = x_k$ ซึ่ง $f'(x)$ มีค่าสูงสุดและเมื่อ $x > x_k$ $f'(x)$ ก็จะมีค่าลดลง เพราะฉะนั้น $f(x_k)$ หรือ B จะเป็น inflection point ที่มี $f'(x)$ สูงสุด

วิธีการหา relative maximum หรือ minimum นั้น ประการแรกเราหา first derivative ของ function ที่กำหนดมาให้ได้เสียก่อนเสร็จแล้ว set ให้ first derivative นั้นเท่ากับศูนย์ (zero) แล้ว solve หาค่าของตัวแปรอิสระของ function นั้น ค่าที่ได้นี้เรียกว่า critical number (เมื่อนำ critical number นี้ไปแทนลงใน function ที่กำหนดให้ค่าที่ได้เรียกว่า critical value of the function) เมื่อนำ neighborhood ของ critical number ไปแทนลงใน derivative function ที่หาได้ เราก็จะได้ค่าออกมาว่ามากกว่าศูนย์ ($f'(x_1) > 0$) หรือน้อยกว่าศูนย์ ($f'(x_2) < 0$) แล้วเราก็พิจารณาตัดสินว่า critical value ของ function นั้นเป็น maximum หรือ minimum หรือเป็น inflection point โดยอาศัยหลักการวิเคราะห์ a,b,c ดังกล่าวข้างต้น

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา relative extrema ของ function ที่กำหนดให้

$$y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 8$$

ประการแรก เราจะต้องหา derivative function เสียก่อน คือ

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$$

ประการที่สอง เรา set ให้ $f'(x) = 0$ เพื่อหา critical numbers คือ

$$3x^2 - 24x + 36 = 0$$

เราได้ $\bar{x}$ เป็น 2 ค่า คือ $\bar{x}_1 = 2$ และ $\bar{x}_2 = 6$ ซึ่งเป็น critical numbers ที่เราต้องการ (และเมื่อแทนค่า $\bar{x}_1$ และ $\bar{x}_2$ ลงใน $f(x)$ เราจะได้ $f(2) = 40$ และ $f(6) = 8$ 40 และ 8 เรียกว่า critical value )

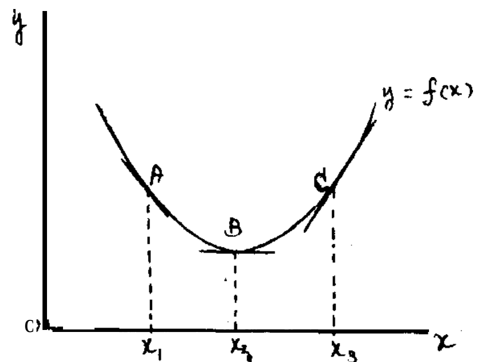
เพื่อที่จะทดสอบว่า $f(2) = 40$ เป็น maximum value หรือเป็น minimum value เราทำได้โดยการเอาค่าของ neighborhood ของ x แทนลงไปใน derivative function เรา

ได้ว่า $f'(x) > 0$ เมื่อ $x < 2$ และ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x > 2$ เพราะฉะนั้นเราจึงสรุปได้ว่า $f(2) = 40$ เป็น relative maximum value of the functionหรือพูดได้อีกอย่างหนึ่งว่า $f(x)$ มีค่าสูงสุดเมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ 2

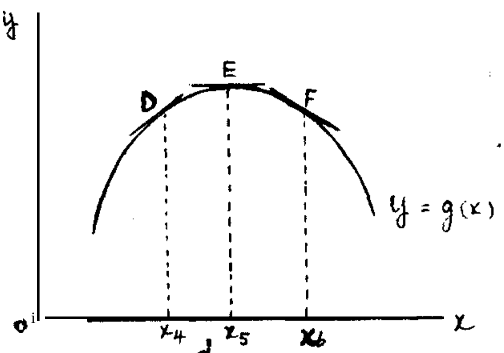
ในการทดสอบว่า $f(6) = 8$ เป็นmaximum value หรือเป็น minimum value เราทำได้ทำนองเดียวกันกับการทดสอบครั้งที่แล้ว เราได้ว่า $f'(x) < 0$ เมื่อ $x < 6$ และ $f'(x) > 0$ เมื่อ $x > 6$ เพราะฉะนั้นเราจึงสรุปได้ว่า critical value $f(6)=8$ เป็น minimum value หรือพูดได้อีกอย่างหนึ่งว่า $f(x)$ จะมีค่าต่ำสุด (relative minimum) เมื่อ $x = 6$

3.2 <u>Second Derivative Test for Relative Extremum</u>

เนื่องจาก $f'(x_0) = 0$ โดยตัวของมันเองแล้วสามารถบอกเราได้แต่เพียงว่า $f(x_0)$ &extreme value เท่านั้น เราจะทราบว่า extreme value ของ $f(x)$ นั้นเป็น maximum value หรือ minimum valus เราต้องทดสอบอีกทีหนึ่งโดยการแทนค่า neighborhood ของ $x_0$ ลงไปใน $f'(x)$ แล้ววิเคราะห์ค่าของมันว่าเป็นบวกหรือเป็นลบ ซึ่งวิธีนี้อาจยุ่งยากพอสมควร แต่เนื่องจากเราเคยศึกษามาแล้วว่า Second derivative$(f''(x))$ สามารถบอกอัตราการเพิ่มของ slope ของ function $f(x)$ได้ นั่นคือ ถ้า $f''(x) > 0$ แสดงว่า $f(x)$ curve จะเป็น U - Shaped curve แต่ถ้า $f''(x) < 0$ แสดงว่า $f(x)$ curve จะเป็น inverse-U-shaped curve ดูรูป 4.6 และ 4.7




รูปที่ 4.6




รูปที่ 4.7

จากรูป 4.6 ทุกจุดบน f(x) curve จะมี $f''(x) > 0$ จุด B ซึ่งมี $f'(x) = 0$ และ $f''(x) > 0$ จะเป็นจุด minimum ของ f(x) curve ส่วนในรูป 4.7 นั้น ทุกจุดบน g(x) curve จะมี $g''(x) < 0$ จุด E ซึ่งมี $g'(x) = 0$ และ $g''(x) < 0$ จึงเป็นจุด maximum ของ g(x) curve เพราะฉะนั้น second derivative condition จึงเป็น sufficient condition ในการพิจารณาว่า extreme value ของ function จะเป็น maximum value หรือ minimum value ด้วยเหตุนี้เอง เราจึงสามารถกล่าวเป็นหลักโดยทั่วไปได้ว่า ถ้า first derivative ของ function f ที่จุด $x = x_o$ คือ $f'(x_o) = 0$ ค่าของ function ที่จุดนั้น $f(x_o)$ จะเป็น maximum หรือ minimum ขึ้นอยู่กับหลักการพิจารณาดังนี้

1) จะเป็น relative maximum ถ้า $f''(x_o) < 0$

2) จะเป็น relative minimum ถ้า $f''(x_o) > 0$

<u>ตัวอย่าง</u> 1) จงหา relative extremum ของ function ที่กำหนดให้ คือ

$$y = f(x) = 4x^2 - x$$

จาก function ที่กำหนดให้ เราสามารถหา first derivative และ second derivative ได้ดังนี้

$$f'(x) = 8x - 1 \quad \text{และ} \quad f''(x) = 8$$

set ให้ $f'(x) = 0$ เพื่อหา critical number คือ

$$8x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{8}$$

$\therefore$ critical number $= \frac{1}{8}$

แทนค่า $x = \frac{1}{8}$ ลงใน function ที่กำหนดให้เราจะได้ critical value ของ function

คือ $f(\frac{1}{8}) = -\frac{1}{16}$

แต่เนื่องจาก $f''(x) = 8$ ซึ่งมีค่าเป็นบวกเสมอไม่ว่า x จะมีค่าเป็นเท่าไรก็ตาม เพราะฉะนั้น critical value ที่หาได้คือ $-\frac{1}{16}$ จึงเป็นค่าต่ำสุดของ function ที่กำหนดให้

2) จงหา relative extrema ของ function ที่กำหนดให้ คือ

$$y = g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

จาก function ที่กำหนดให้ เราสามารถหา first derivative และ second derivative ได้ดังนี้ $g'(x) = 3x^2 - 6x$ และ $g''(x) = 6x - 6$

set ให้ $g'(x) = 0$ เพื่อหา critical number.9 คือ

$$3x^2 - 6x = 0$$

Solve quadratic equation นี้เราจะได้ค่าของ x 2 ค่า คือ

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \text{และ} \quad \bar{x}_2 = 2$$

ซึ่งเมื่อนำ critical numbers นี้ไปแทนค่าลงใน function ที่กำหนดให้เราจะได้ critical value 2 ค่า คือ

$g(0) = 2$ ซึ่งเป็น maximum value เพราะว่า $g''(0) = -6$ to

$g(2) = -2$ ซึ่งเป็น minimum value เพราะว่า $g''(2) = 6 > 0$

### 3.3 $n^{th}$ derivative Test for Relative Extremum

ถึงแม้ว่าการวิเคราะห์หา maximum dfl minimum value ของ function ที่กำหนดให้ด้วย second derivative ร่วมกับ first derivative จะสะดวกกว่าการใช้วิธีวิเคราะห์ของ first derivative เพียงอย่างเดียว แต่ก็มีข้อจำกัดคือ ในกรณีที่ $f''(x)$ 00 เราไม่อาจบอกได้ว่า Critical value นั้นเป็น maximum หรือ minimum value ทำให้การวิเคราะห์ของเราต้องล้มเหลว (test fails) เพราะฉะนั้นเราจะต้องกลับไปใช้วิธีของ

first derivative แต่เพียงอย่าง เดียวหรือใช้วิธีวิเคราะห์วิธีอื่น คือใช้ derivative ที่มีชั้นสูงกว่า second derivative เช่น $f'''(x)$, $f^4(x)$ .....$f^n(x)$

จากการศึกษาเกี่ยวกับ Maclaurin Series, Taylor Sesies และ Lagrange form at the Remainder เราสามารถสรุปหลักการวิเคราะห์ extreme value ว่าเป็น maximum หรือ minimum ได้ดังต่อไปนี้ :

ถ้า first derivative ของ function f(x) ที่ $x = x_o$ มีค่าเท่ากับศูนย์ $(f'(x_o) = 0)$ ค่าของ function จะเป็น maximum หรือ minimum ขึ้นอยู่กับการวิเคราะห์ derivative ที่มีชั้นสูงขึ้นไป (higher order derivative) ที่เราพบเป็นตัวแรกว่ามีค่าไม่เท่ากับศูนย์ (zero) $\left[f^{(n)}(x_o)\right]$ ซึ่งมีหลักการวิเคราะห์ ดังนี้

a) ค่าของ extreme value นั้นจะเป็น maximum ถ้า n เป็นเลขคู่ (even number) และ $f^{(n)}(x_o) < 0$

b) ค่าของ extreme value นั้นจะเป็น minimum ถ้า n เป็นเลขคู่ (even number) และ $f^{(n)}(x_o) > 0$

c) ค่าของ extreme value นั้นจะเป็น inflection point ถ้า n เป็นเลขคี่ (odd number)

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์ relative extremum ของ $y = (7 - x)^4$

จาก function ที่กำหนดให้ $f'(x) = -4(7 - x)^3$ ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อ $x = 7$ เพราะฉะนั้น $x = 7$ จึงเป็น critical number แทน $x = 7$ ลงใน function ที่กำหนดให้เราจะได้ $y = 0$ ซึ่งเป็น critical value ของ function ที่กำหนดให้ เมื่อเราแทน critical number ลงใน second derivative เราได้ว่า

$$f''(x) = 12(7 - x)^2 \text{ ซึ่ง } f''(7) = 0$$

เพราะฉะนั้นเราพยายามแทนค่า derivative ที่มีชั้นสูงขึ้นไปอีกด้วย critical number นั้นเราได้ดังต่อไปนี้

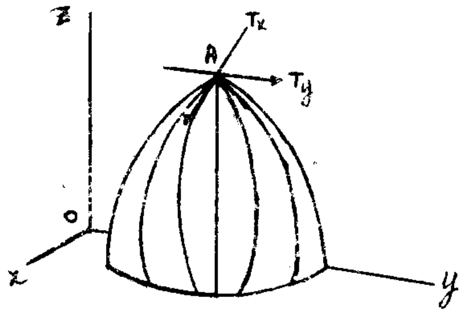
$$f'''(x) = -24(7-x) \text{ ซึ่งได้ว่า } f'''(7) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 24 \qquad \text{ ซึ่งได้ว่า } f^{(4)}(7) = 24$$

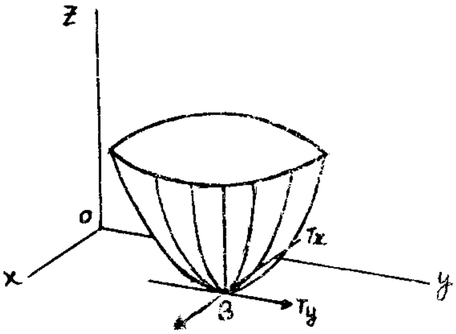
$f^{(4)}(x)$ จึงเป็น derivative ตัวแรกที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ (nonzero) เพราะฉะนั้นเราวิเคราะห์ค่าของ derivative นี้โดยใช้หลัก a, b, c ดังกล่าวแล้วข้างต้น จากการวิเคราะห์เราพบว่า $n = 4$ ซึ่งเป็นเลขคู่ (even number) และ $f^{(4)}(7) = 24 > 0$ เพราะฉะนั้นเราจึงสรุปได้ว่า coordinate (7,0) เป็น relative minimum ของ function ที่กำหนดให้

4 <u>Extreme Value of Function of Two Variables</u>

ในกรณีที่ function ประกอบด้วยตัวแปรอิสระ 2 ตัว เช่น $z = f(x,y)$ กราฟที่ plot ได้จาก function นี้จะเป็น surface in a 3-dimensional space ดังรูปที่ 4.7 และ 4.8 จากรูปจะเห็นได้ว่า Extreme value จะเกิดขึ้นเมื่อ z มีค่าสูงสุด (เช่นจุด A )หรือเมื่อ z มีค่าต่ำสุด( เช่นจุด B ) ในการวิเคราะห์ว่า extreme value ของ z นั้นจะเป็น maximum หรือ minimum เราแบ่งออกเป็น 2 ขั้น คือ การวิเคราะห์ในขั้น necessary




<u>รูปที่ 4.8</u>

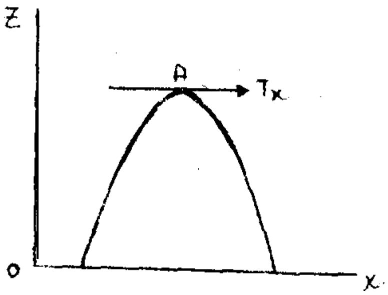



<u>รูปที่ 4.9</u>

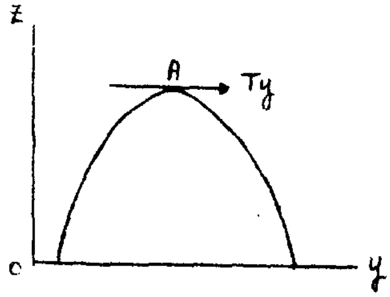
condition(first-order condition) และการวิเคราะห์ในขั้น sufficient condition(second-order condition) ซึ่งจะขออธิบายโดยย่อตามลำดับดังต่อไปนี้

## First - order Condition

เนื่องจาก A และ B เป็นจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดของ surface ที่กำหนดให้(ในรูป 4.8 และ 4.9 ตามลำดับ) เพราะฉะนั้นเส้นสัมผัส $T_x$ (ซึ่งขนานกับ Oxz plane) และเส้นสัมผัส $T_y$ (ซึ่งขนานกับ Oyz plane) ที่ผ่านจุด A และ B จะต้องมี slope เท่ากับศูนย์เพื่อให้เข้าใจข้อสรุปนี้ให้ดียิ่งขึ้น ขอให้เราพิจารณารูปที่ 4.10 และ 4.11 ข้างล่างนี้




รูปที่ 4.10




รูปที่ 4.11

รูปที่ 4.10 ได้จากการตัด surface ที่จุด A (ในรูป 4.8) ด้วย oxz plane รูปที่ 4.11 ได้จากการตัด surface ที่จุด A (ในรูป 4.8) ด้วย oyz plane เนื่องจาก $T_x$ มี slope เท่ากับศูนย์แสดงว่าที่จุด A นั้น $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ และเนื่องจาก $T_y$ มี slope เท่ากับศูนย์แสดงว่าที่จุด A นั้น $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ด้วย ในทำนองเดียวกันเราสามารถกล่าวได้ว่าที่จุด B $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ และ $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ดังนั้นเราจึงกล่าวได้ว่า extreme value ของ z จะเกิดขึ้นต่อเมื่อ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

หรือ $$f_x = f_y = 0$$

ซึ่งเราเรียกว่า necessary condition สำหรับ extreme value ของ z

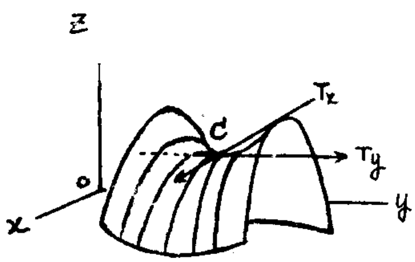
ถ้าเราพิจารณา extreme value ของ z ในลักษณะของ Total Differential เราสามารถกล่าวได้ว่า extreme value ของ z จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ z ถึงจุดที่จะไม่มีค่าสูงขึ้นหรือลดลง (z must be in a stationary position) นั่นคือ dz = 0

ถ้าเรา take total differential เข้ากับ $z = f(x,y)$ เราจะได้ว่า

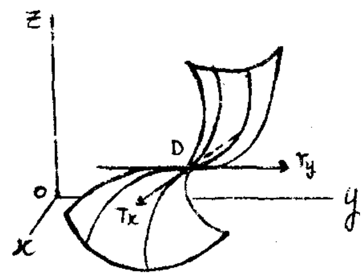
$$dz = f_x dx + f_y dy \tag{4.1}$$

เนื่องจาก dx และ dy (เป็นสัญลักษณ์แสดงค่าเปลี่ยนแปลงของ x และ y) ไม่จำเป็นต้องเท่ากับศูนย์ การที่ z จะเท่ากับศูนย์ได้ก็ต่อเมื่อ $f_x$ และ $f_y = 0$ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $dz = 0$ และ $f_x = 0$ $f_y = 0$ จึงเป็นเงื่อนไข (condition) อันเดียวกันสำหรับ extreme value ของ z

อย่างไรก็ตามการที่ de = 0 หรือ fx = fy = 0 ไม่เป็นหลักประกันพอที่จะเชื่อได้ว่า ณ จุดนั้น (คือจุดที่ dz = 0 หรือ fx = $f_y$ = 0 ) เป็นจุด extreme value ของ function ทั้งนี้เพราะที่จุดนั้นอาจเป็นจุด saddle point หรือ inflect point ก็ได้ ขอให้พิจารณารูปที่ 4.12 และ 4.13 ข้างล่างนี้




รูปที่ . 1 2



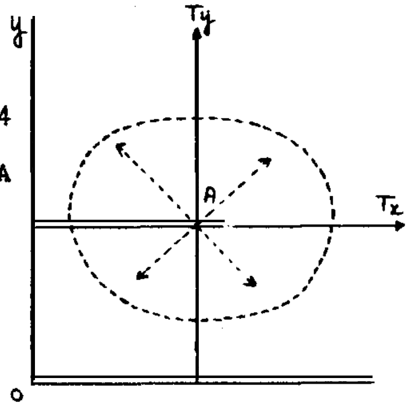

รูปที่ 4.13

ในรูปที่ 4.12 จุด C เป็นจุดซึ่ง $T_x$ และ $T_y$ มี slope= 0 ซึ่งเป็น saddle point เพราะว่าเมื่อเรามองโดยใช้ oyz plane เป็นฉากหลังเราจะเห็นว่าจุด C เป็น minimum point

จุด D ในรูปที่ 4.13 มิใช่ extreme value ของ function เหมือนกันทั้ง ๆ ที่ slope ของ $T_x$ และของ $T_y$ เท่ากับศูนย์ ทั้งนี้เพราะว่า D เป็น inflection point คือไม่ว่าจะมองโดยยึด oxz หรือ oyz เป็นฉากหลังเราก็จะเห็นว่า surface บิดตัว(twist) ณจุด D นั้น ดังนั้น first - order condition จึงเป็นเพียง necessary condition เท่านั้น (มิได้เป็น sufficient condition )

## Second - Order Condition

สมมติให้ A เป็นจุดสูงสุดของภูเขา เมื่อเรามองจากอากาศลงมา (bird-eye view) เราจะเห็นเป็นลักษณะดังรูปที่ 4.14 เนื่องจากจุด A เป็นจุดสูงสุด ($dz = 0$) จุดซึ่งห่างออกไปจาก A ไม่ว่าจะอยู่ในทางทิศทางใดของ A ก็ตามค่าของ z ก็จะลดลง นั่นคือ $dz < 0$ การที่ $dz < 0$ หมายความว่า dz กำลังลดลง ดังนั้น $d(dz) = d^2z < 0$ จึงกล่าวได้ว่าเมื่อ $dz = 0$ ที่จุด A $d^2z < 0$ จะเป็น sufficient condition ที่แสดงว่า A เป็น maximum point




รูปที่ 4.14

ในทำนองเดียวกัน ถ้าจุด A เป็นจุดต่ำสุดของก้นเหว (Valley) dz จะเท่ากับศูนย์ที่จุด A และ $d^2z > 0$ จะเป็น sufficient condition ที่แสดงว่า A เป็น minimum point เพราะฉะนั้น surface จะลาดขึ้น (curl up) ทุกทิศทางจากจุด A

Take total differential เข้ากับ(4.1) เพื่อหา second - order total differential เราได้ดังนี้

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}dy$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(f_x dx + f_y dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x dx + f_y dy)dy$$

$$= (f_{xx}dx + f_{xy}dy)dx + (f_{yx}dx + f_{yy}dy)dy$$