บทที่ 3

กฎต่าง ๆ เกี่ยวกับดิฟเฟอเรนเชียลแคลคูลัส

RULES OF DIFFERENTIAL CALCULUS

บทที่ 3
กฎต่าง ๆ เกี่ยวกับดิฟเฟอเรนเชียลแคลคูลัส
(Rules of Differential Calculus)

นักศึกษาได้ศึกษาเกี่ยวกับแคลคูลัสกันมามากพอสมควรแล้ว ฉะนั้นในบทนี้จึงมีจุดประสงค์ที่จะทบทวนกฎต่าง ๆ ที่สำคัญเกี่ยวกับแคลคูลัสที่จำเป็นต้องใช้วิเคราะห์ปัญหาทางเศรษฐศาสตร์อย่างง่าย ๆ เอาไว้ให้อยู่ในกลุ่มเดียวกัน โดยจะกล่าวถึงกฎเกี่ยวกับการหา Derivative* และ Differential เป็นลำดับไป

1 <u>การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นที่มีตัวแปรอิสระตัวเดียว</u>

(Rules of Differentiation for a Function of One Variable)

3.1.1 <u>Constant-function Rule</u>

Derivative ของ Constant function $y = f(x) = k$ เท่ากับศูนย์ (zero) ซึ่งสามารถเขียนเป็นสัญญลักษณ์ (symbol) ได้คือ

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{หรือ} \quad \frac{dk}{dx} = 0 \qquad \text{หรือ} \quad f'(x) = 0$$

1.2 <u>Power-function Rule</u>

Derivative ของ power function $y = f(x) = x^n$ คือ nx^{n-1} ซึ่งสามารถเขียนเป็นสัญญลักษณ์ได้คือ (n จะต้องเป็น real number)

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \qquad \text{หรือ} \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

---

* คำนิยามเกี่ยวกับ Derivative คือ ถ้าให้ $y = f(x)$ เราจะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{y}{x} = f'(x)$$

ตัวอย่าง 1) Derivative ของ $y = x^3$ คือ $\frac{dy}{dx} = \frac{dx^3}{dx} = 3x^2$

2) Derivative ของ $y = x^9$ คือ $\frac{dy}{dx} = \frac{dx^9}{dx} = 9x^8$

3) Derivative ของ $y = x^{-9}$ คือ $\frac{dy}{dx} = \frac{dx^{-9}}{dx} = -9x^{-10}$

4) Derivative ของ $y = x^0$ คือ $\frac{dy}{dx} = \frac{dx^0}{dx} = (0)(x)^{-1} = 0$

หรือ $\frac{dy}{dx} = \frac{d1}{dx} = 0$ ($x^0 = 1$ เสมอ)

5) Derivative ของ $y = x^{\frac{1}{2}}$ คือ $\frac{dy}{dx} = \frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $\left(= \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$

1.3 Power-function rule generalized

เมื่อ Power function มี constant(c) คูณอยู่ด้วยคือ $f(x) = cx^n$ Derivative ในกรณีนี้คือ

$$\frac{d}{dx} cx^n = cnx^{n-1} \qquad \text{หรือ} \qquad f'(r) = cnx^{n-1}$$

จะสังเกตได้ว่า ในการ differentiate cx^n นั้น เราปล่อยให้ตัวคงที่ (c) อยู่เฉย ๆ และเรา differentiate เพียง x^n เท่านั้น

2 การหาอนุพันธ์ของหลายฟังก์ชั่นที่มีตัวแปรอิสระเหมือนกัน

(Rules of Differentiation Involving Two or More Functions of the Same Variable)

ในกรณีที่มีฟังก์ชั่นสองฟังก์ชั่นหรือมากกว่าสองฟังก์ชั่น ซึ่งในแต่ละฟังก์ชั่นมีตัวแปรเหมือนกันและ

ฟังก์ชั่นทั้งสองนั้นบวกกัน ลบกัน คูณกัน หรือหารกันอยู่ ในการหาอนุพันธ์สามารถกระทำได้ดังกฎต่อไปนี้

2.1 <u>Sum-Difference Rule</u> ในกรณีที่ฟังก์ชั่นสองฟังก์ชั่นนั้นบวกหรือลบกันอยู่ การหาอนุพันธ์มีกฎดังนี้

อนุพันธ์ของผลบวก(ผลต่าง) ของสองฟังก์ชั่น จะเท่ากับผลบวก(ผลต่าง)ของอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นทั้งสองนั้น ซึ่งสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1) $\frac{d}{dx}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$

2) $\frac{d}{dx}(7x^4+4x^3-2x^2+5x-27) = 28x^3+12x^2-4x+5-0$

$= 28x^3+12x^2-4x+5$

2.2 <u>Product Rule</u> ในกรณีที่ฟังก์ชั่นสองฟังก์ชั่นนั้นคูณกันอยู่ การหาอนุพันธ์มีกฎดังนี้

อนุพันธ์ของผลคูณของสองฟังก์ชั่น(ซึ่งฟังก์ชั่นนั้น ๆ สามารถหาอนุพันธ์ได้) เท่ากับฟังก์ชั่นแรกคูณด้วยอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นที่สองบวกกับฟังก์ชั่นที่สองคูณกับอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นแรก ซึ่งสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้คือ

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)\frac{d}{dx} g(x) + g(x)\frac{d}{dx} f(x)$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

[<u>หลักจำ</u> หน้าเฉย dif หลัง บวกหลังเฉย dif หน้า]

ตัวอย่าง $\frac{d}{dx}\left[(2x+3)(4x^2)\right] = (2x+3)(8x) + (4x^2)(2)$

$= 24x^2 + 24x$

2.3 Quotient Rule ในกรณีที่ฟังก์ชั่นสองฟังก์ชั่นนั้นหารกันอยู่ เช่น $f(x)/g(x)$ การหาอนุพันธ์สามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

[หลักจำ ล่าง dif บนลบด้วยบน dif ล่างส่วนล่างกำลังสอง]

1) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x-3}{x+1}\right) = \frac{(x+1)(2) - (2x-3)(1)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$

2) $\frac{d}{dx}\frac{(5x)}{x^2+1} \quad \frac{(x^2+1)(5) - (5x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{5(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

3) $\frac{d}{dx}\frac{(ax^2+b)}{cx} = \frac{(cx)(2ax) - (ax^2+b)(c)}{(cx)^2} = \frac{c(ax^2-b)}{(cx)^2} = \frac{ax^2-b}{cx^2}$

3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นที่มีตัวแปรต่างกัน

(Rules of Differentiation Involving Functions of Different Variables)

3.3.1 Chain Rule ในกรณีที่เรามีฟังก์ชั่น $z = f(y)$ และ y เป็นฟังก์ชั่นของ x (คือ $y = g(x)$) อนุพันธ์ของ z ที่มุ่งต่อ x (with respect to x) จะเท่ากับอนุพันธ์ของ z ที่มุ่งต่อ y คูณด้วยอนุพันธ์ของ y ที่มุ่งต่อ x เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(y)g'(x)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1) ถ้า $z = 3y^2$ และ $y = 2x+5$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 6y(2) = 12y = 12(2x+5)$$

2) ถ้า $z = y-3$ และ $y = x^3$

$$\frac{dz}{dx} = (1)(3x^2) = 3x2$$

3) ถ้า $z = f(y)$, $y = g(x)$ และ $x = h(w)$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dw} = f'(y)\,g'(x)\,h'(w)$$

4) ถ้า $z = (x^2 + 3x - 2)^{17}$

$$\frac{dz}{dx} = 17(x^2+3x-2)^{16}\,(2x+3)$$

3.2 <u>Inverse- function Rule</u> ในกรณีที่ $y = f(x)$ เป็น Monotonic Function6 (คือเป็นฟังก์ชั่นที่เมื่อกำหนด x หนึ่งค่าจะได้ y เพียงหนึ่งค่าเสมอ) ฟังก์ชั่น f นั้นจะมี inverse function คือ $x = f^{-1}(y)$ เพราะว่าเมื่อเราทราบค่า y เราก็สามารถหาค่า x ได้เช่นกัน

(<u>f^{-1} หมายเหตุ</u> : มิได้หมายถึง $\frac{1}{f}$ แต่หมายความว่า x เป็น inverse function ของ y)

ถ้ากำหนดให้ $y = f(x)$ เป็น Monotonic Function และถ้า $f(x)$ มีค่ามากขึ้นเมื่อ x มีค่ามากขึ้น เราเรียก monotonic function นั้นว่าเป็น <u>Monotonically Increasing Function</u> แต่ถ้า $f(x)$ มีค่าลดลงเมื่อ x มีค่ามากขึ้น เราเรียก monotonic function นั้นว่าเป็น <u>Monotonically De&easinq Function</u>.

กฎในการหาอนุพันธ์ของ Inverse Function%

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

นั่นคือ อนุพันธ์ของ Inverse Function ก็คือส่วนกลับของอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นเดิม (Original function) นั่นเอง

__ตัวอย่าง__ กำหนดให้ $y = x^3+x$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2+1$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2+1}$$

4 __การหาอนุพันธ์บางส่วน__

(Partial Differentiation)

3.4.1 Partial Derivative ในกรณีที่ $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และตัวแปร x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ เป็นอิสระต่อกันและกัน การเปลี่ยนแปลงค่าของ x ตัวใดตัวหนึ่งจะมีผลต่อค่าของ y เท่านั้น เพราะฉะนั้นในการหา Partial Derivative โดยมุ่งต่อ x ตัวใดตัวหนึ่ง เราจะถือว่า x ที่เหลือ(คือ n-1 ตัว) เป็นเสมือนตัวคงที่ (Constant)

__ตัวอย่าง__ 1) กำหนดให้ $y = f(x_1,x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$ เราหา Partial Derivative ได้คือ

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = f_1 = 6x_1 + x_2$$ (ถือเสมือนว่า x_2 เป็นตัวคงที่)

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = f_2 = 8x_2 + x_1$$ (ถือเสมือนว่า x_1 เป็นตัวคงที่)

[เนื่องจาก Partial Derivative ยังคงเป็นฟังก์ชั่นของตัวแปรอิสระเหมือนกับPrimary Function เพราะฉะนั้นเราจึงเขียนรูปทั่วไปของ Partial Derivative ของตัวแปรอิสระ x_1, x_2 ได้คือ

$f_1 = f_1(x_1,x_2)$ และ $f_2 = f_2(x_1,x_2)$]

2) กำหนดให้ $y = f(u,v) = (u+4)(3u+2v)$ เราสามารถหา Partial Derivative ได้โดยใช้ Product Rule คือ

$$f_u = (u+4)(3) + (1)(3u+2v) = 2(3u+v+6) \quad \text{(holding } v \text{ constant)}$$

$$f_v = (u+4)(2) + 0(3u+2v) = 2(u+4) \quad \text{(holding } u \text{ constant)}$$

3) กำหนดให้ $y = (3u-2v)/(u^2+3v)$ เราสามารถหา Partial Derivative ได้โดยใช้ Quotient Rule คือ

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{3(u^2+3v) - 2u(3u-2v)}{(u^2+3v)^2} = \frac{-3u^2+4uv+9v}{(u^2+3v)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-2(u^2+3v) - 3(3u-2v)}{(u^2+3v)^2} = \frac{-u(2u+9)}{(u^2+3v)^2}$$

5 กฎการหาดิฟเฟอเรนเชียล

(Rules of Differential)

สมมติว่าเรามีฟังก์ชั่น $y = f(x_1,x_2)$ การหาดิฟเฟอเรนเชียล เราทำได้โดยหา Partial Derivative เสียก่อน (คือ f_1 และ f_2) แล้วแทนลงในสมการ คือ

$$dy = f_1dx_1 + f_2dx_2$$

แต่เพื่อความสะดวกเราอาจใช้กฎของการหาดิฟเฟอเรนเชียล ซึ่งมีสูตรดังต่อไปนี้

สมมติว่า u และ v เป็นฟังก์ชั่นของตัวแปร x_1 และ x_2 การหา differential ทำได้ดังนี้

<u>กฎที่ 1</u> $d(cu^n) = cnu^{n-1}du$

<u>กฎที่ 2</u> $d(u \pm v) = du \pm dv$

กฎที่ 3 $d(uv) = vdu + udv$

กฎที่ 4 $d\frac{u}{v} = \frac{1}{v^2}(vdu - udv)$

ในกรณีที่มีฟังก์ชั่นของ x_1 และ x_2 มากกว่าสองฟังก์ชั่น เราสามารถเพิ่มกฎของการหา differential ได้(โดยอาศัยกฎทั้ง 4 ที่กล่าวแล้วข้างบนนี้) ดังนี้

กฎที่ 5 $d(u+v+w) = du+dv+dw$

กฎที่ 6 $d(uvw) = vwdu + uwdv + uvdw$

ตัวอย่าง 1) จงหา Total Differential dy ของ $y = 3x_1^2 + 2x_2$

ถ้าเราหา Differential dy โดยตรงโดยใช้ Partial Derivative เราทำได้ดังนี้

$$f_1 = 6x_1 \quad \text{และ} \quad f_2 = 2$$

เพราะฉะนั้น $dy = f_1dx_1 + f_2dx_2 = 6x_1dx_1 + 2dx_2$

ถ้าเราหา Differential dy โดยใช้กฎข้างต้นเราทำได้ดังนี้

สมมติให้ $u = 3x_1^2 \qquad v = 2x_2$

เพราะฉะนั้น $dy = d(3x_1^2) + d(2x_2)$ (โดยกฎที่ 2)

$= 6x_1dx_1 + 2dx_2$ (โดยกฎที่ 1)

2) จงหา Total Differential ของ $y = 2x_1^2 + x_1x_2^2$

ถ้าเราหา Total Differential โดยใช้วิธี Partial Derivative เราทำได้ดังนี้

$f_1 = 4x_1 + x_2^2$ และ $f_2 = 2x_1x_2$

เพราะฉะนั้น $dy = (4x_1 + x_2^2)dx_1 + 2x_1x_2dx_2$

ถ้าเราหา Total Differential โดยใช้กฎข้างต้นเราทำได้ดังนี้

$$dy = d(2x_1^2) + d(x_1x_2^2) \qquad \text{(โดยกฎที่ 2)}$$

$$dy = 4x_1dx_1 + x_1d(x_2^2) + x_2^2dx_1 \qquad \text{(โดยกฎที่ 1 และที่ 3)}$$

$$= 4x_1dx_1 + 2x_1x_2dx_2 + x_2^2dx_1 \qquad \text{(โดยกฎที่ 1)}$$

$$= (4x_1 + x_2^2)dx_1 + 2x_1x_2dx_2$$

3) จงหา Total Differential ของ $y = \dfrac{3x_1 + x_2}{2x_1^2}$

หา Partial Derivative เราทำได้ดังนี้

$$f_1 = \frac{(2x_1^2)(3) - (3x_1+x_2)(4x_1)}{4x_1^4} = \frac{6x_1^2 - 12x_1^2 - 4x_1x_2}{4x_1^4}$$

$$= \frac{-6x_1^2 - 4x_1x_2}{4x_1^4} = \frac{-2x_1(3x_1 + 2x_2)}{4x_1^4}$$

$$= \frac{-(3x_1 + 2x_2)}{2x_1^3}$$

$$f_2 = \frac{(2x_1^2)(1) - 0}{4x_1^4} = \frac{2x_1^2}{4x_1^4}$$

$$= \frac{1}{2x_1^2}$$

เพราะฉะนั้น
$$dy = \frac{-(3x_1 + 2x_2)}{2x_1^3} dx_1 + \frac{1}{2x_1^2} dx_2$$

ถ้าเราใช้วิธีของกฎดังกล่าวข้างต้นเราสามารถหา Total Differential ได้ดังนี้

$$dy = \frac{(2x_1^2)d\,(3x_1 + x_2) - (3x_1 + x_2)d(2x_1^2)}{4x_1^4} \quad \text{(โดยกฎที่ 4)}$$

$$= \frac{(2x_1^2)(3dx_1 + dx_2) - (3x_1 + x_2)(4x_1 dx_1)}{4x_1^4} \quad \text{(โดยกฎที่ 2 และ 1)}$$

$$= \frac{6x_1^2dx_1 + 2x_1^2dx_2 - 12x_1^2dx_1 - 4x_1x_2dx_1}{4x_1^4}$$

$$= \frac{-(6x_1^2 + 4x_1x_2)dx_1}{4x_1^4} + \frac{2x_1^2dx_2}{4x_1^4}$$

$$= \frac{-2x_1(3x_1 + 2x_2)}{4x_1^4} dx_1 + \frac{1}{2x_1^2} dx_2$$

$$= \frac{-(3x_1 + 2x_2)}{2x_1^3} dx_1 + \frac{1}{2x_1^2} dx_2$$

6 การหาอนุพันธ์ทั้งหมดของฟังก์ชั่นประกอบ

(Total Derivative of Composite Functions)

กรณีที่ 1 สมมติว่าเรามีฟังก์ชั่น $y = f(x_1, x_2)$ และ $x_2 = g(x_1)$ การเปลี่ยนแปลงใด ๆ

ที่เกิดขึ้นต่อ x_1 ย่อมมีผลโดยตรงต่อ y (direct effect) และผลโดยอ้อมต่อ y (indirect-effect) ผลโดยตรงนั้นเข้าใจได้ชัดแจ้งจากฟังก์ชั่น $y = f(x_1,x_2)$ คือการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร x_1 ส่งผลโดยตรงต่อการเปลี่ยนแปลงของ y โดยมิต้องผ่านตัวแปรอิสระตัวอื่น ส่วนผลโดยอ้อมของการเปลี่ยนแปลงของ x_1 ที่มีต่อ y คือการเปลี่ยนแปลงของ x_1 ทำให้ x_2 เปลี่ยนแปลง และ x_2 ทำให้ y เปลี่ยนแปลงอีกต่อหนึ่ง

การหา Total Derivative เราทำได้คือ จาก $y = f(x_1,x_2)$ จะได้ว่า Total Differential คือ $dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$

หารตลอดด้วย Differential dx_1 เราจะได้ Total Derivative คือ

$$\frac{dy}{dx_1} = f_1 + f_2 \frac{dx_2}{dx_1}$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}$$

จะเห็นได้ว่าเทอมที่1 ทางด้านขวามือแสดงผลโดยตรงของการเปลี่ยนแปลงของ x_1 ที่มีต่อ y ส่วนเทอมที่ 2 ทางด้านขวามือนั้นแสดงผลทางอ้อมของการเปลี่ยนแปลงของ x_1 ที่มีต่อ y ซึ่งผลทางอ้อมนั้นแสดงเป็น Causal Chain ได้ดังนี้

$$\left(\frac{dy}{dx_2} \leftarrow \frac{dx_2}{dx_1}\right)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1) กำหนดให้ $y = f(x_1 x_2) = 2x_1^2 - 3x_2$

และ $x_2 = g(x_1) = x_1^2 - x_1 + 3$

จงหา Total Derivative $\frac{dy}{dx_1}$

เนื่องจาก y เป็นฟังก์ชั่นของ x_1 และ x_2 และ x_2 เป็นฟังก์ชั่นของ x_1 เพราะฉะนั้น Total Derivative $\frac{dy}{dx_1}$ ควรเป็นดังนี้

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}$$

$$= 4x_1 + (-3)(2x_1 - 1) \quad = 4x_1 - 6x_1 + 3$$

$$= -2x_1 + 3$$

ในการตรวจสอบคำตอบว่า $\frac{dy}{dx_1}$ ที่เราหาได้นี้ถูกต้องหรือไม่ เราอาจทำได้โดยแทนค่าฟังก์ชั่น g ลงในฟังก์ชั่น f นั่นคือ

$$y = f[x_1, g(x_1)] = 2x_1^2 - 3(x_1^2 - x_1 + 3)$$

$$= 2x_1^2 - 3x_1^2 + 3x_1 - 9$$

$$= -x_1^2 + 3x_1 - 9$$

จะเห็นได้ว่า y ในขณะนี้เป็นฟังก์ชั่นของตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว คือ x_1 เพราะฉะนั้นเราหาอนุพันธ์โดยวิธีธรรมดาได้ดังนี้

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}(-x_1^2 + 3x_1 - 9)$$

$$= -2x_1 + 3$$

<u>กรณีที่</u> 2 สมมติว่าเรามี Composite Function คือ

$$y = f(x_1, x_2) \quad \text{ซึ่ง} \quad \begin{cases} x_1 = g(w) \\ x_2 = h(w) \end{cases}$$

ในกรณีเช่นนี้การเปลี่ยนแปลงของ w จะไม่มีผลโดยตรงต่อ y แต่จะมีผลโดยอ้อมต่อ y เท่านั้น นั่นคือ การเปลี่ยนแปลงของ w จะส่งผลถึง y ได้จะต้องส่งผลผ่าน x_1 และ x_2 โดยฟังก์ชั่น g และ h ตามลำดับ

การหา Total Derivative ทำได้โดยหา Total Differdntial ของฟังก์ชั่น f แล้วหารตลอดด้วย differential dw จะได้

$$\frac{dy}{dw} = f_1 \frac{dx_1}{dw} + f_2 \frac{dx_2}{dw}$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dw} \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dw}$$

<u>ตัวอย่าง</u> สมมติว่าฟังก์ชั่นของการผลิตเป็นดังนี้

$$Q = Q(K,L) = 20KL - K^2 - 2L2$$

โดย $K = g(t) = 0.3t$ และ $L = h(t) = 0.2t$

ซึ่ง K คือ ทุน (Capital) L คือ แรงงาน (Labor) t คือ เวลา(time) และ Q คือ ผลผลิต(Output) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของผลผลิตเนื่องจากการเพิ่มขึ้นของเวลา

จาก $\quad Q = Q(K,L)$

จะได้ว่า
$$\frac{dQ}{dt} = Q_k \frac{dk}{dt} + Q_l \frac{dl}{dt}$$

$$= (20L - 2K)(0.3) + (20K - 4L)(0.2)$$

$$= 6L - 0.6\sim + 4K - 0.8L$$

$$= 3.4K + 5.2L$$

$$= 2.06\ t$$

<u>กรณีที่</u> 3 สมมติว่าเรามี Composite Function คือ

$$y = f(x_1, x_2) \qquad \text{ซึ่ง} \begin{cases} x_1 = g(u,v) \\ x_2 = h(u,v) \end{cases}$$

ในกรณีเช่นนี้การเปลี่ยนแปลงของ u และ/หรือ v จะส่งผลถึงการเปลี่ยนแปลงของ y โดยผ่านทาง x_1 และ x_2 เพราะฉะนั้นการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ต่อการเปลี่ยนแปลงของ u หรือ v เราต้องใช้วิธี Total Derivative แต่ในกรณีเช่นนี้เราไม่ใช้สัญลักษณ์ $\frac{dy}{du}$ หรือ $\frac{dy}{dv}$ แต่เราใช้ $\frac{\partial y}{\partial u}$ หรือ $\frac{\partial y}{\partial v}$ ตามลำดับ ทั้งนี้เพราะทั้ง u และ v ต่างก็เป็นตัวแปรอิสระของทั้งฟังก์ชั่น g และ h อนุพันธ์ในกรณีเช่นนี้เราอาจเรียกว่า Partial Total Derivative

การหา Partial Derivative ในกรณีนี้ทำได้ดังสูตร คือ

1) $$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u}$$

2) $$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial v}$$

<u>**ตัวอย่าง**</u> กำหนดให้ $y = 3x_1^2 + 2x_2$

และ $x_1 = u + 2v^2$

$x_2 = 5u^2 + v$

จงหา $\frac{\partial y}{\partial u}$ และ $\frac{\partial y}{\partial v}$

เนื่องจาก y เป็นฟังก์ชั่นของตัวแปรอิสระสองตัวคือ x_1 และ x_2. และ x_1 และ x_2 ต่างก็เป็นฟังก์ชั่นของตัวแปรอิสระอีกสองตัวคือ u และ v

เพราะฉะนั้น $$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u} \quad \text{..........(1)}$$

และ $$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial v} \quad \text{..........(2)}$$

จากฟังก์ชั่นที่กำหนดให้ เราหา Partial Derivative ได้ดังนี้

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 6x_1 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 2$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = 1 \qquad \frac{\partial x_2}{\partial u} = 10u$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = 4v \qquad \frac{\partial x_2}{\partial v} = 1$$

แทนค่า Partial Derivative เหล่านี้ลงใน (1) และ (2) เราจะได้ Partial Total Derivative ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial u} &= (6x_1)(1) + (2)(10u) \\
&= 6(u+2v^2) + 20u = 6u + 12v^2 + 20u \\
&= 26u + 12v^2 \\
\frac{\partial y}{\partial v} &= (6x_1)(4v) + (2)(1) \\
&= 6(u + 2v^2)\,4v + 2 \\
&= 24uv + 48v^3 + 2
\end{aligned}$$

กรณีที่ 4 สมมติว่าเรามี Composite function คือ

$$y = f(x_1, x_2) \quad \text{ซึ่ง} \quad \begin{cases} x_1 = g(u,v) \\ x_2 = h(u) \end{cases}$$

ในกรณีเช่นนี้การเปลี่ยนแปลงของ u จะส่งผลโดยอ้อมไปยัง y โดยผ่านตัวแปร x_1 และ x_2 เหมือนกับในกรณีที่ 3 แต่การเปลี่ยนแปลงของ v จะส่งผลโดยอ้อมไปยัง y โดยผ่านตัวแปร x_1 เท่านั้น เพราะว่า

ในกรณีนี้ v มิได้เป็นตัวแปรอิสระร่วมอยู่ด้วยใน function h ดังนั้น Partial Total Derivative ในกรณีเช่นนี้เราสามารถหาได้คือ

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{du}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial v}$$

จะสังเกตเห็นได้ว่าเทอมที่ 2 ทางด้านขวามือของสมการแรก เราใช้ $\frac{dx_2}{du}$ แทนที่จะเป็น $\frac{\partial x_2}{\partial u}$ ทั้งนี้ก็เพราะว่า x_2 เป็นฟังก์ชั่นของตัวแปรอิสระ u เท่านั้น เราจึงไม่ใช้เครื่องหมาย Partial Derivative( ) สำหรับในสมการที่ 2 เทอมที่ 2 ทางด้านขวามือจะเท่ากับศูนย์ เพราะ v เป็นตัวแปรอิสระในฟังก์ชั่น g เท่านั้น มิได้เป็นตัวแปรอิสระในฟังก์ชั่น h ด้วย เพราะฉะนั้นการเปลี่ยนแปลงของ v จึงไม่มีผลต่อ x_2 และก็ไม่มีผลต่อ y

7 <u>การหาอนุพันธ์ของอิมปริสิทฟังก์ชั่น</u>

(Derivatives of Implicit Functions)

ถ้าเรามี $y = f(x) = \frac{2x}{3x+1}$ ฟังก์ชั่นในรูปนี้เราเรียกว่า Explicit Function เพราะว่าฟังก์ชั่นนี้แสดงให้เห็นว่า y เป็นฟังก์ชั่นของ x อย่างไรก็ตามฟังก์ชั่น $y = \frac{2x}{3x+1}$ นี้สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูป

$$y + 3xy - 2x = 0$$

เราเรียกว่าฟังก์ชั่นในรูปใหม่นี้ว่า Implicit Function ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ (Symbol) ได้ว่า $F(x,y) = 0$ หมายความว่าตัวแปรทั้งหมด คือ x และ y อยู่ทางด้านซ้ายมือของสมการ (คือไม่บอกให้ทราบว่าตัวใดเป็นตัวแปรอิสระ ตัวใดเป็นตัวแปรตาม) เมื่อกำหนดค่า x ให้ค่าหนึ่งจะมีค่า y เพียงค่าเดียวเท่านั้นที่สอดคล้องกับค่าของ x ที่กำหนดให้ ซึ่งทำให้สมการเท่ากับศูนย์ (zero)

การหาอนุพันธ์ (Derivative) ของ implicit function เราทำได้ดังนี้

Taking the differential ทั้งสองข้างของ $F(x,y) = 0$ แล้วหารตลอดด้วย differential dx ซึ่งได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$F_x\,dx + F_y\,dy = d(0) = 0$$

และ $$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

เพราะฉะนั้นเราจึงได้สูตรทั่วไปในการหา Derivative ของ Implicit Function ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

กล่าวได้ว่า Derivative($\frac{*}{dx}$) ของ Implicit Function $y = f(x)$ ซึ่งกำหนดให้ในรูปของ $F(x,y) = 0$ คืออัตราส่วนของ Partial Derivative F_x กับ Partial Derivative F_y และอัตราส่วนนี้จะมีเครื่องหมายลบ (negative sign) เสมอ

<u>ตัวอย่าง</u> 1) จงหา Derivative $\frac{dy}{dx}$ ของ $2y + xy - 5x = 0$

จากโจทย์ที่กำหนดให้

$$F(x,y) = 2y + xy - 5x$$

เพราะฉะนั้น Partial Derivative F_x และ F_y คือ

$$F_x = y - 5 \qquad F_y = x + 2$$

เพราะฉะนั้น Derivative $\frac{dy}{dx}$ คือ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{-(y-5)}{x+2} = \frac{5-y}{x+2}$$

2) จงหาDerivative $\frac{dy}{dx}$ ของ $2x^3 - xy^2 + y^3 + 12 = 0$

จากโจทย์ที่กำหนด $F(x,y) = 2x^3 - xy^2 + y^3 + 12$

$$Fx = 6x^2 - y^2 \quad \text{และ} \quad Fy = -2xy + 3y^2$$

เพราะฉะนั้น Derivative ที่ต้องการคือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(6x^2 - y^2)}{-2xy + 3y^2} = \frac{y^2 - 6x^2}{3y^2 - 2xy}$$

n-variable case

ในกรณีที่ Implicit Function ประกอบด้วยตัวแปร n ตัว นั่นคือ

$$F(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) = 0$$

เราสามารถหา Derivative ได้เช่นกัน โดยยึดหลักการหา Derivative เช่นเดียวกันกับกรณีที่ Implicit Function ประกอบด้วยตัวแปรเพียงสองตัวดังกล่าวข้างต้น ประการแรกทีเดียวนั้นเรา Take Differential เข้าทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \ldots\ldots + F_n dx_n = 0$$

ประการที่สอง เราให้ตัวแปรที่ต้องการ 2 ตัวคือ x_i กับ x_j แปรเปลี่ยนได้ เพื่อที่จะให้ Differential ของตัวแปรอื่นนอกจาก dx_i และ dx_j เท่ากับศูนย์ (zero) เพราะฉะนั้นเราจะได้

$F_i dx_i + F_j dx_j = 0$ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\left(\frac{dx_j}{dx_i}\right) \equiv \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_i}}_{\text{ตัวแปรอื่นๆ (n-2) ตัวคงที่}} = -\frac{F_i}{F_j}$$

ซึ่งเป็น Partial derivative แสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ x_j ต่อการเปลี่ยนแปลงของ x_i

8 การหาอนุพันธ์ของ Exponential และ Logarithmic Functions

กฎทั่วไปสำหรับการหา Derivative ของ Exponential Function คือ

$$\boxed{\frac{d}{dt} b^{f(t)} = f'(t)\, b^{f(t)} \ln b}$$

ในกรณีที่ $b = e$ เราจะได้

$$\frac{d}{dt} e^{f(t)} = f'(t)\, e^{f(t)} \ln e$$

$$= f'(t)\, e^{f(t)} \qquad (\because \ln e = 1)$$

สำหรับการหา Derivative ของ Logarithmic Function มีกฎทั่วไป คือ

$$\boxed{\frac{d}{dt} \log_b f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{1}{\ln b}}$$

ในกรณีที่ $b = e$ คือ log ฐาน e Derivative จะเป็นดังนี้

$$\frac{d}{dt} \ln f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1) จงหา Derivative ของ $y = e^{t}$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dt}{dt}\right)(e^{t}) \ln e$$

$$= e^{t} \qquad \left(\because \frac{dt}{dt} = 1 \text{ และ } \ln e = 1\right)$$

2) จงหา Derivative ของ $y = e^{rt}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{drt}{dt} (e^{rt}) \ln e$$

$$= re^{rt}$$

3) จงหา Derivative ของ $y = e^{-t}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(-t)}{dt} \cdot e^{t} \ln e$$

$$= -e^{-t}$$

4) จงหา derivative ของ $y = b^t$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dt}{dt}(b^t)(\ln b)$$

$$= b^t \ln b$$

5) จงหา derivative ของ $y = \ln t$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dt/dt}{t} \cdot \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{t}$$

6) จงหา derivative ของ $y = \ln at$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{d}{dt}(at)}{at} \cdot \frac{1}{\ln e} = \frac{a}{at}$$

$$= \frac{1}{t}$$

7) จงหาderivative ของ $y = k\ln t$

$$\frac{dy}{dt} = k\frac{d}{dt}\ln t = \frac{k}{t}$$

8) จงหา derivative ของ $y = \ln t^c$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ct^{c-1}}{t^c} = \frac{c}{t}$$

9) จงหา derivative ของ $y = t^4 \ln t^5$

$$\frac{dy}{dt} = t^4 \frac{d}{dt} \ln t^5 + \ln t^5 \frac{d}{dt} t^4$$

$$= t^4 \left(\frac{5t^4}{t^5}\right) + \ln t^5(4t^3)$$

$= 5t^3 + 4t^3(5 \ln t)$

$= 5t^3(1 + 4 \ln t)$

10) จงหา derivative ของ $y = \log_b t$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dt/dt}{t} \cdot \frac{1}{\ln b}$$

$$= \frac{1}{t \ln b}$$

g การหาอนุพันธ์ลำดับที่สองและมากกว่าสอง

(Second and Higher Derivative)

Second Order Derivative &Derivative ของ First Order Derivative นั่นเอง ถ้าเรามีฟังก์ชั่น $y = f(x)$ เราใช้สัญญลักษณ์แทน First Order Derivative, Second Order Derivative, Third Order Derivative, Fourth Order Derivative... ดังนี้

First Order Derivative : $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Second Order Derivative : $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$

Third Order Derivative : $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = f'''(x)$

Fourth Order Derivative : $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = f^4(x)$

ตัวอย่าง 1) จงหา Second Order Derivative ของ $y = ax^2 + bx + c$

$$\frac{dy}{dx} = tax + b$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a$$

2) จงหา Second Order Derivative ของ $y = \frac{1+x}{1-x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2}{1-2x+x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1+2x+x^2)(0) - (2)(-2+2x)}{(1-2x+x^2)^2}$$

$$= \frac{4(1-x)}{1-4x+6x^2-4x^3+x^4}$$

3) จงหา Third Order Derivative ของ $y = 4x^4-3x+20$

$$\frac{dy}{dx} = 16x^3 - 3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 48x^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 96x$$

10 Second-order Partial Derivatives and Total Differentials

3.10.1 Second-order Partial Derivatives ถ้ากำหนดให้ $z = f(x,y)$ หมายความว่า z เป็นฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัว คือ x และ y เราสามารถหา First Partial Derivative ได้ดังนี้

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad f_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

ซึ่งทั้ง f_x และ f_y ก็ยังคงเป็นฟังก์ชันของ x และ y อยู่ เพราะฉะนั้นเราสามารถหา Second-Order Partial Derivative ได้คือ

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_x) \quad \text{หรือ} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_y) \quad \text{หรือ} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

f_{xy} และ f_{yx} นี้เราเรียกว่า Cross (หรือ mixed) Partial Derivative เพราะมันแสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ First-order Partial Derivative ของตัวแปรหนึ่งต่อการเปลี่ยนแปลงของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง ตามทฤษฎีของ Young(Young's Theorem) ถ้า f_{xy} และ f_{yx} เป็น Continuous Function f_{xy} และ f_{yx} จะมีค่าเท่ากัน

<u>ตัวอย่าง</u> 1) จงหา Second-order Partial Derivative ของ $z = x^3 + 5xy - y^2$

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 5y$$

$$f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 5x - 2y$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 5$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 5$$

2) จงหา Second-order Partial Derivative ของ $z = x^2 e^{-y}$

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{-y}$$

$$f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2)\frac{d}{dy}(-y)\, e^{-y}$$

$$= -x^2e^{-y}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = \text{-2x*-y}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \text{-2xe'y}$$

10.2 <u>Second-order **Total Differential**</u> ถ้ากำหนด $z = f(x,y)$ ให้ เรา สามารถหา First-order Total **Differential** ได้คือ

$$dz \text{ (หรือ } df \text{)} = f_xdx + f_ydy$$

เพราะฉะนั้น Second-order Total Derivative คือ

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}dy$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(f_xdx+f_ydy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_xdx+f_ydy)dy$$

$$= (f_{xx}dx+f_{xy}dy)\,dx + (f_{yx}dx+f_{yy}dy)dy$$

$$= f_{xx}dx^2 + f_{xy}dydx + f_{yx}dxdy + f_{yy}dy^2$$

$$\left[dx^2 \equiv (dx)^2 \text{ และ } dy^2 \equiv (dy)^2\right]$$

$$= f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 \qquad \left[f_{xy} = f_{yx_3}\right.$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา dz และ d^2z ของ $z = x^3 + 5xy - y^2$

$$dz = d(x^3) + d(5xy) - d(y^2)$$

$$= 3x^2dx + 5xdy + 5ydx - 2ydy$$

$$d^2z = d(3x^2)dx + d(5x)dy + d(5y)dx - d(2y)dy$$

$$= (6xdx)dx + (5dx)dy + (5dy)dx - (2dy)dy$$

$$= 6xdx^2 + 5dxdy + 5dydx - 2dy^2$$

$$= 6xdx^2 + 10dxdy - 2dy^2$$

รายชื่อหนังสือที่ควรอ่านเพิ่มเติม

Allen, R.G.D. Mathematical Analysis for Economists. Macmillan & Co., Ltd., 1971. ch. 6, 7, and 10

Ayres, Frank Jr., Calculus : Theory and Problems. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Company, 1964 ch. 4, 5, 6, 14, 23, 56, 57 and 58

Chiang, Alpha C. Fundamental Methods of Mathematical Economics. 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, 1967 ch. 7-11

Henry, S.G.B. Elementary Mathematical Economics. Routledge & Kegan Paul Ltd., 1969. ch. 2 and 3

Read, Ronald C. A Mathematical Background for Economists and Social Scientists. Prentice-Hill Inc., 1972 ch.9